

VISIT...

LANZAROTE  
*Caliente*.com

# ИСТОРИЯ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ





**ОТЕЧЕСТВЕННОЙ**

АКАДЕМИЯ НАУК  
СССР

АКАДЕМИЯ НАУК  
УССР

КИЕВ—1968



АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВО-  
ЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

АКАДЕМИЯ НАУК УССР

СЕКТОР ИСТОРИИ ТЕХНИКИ И ЕСТЕ-  
СТВОЗНАНИЯ ИНСТИТУТА ИСТОРИИ

# История

**В ЧЕТЫРЕХ ТОМАХ**

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ:

И. З. Штокало (*ответственный редактор*), А. Н. Боголюбов (*заместитель ответственного редактора*), А. П. Юшкевич (*заместитель ответственного редактора*), И. Г. Башмакова, Н. Н. Боголюбов, А. О. Гельфонд, А. Т. Григорьян, Б. Н. Делоне, Н. П. Еругин, А. Ю. Ишлинский, И. П. Кубилюс, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, С. Н. Мергелян, Ю. А. Митропольский, Н. И. Мухелишвили, О. С. Парасюк, И. Б. Погребынский, Е. Я. Ремез, Б. А. Розенфельд, К. А. Рыбников, В. И. Смирнов, Ю. Д. Соколов, Г. С. Чогошвили, А. Б. Паплаускас (*ответственный секретарь*), В. С. Сологуб (*ответственный секретарь*).

РЕДАКЦИЯ 3-го ТОМА:

И. З. Штокало (*ответственный редактор*), А. Н. Боголюбов (*заместитель ответственного редактора*), А. П. Юшкевич (*заместитель ответственного редактора*), Н. Н. Боголюбов, А. О. Гельфонд, В. М. Глушков, Б. В. Гнеденко, Н. П. Еругин, Ю. А. Митропольский, И. Б. Погребынский, Н. И. Мухелишвили, О. С. Парасюк, Е. Я. Ремез, В. И. Смирнов, Ю. Д. Соколов, А. Б. Паплаускас (*ответственный секретарь*), В. С. Сологуб (*ответственный секретарь*).

# ОТЕЧЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ

**3**

**1917—1967**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Первые два тома «Истории отечественной математики» содержат материал, освещающий развитие математики в нашей стране с древнейших времен до 1917 г. Третий и четвертый тома посвящены развитию математики в годы Советской власти, с 1917 г. и до наших дней.

Первые четыре главы третьего тома представляют собой общий обзор развития математики в СССР за 50 лет. Это первый такой очерк в обзорной математической литературе, и, естественно, в нем могут быть некоторые пробелы и недочеты. В очерке рассматриваются решения Коммунистической партии Советского Союза и Советского правительства о развитии науки, в частности о деятельности Академии наук СССР и республиканских Академий наук, развитие математических исследований в научно-исследовательских учреждениях и высших учебных заведениях, преподавание математики, материалы о математических съездах, научных конференциях, совещаниях, публикации научных работ, изданиях математических журналов, вопросы роста научных и преподавательских кадров в области математики. Весь изложенный материал свидетельствует о тех грандиозных достижениях, которых добились советские ученые в области математики.

В V—X главах третьего тома, а также в обеих частях четвертого подробно освещается история развития научных исследований по отдельным направлениям математики. Третий том содержит обзоры работ по теории чисел, алгебре, геометрии, топологии и теории функций действительного переменного. В каждой из этих специальных глав рассмотрены и проанализированы основные результаты, полученные учеными СССР за 50 лет, названы виднейшие представители математических направлений и школ. В связи с тем что советскими учеными за 50 лет получено огромное количество результатов во всех областях математики, авторы специальных глав не имели возможности осветить с достаточной полнотой все научные результаты и все направления исследований по отдельным специальностям, тем более, что объем издания ограничен. Поэтому рассмотрены лишь основные научные результаты, направления и школы. Авторы вынуждены были также отказаться, за небольшими исключениями, от цитирования математической литературы. В библиографии к отдельным главам приведены лишь наиболее важные, по мнению авторов, математические работы.

Третий том «Истории отечественной математики» написали следующие авторы:

Главы I—IV — А. Н. Боголюбов.

Глава V — Б. Б. Венков, Ю. В. Линник, А. В. Малышев.

Глава VI — В. А. Андрунакиевич, Л. М. Глушкин, Л. А. Калужнин, А. Г. Куропш, Д. К. Фаддеев, В. С. Чарин.

Глава VII — Я. П. Бланк, Д. З. Горdevский, А. В. Погорелов.

Глава VIII — Г. Л. Буймола, А. Т. Чалый.

Глава IX — А. М. Виноградов, С. П. Новиков, Е. Г. Складенко, А. В. Чернавский, Г. С. Чогошвили.

Глава X — А. С. Кованько, Л. Д. Кудрявцев, С. М. Никольский, В. С. Сологуб, П. Л. Ульянов.

Том подготовлен к изданию коллективом отдела истории естествознания Сектора истории техники и естествознания Института истории АН УССР в составе академика АН УССР И. З. Штокало, старших научных сотрудников доктора технических наук А. Н. Боголюбова и кандидата физико-математических наук В. С. Сологуба. В подготовке тома принимали участие старший научный сотрудник Института истории естествознания и техники АН СССР доктор физико-математических наук профессор А. П. Юшкевич и ученый секретарь института кандидат физико-математических наук А. Б. Паплаускас. Научно-вспомогательная работа выполнена сотрудниками отдела истории естествознания Сектора истории техники и естествознания Института истории АН УССР Э. Г. Цыганковой, О. А. Сичкар, Г. Н. Романенко и Л. В. Ковальчук. Общая библиография составлена Э. Г. Цыганковой. Библиография к специальным главам, составленная авторами, упорядочена Г. Н. Романенко.

План и содержание тома обсуждались на заседаниях Семинара по истории математических наук при Секторе истории техники и естествознания Института истории АН УССР и Научно-исследовательского семинара по истории математики и механики при Московском университете, на всесоюзных и региональных конференциях по истории физико-математических наук и Международном конгрессе математиков (Москва, 1966 г.).

Редколлегия и авторский коллектив выражают глубокую благодарность всем ученым, принявшим участие в рецензировании и обсуждении материалов третьего тома.

# **ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В СССР ЗА 50 ЛЕТ**

## **ГЛАВА ПЕРВАЯ**

### **НАЧАЛЬНЫЙ ПЕРИОД РАЗВИТИЯ СОВЕТСКОЙ МАТЕМАТИКИ**

#### **1**

#### **Первые мероприятия Советской власти в области развития науки и высшего образования в стране**

Великая Октябрьская социалистическая революция ознаменовала начало новой эры в истории человечества — эры краха капитализма, эры строительства социализма и коммунизма. Трудящиеся нашей страны, одержав под руководством Коммунистической партии победу всемирно-исторического значения, приступили к ее закреплению. Второй Всероссийский съезд Советов рабочих и солдатских депутатов принял первые декреты Советской власти — Декрет о мире и Декрет о земле. 14 ноября 1917 г. ВЦИК принял положение о рабочем контроле: трудящиеся должны были принимать самое широкое участие в управлении предприятиями. В ноябре-декабре 1917 г. значительное количество предприятий было национализировано. В первой половине 1918 г. были национализированы банки, торговый флот, нефтяная промышленность, крупнейшие предприятия горной, металлургической, металлообрабатывающей, электротехнической и других отраслей промышленности. В результате этой «красногвардейской атаки на капитал» в руках пролетарского государства оказались ключевые позиции народного хозяйства.

Разработанные в 1918 г. В. И. Лениным основные положения о построении социалистического общества включали целый ряд мероприятий, необходимых для овладения таким важным участком общественной жизни, как наука, культура и образование. По указанию В. И. Ленина всю деятельность крупнейшего и наиболее авторитетного научного коллектива страны — Академии наук надо было поставить на службу народу. Народный комиссариат просвещения, которым руководил видный ученый, государственный и партийный деятель А. В. Луначарский, провел совещания совместно с Российской академией наук по вопросу о ее активном участии в деле изучения производительных сил страны.

В феврале 1918 г. общее собрание Академии наук рассмотрело предложенный Народным комиссариатом просвещения проект мобилизации науки для нужд государственного строительства. Проект предусматривал организацию при Академии наук специальной комиссии, в состав которой должны были входить представители других организаций. В соответствии с проектом основной задачей науки являлось широкое все-



стороннее исследование народнохозяйственного труда в промышленности, сельском хозяйстве, на транспорте, всестороннее изучение организации правильного распределения результатов труда, производительных сил страны, вопросов здравоохранения, народного просвещения. Для изучения проекта собрание избрало комиссию под председательством академика С. Ф. Ольденбурга. В состав этой комиссии, в частности, вошел академик В. А. Стеклов.

В постановлении, выработанном комиссией и утвержденном общим собранием, было записано: «Академия наук признает желательным дальнейшую организацию научной работы по тем задачам, которые ближе всего касаются ее деятельности в тех формах, какие она по мере сил выработает с привлечением к участию в научных исследованиях русских ученых специалистов как членов академических комиссий. Академия полагает, что значительная часть задач ставится самой жизнью, и Академия всегда готова, по требованию жизни и государства, приняться за посильную научную и теоретическую разработку отдельных задач, выдвигаемых нуждами государственного строительства, являясь при этом организующим и привлекающим ученые силы страны центром»<sup>1</sup>.

Совет Народных Комиссаров принял постановление о финансировании работ Академии наук, связанных с выполнением важнейших народнохозяйственных задач. В «Наброске плана научно-технических работ», этом важнейшем основополагающем документе, явившемся ответом на решение Академии наук, В. И. Ленин указывает, что в целях правильного планирования необходимых научно-исследовательских работ «Академии наук, начавшей систематическое изучение и обследование естественных производительных сил России, следует немедленно дать от Высшего совета народного хозяйства поручение

образовать ряд комиссий из специалистов для возможно более быстрого составления плана реорганизации промышленности и экономического подъема России.

В этот план должно входить:

рациональное *размещение* промышленности в России с точки зрения близости сырья и возможности наименьшей потери труда при переходе от обработки сырья ко всем последовательным стадиям обработки полуфабрикатов вплоть до получения готового продукта.

Рациональное, с точки зрения новейшей наиболее крупной промышленности и особенно трестов, слияние и сосредоточение производства в немногих крупнейших предприятиях.

Наибольшее обеспечение теперешней Российской Советской республике (без Украины и без занятых немцами областей) возможности *самостоятельно* снабдить себя *всеми* главнейшими видами сырья и промышленности.

Обращение особого внимания на электрификацию промышленности и транспорта и применение электричества к земледелию. Использование непервоклассных сортов топлива (торф, уголь худших сортов) для полу-

---

<sup>1</sup> Цит. по кн.: Г. А. Князев, А. В. Кольцов. Краткий очерк истории Академии наук СССР. «Наука», М.—Л., 1964, стр. 72.

чения электрической энергии с наименьшими затратами на добычу и перевоз горючего.

Водные силы и ветряные двигатели вообще и в применении к земледелию»<sup>2</sup>.

Наряду с привлечением ученых к восстановлению и развитию народного хозяйства в первый год существования Советской власти были проведены также важнейшие мероприятия, направленные на коренную перестройку всей культурной жизни страны. Опубликованное 16 октября 1918 г. «Положение о единой трудовой школе» сделало среднее образование доступным для самых широких масс трудящихся. Тем самым были созданы все предпосылки для решения важнейшей задачи — подготовки кадров, преданных делу построения социалистического общества. «...Наша школа, — говорил В. И. Ленин, — должна давать молодежи основы знания, уметь вырабатывать самим коммунистические взгляды, должна делать из них образованных людей»<sup>3</sup>.

Одновременно были разработаны мероприятия для реорганизации всей системы высшего образования. 2 августа 1918 г. В. И. Ленин подписал декрет, предоставлявший всем трудящимся право поступления в любые высшие учебные заведения независимо от предварительного образовательного ценза. А в 1919 г. в программе Коммунистической партии были сформулированы основные задачи и принципы построения высшей школы: «Открытие широкого доступа в аудитории высшей школы для всех желающих учиться, и в первую очередь для рабочих; привлечение к преподавательской деятельности в высшей школе всех, могущих там учить; устранение всех и всяческих искусственных преград между свежими научными силами и кафедрой; материальное обеспечение учащихся с целью дать фактическую возможность пролетариям и крестьянам воспользоваться высшей школой»<sup>4</sup>. При высших учебных заведениях начали организовываться рабочие факультеты, дававшие возможность овладеть программой средней школы и сыгравшие весьма существенную роль в изменении социального состава студенчества.

Так в высшей школе впервые была создана пролетарская прослойка.

В числе первых мероприятий Советской власти было и изменение распределения высших учебных заведений в стране. При царизме это распределение отличалось крайней неравномерностью. Наибольшая часть высших учебных заведений была сконцентрирована в Москве и Петербурге. При распределении высших учебных заведений не учитывались ни хозяйственное значение отдельных районов, ни их национальный состав. Преподавание во всех вузах велось исключительно на русском языке. На многочисленные требования с мест об организации новых высших учебных заведений в Тифлисе, Ярославле, Вологде, Архангельске, Владивостоке, об открытии новых факультетов, в том числе физико-матема-

<sup>2</sup> В. И. Ленин. набросок плана научно-технических работ. — Полн. собр. соч. Т. 36, стр. 228—231.

<sup>3</sup> В. И. Ленин. Задачи союзов молодежи. — Полн. собр. соч. Т. 41, стр. 313.

<sup>4</sup> КПСС в резолюциях и решениях съездов, конференций и пленумов ЦК. Ч. 1. Изд. 7-е. Госполитиздат, 1954, стр. 420.

тических, в Саратовском и Томском университетах Министерство народного просвещения зачастую даже не отвечало. В конце 1917 и в 1918 г. организуются университеты в Тифлисе, Баку, Симферополе (сначала как филиал Киевского университета), университет и политехнический институт в Екатеринодаре (ныне Краснодар), педагогический и сельскохозяйственный институты в Ставрополе, политехнический и педагогический институты во Владикавказе, на базе эвакуированных во время войны факультетов Варшавского и Рижского политехнических институтов Нижегородский университет с техническим факультетом и Иваново-Вознесенский политехнический институт, университет в Костроме. Осенью 1919 г. открываются политехнический институт во Владивостоке, сельскохозяйственный и промышленный институты в Омске, университет в Иркутске, Туркестанский университет в Ташкенте, университет в Екатеринбургe (ныне Свердловск) и другие вузы. Трудно даже перечислить все учебные заведения, которые одно за другим появлялись в эти годы. Часть из них оказалась недостаточно жизнеспособной, так как не имела ни базы, ни соответствующего преподавательского состава, но в основном эти высшие учебные заведения выстояли, окрепли и явились существенным звеном в деле создания советского высшего образования. Характерно, что большинство из новых высших учебных заведений в числе первых кафедр открыло кафедры математики. Не оценивая пока научной силы этих кафедр (некоторые из них с первых лет своего существования внесли в науку весьма серьезный вклад), отметим, что положительным фактом было уже само распространение математических наук вширь: были заложены основы, а результаты начали появляться через десять лет,

## 2

### **Математические исследования и преподавание математики в стране в 1917 г.**

Расширение сети высших учебных заведений в 1918—1919 гг., увеличившее количество математических кафедр вдвое, потребовало от коллектива математиков России большого напряжения и интенсивной деятельности.

Для того чтобы составить представление о развитии математики в первые годы Советской власти, бросим ретроспективный взгляд на состояние математических школ и преподавание математики в 1917 г.

Единственной большой математической школой России до Великой Октябрьской социалистической революции была школа, созданная П. Л. Чебышевым в Петербурге и его учениками в различных университетских центрах старой России. Таким образом, петербургская математическая школа имела общерусское значение. В конце XIX и первом десятилетии XX в. вокруг отдельных математиков образуются более или менее сильные научные группы, впоследствии развившиеся в новые школы. В Москве молодые математики развивали, вслед за К. М. Петерсоном, геометрию, затем Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным была создана школа прикладной математики. Во втором десятилетии

XX в. возникло теоретико-функциональное направление, возглавляемое Д.Ф. Егоровым и его учеником Н. Н. Лузиным.

Московские математики объединялись Московским математическим обществом. Вторым по значению являлось Харьковское математическое общество, очень тесно связанное с петербургской математической школой. В Харькове написал и издал свою знаменитую диссертацию «Общая задача об устойчивости движения» (1892 г.) А. М. Ляпунов, здесь же начал научную деятельность В. А. Стеклов и позднее работал С. Н. Бернштейн, возглавлял кафедру чистой математики воспитанник Казанского университета Д. М. Синцов. С петербургской математической школой связаны были и ученики Чебышева, киевские математики Н. Б. Делоне и Д. А. Граве. Последний уже в первом десятилетии века начал создавать в Киеве свою алгебраическую школу. Большое значение для развития математических исследований в Киеве имели труды Г. В. Пфейффера, занимавшегося теорией дифференциальных уравнений в частных производных, и В. П. Ермакова, старейшего члена-корреспондента Петербургской академии наук (с 1884 г.), одного из руководителей Киевского физико-математического общества.

Серьезное исследовательское направление в области математики создали ученые Новороссийского университета — В. А. Циммерман, Е. Л. Буницкий, В. Ф. Каган, С. О. Шатуновский и другие, развивавшие теорию дифференциальных и интегральных уравнений, геометрию, основания математики.

Старейший из русских университетов — Казанский продолжал традиции геометрических исследований. Его воспитанники в свою очередь продолжали эти традиции в других высших учебных заведениях. Д. М. Синцов, например, является одним из основателей харьковской геометрической школы, А. П. Котельников в Киеве занимался вопросами прикладной математики, связанными с геометрией. Значительную работу по постановке геометрических исследований в Казанском университете и по руководству Казанским физико-математическим обществом проводил воспитанник Новороссийского университета Д. Н. Зейлигер.

Как мы увидим далее, этот обмен научными силами, возросший после 1917 г., стал важным фактором расширения исследовательской тематики и создания новых математических школ.

Некоторое представление о математике как предмете преподавания накануне Октябрьской революции можно получить по документам Министерства народного просвещения. Во всей стране насчитывалось 11 университетов, в девяти из которых были физико-математические факультеты. Физико-математические факультеты были также на десяти высших женских курсах (из 22 с университетской программой), в том числе на Сибирских (в Томске) и Тифлиских высших женских курсах. Кафедры математики работали в 20 высших технических учебных заведениях и четырех военных академиях — морской, военно-инженерной, артиллерийской и интендантской. Вот, в сущности, и весь математический актив, который имела страна перед революцией <sup>5</sup>.

<sup>5</sup> ЦИА в Ленинграде, ф. 733, оп. 226, д. 261, Список высших учебных заведений всех ведомств.

Таким образом, основными центрами развития научно-исследовательской работы в области математики являлись университеты. Каждый физико-математический факультет имел, как правило, две математические кафедры — чистой математики и прикладной математики, вторая впоследствии была переименована в кафедру механики. В Петроградском университете перед Октябрьской революцией на кафедре чистой математики работали два ординарных профессора — Н. М. Гюнтер и В. А. Стеклов, один экстраординарный профессор — Я. В. Успенский, три внештатных профессора, пять приват-доцентов (в том числе академик А. А. Марков) и десять преподавателей. На кафедре механики был один ординарный профессор — Г. В. Колосов и два приват-доцента — И. В. Мещерский и П. О. Сомов.

Значительно большим был коллектив математиков Московского университета. Здесь кафедре чистой математики занимал ординарный профессор Д. Ф. Егоров, в состав кафедры входило два экстраординарных профессора — Н. Н. Лузин и А. К. Власов, три внештатных профессора, 16 приват-доцентов и десять преподавателей. На кафедре механики был один ординарный профессор — С. А. Чаплыгин, один внештатный профессор — Н. Е. Жуковский и четыре приват-доцента.

В Харьковском университете на кафедре чистой математики было три ординарных профессора — Д. М. Синцов, Ц. К. Русьян и А. П. Пшеборский; кафедру механики занимал Н. Н. Салтыков. Кроме того, математику читали четыре приват-доцента, в том числе С. Н. Бернштейн.

Кафедра математики Новороссийского университета состояла из семи преподавателей — ординарного профессора В. А. Циммермана, экстраординарного профессора И. Ю. Тимченко, внештатного профессора С. П. Ярошенко и четырех приват-доцентов — В. Ф. Кагана, С. О. Шатуновского и др. На кафедре механики работали два ординарных профессора — И. М. Занчевский и А. Билимович (Билимович позднее читал механику в Белградском университете), экстраординарный профессор Е. Л. Буницкий, приват-доценты Н. С. Васильев и М. А. Тихомандрицкий (заслуженный ординарный профессор Харьковского университета).

В Киевском университете на кафедре математики было два ординарных профессора — А. П. Котельников и Г. В. Пфейффер, три внештатных профессора — Д. А. Граве, Б. Я. Букреев и В. П. Ермаков, три приват-доцента (в том числе О. Ю. Шмидт) и три преподавателя. Кафедра механики состояла из ординарного профессора П. В. Воронца, внештатного профессора Г. К. Суслова и приват-доцента.

На кафедре математики в Казанском университете работали два ординарных профессора — Д. Н. Зейлигер и Н. Н. Парфентьев, внештатный профессор А. В. Васильев, четыре приват-доцента и четыре преподавателя, на кафедре механики — ординарный профессор Е. А. Болотов.

В Ростовском университете кафедра математики состояла из трех профессоров — Д. Д. Мордухай-Болтовского, В. И. Романовского и В. П. Вельмина; на кафедре механики был один ординарный профессор — Н. Н. Горячев.

В Юрьевском университете математику читали два ординарных профессора — П. П. Граве и В. Г. Алексеев, кафедру прикладной математики занимал экстраординарный профессор Л. С. Лейбензон.

На кафедре математики Пермского университета работал экстраординарный профессор А. С. Безикович.

Таково было положение на математических кафедрах в университетах в 1917 г. Великая Октябрьская социалистическая революция в корне изменила систему высшего образования в стране, цели и задачи творчества математиков. Изменилась география высшей школы, появились новые научные школы и направления. Советская математика является не просто продолжением русской дореволюционной математики, а качественно новым, высшим этапом ее развития.

### **3**

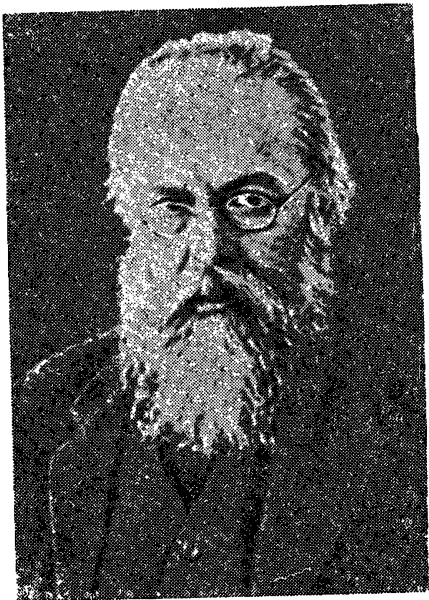
#### **Математика в Ленинграде в первые годы Советской власти**

Петроградские математики в первые годы после Великой Октябрьской социалистической революции в своей исследовательской работе продолжали развивать тематику, унаследованную ими от Чебышева и его непосредственных учеников, — главным образом теорию чисел, теорию приближения функций, математическую физику и теорию вероятностей.

В конце 1917 г. в Академии наук по специальности «математика» было три академика — А. А. Марков, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов и один член-корреспондент — В. П. Ермаков (Киев), по специальности «математическая физика» — академик А. Н. Крылов.

В 1918 г. безвременно скончался А. М. Ляпунов. Спустя два года (1920 г.) академиком был избран ученик А. А. Маркова Я. В. Успенский, занимавшийся, в основном, теорией чисел. Академия наук имела в своем составе единственное математическое учреждение — Математический кабинет им. П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова с богатейшей математической библиотекой. В 1921 г. на базе этого кабинета, а также других академических научных учреждений — Физической лаборатории, Постоянной сейсмической комиссии и Магнитной комиссии — был создан Физико-математический институт с двумя отделами — математическим и физическим. Директором института был избран В. А. Стеклов.

Роль В. А. Стеклова и значение его деятельности в организации советской науки неизмеримо велики. Один из первых ученых, отдавших все свои силы делу претворения в жизнь всех начинаний Советской власти, он активно включился в организационную работу в Академии наук. Будучи вице-президентом академии, он занимался буквально всеми сторонами академической жизни — от ремонта зданий и пополнения библиотеки до восстановления международных связей. Для установления контактов с зарубежными учеными ему пришлось объехать почти всю Европу. В 1924 г. Стеклов принял участие в работе Всемирного математического конгресса в Торонто (Канада) и был избран почетным доктором



В. А. Стеклов.

Торонтского университета. В октябре-ноябре 1925 г. он едет в Германию, Францию и Италию, участвует в качестве представителя Академии наук в праздновании столетнего юбилея Высшей технической школы в Карлсруэ, ведет переговоры с итальянским физико-математическим институтом о проведении совместных исследовательских работ в области математики. Одним из первых ученых Стеклов поднял вопрос об организации подготовки математиков. В 1924 г. при его участии был составлен учебный план математического отделения Ленинградского университета. «...Его часто обвиняли в резкости, — писал о Стеклове С. Ф. Ольденбург, — и он, несомненно, не умел и не хотел маскировать своего отрицательного отношения к дурным поступкам и к отрицательным качествам людей. „Мы, нижегородцы, — любил он

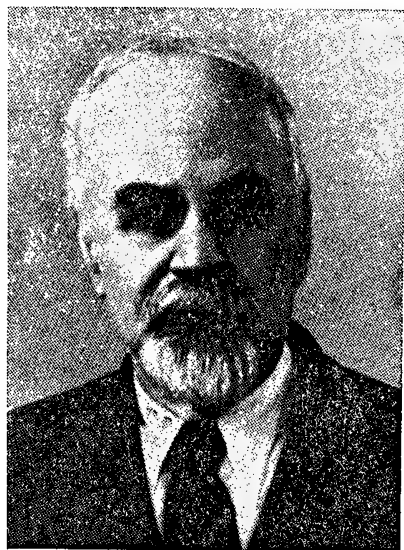
говорить, — не мягкие люди“. Но те, кто работал с ним и кто знал его ближе, хорошо помнят его большие заботы о людях и об учреждениях. Перегруженный работой, он всегда находил время помогать многим и советом, и всяким другим содействием... В. А. не любил бумажных потоков и бесконечных административных заседаний, главный результат которых — бесконечные, всеми чрезвычайно быстро забываемые протоколы. Стеклов был человек жизни и дела. Не любил мертвого контроля. Он говорил: „ты приди сам и посмотри, конечно, прибавлял он, если понимаешь что-нибудь в том, что должен осмотреть“<sup>6</sup>.

Естественно, что при такой большой организационно-хозяйственной нагрузке у Стеклова оставалось очень мало времени для научной работы. Однако с 1917 по 1926 г. он выполнил ряд работ фундаментального значения. Это двухтомная монография «Основные задачи математической физики», опубликованная в 1922—1923 гг., монография «Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений», опубликованная посмертно в 1927 г., и целая серия статей, посвященных приближению функций с помощью полиномов Чебышева. Не переставал работать Стеклов и будучи больным. В феврале 1926 г. во время пребывания в Казанском университете на юбилейных торжествах памяти Н. И. Лобачевского он заболел гриппом. Как и раньше, к врачам Стеклов не обратился. Надеясь на неистощимую выносливость своего организма, он продолжал работать. Однако огромное напряжение дало себя знать. В конце апреля этого же года у него открылся туберкулез и 30 мая его не стало.

В 1924 г. членами-корреспондентами Академии наук СССР были избраны С. Н. Бернштейн, Д. Ф. Егоров, Д. А. Граве, Н. М. Гюнтер,

<sup>6</sup> С. Ф. Ольденбург. Владимир Андреевич Стеклов. — Научный работник, 1926, № 5-6, стр. 5.

И. И. Иванов. Последние два — представители петербургской математической школы, профессора Ленинградского университета. Одновременно членом-корреспондентом Академии наук был избран выдающийся механик, ученик и сподвижник Н. Е. Жуковского С. А. Чаплыгин.



В. И. Смирнов.

Основные работы Н. М. Гюнтера относятся к математической физике и примыкают к исследованиям А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова. В 20-х годах Гюнтер занимался теоремами существования решений дифференциальных уравнений гидродинамики при некоторых предположениях на конечном промежутке времени. Большую известность получил он как автор руководств по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка, вариационному исчислению, теории потенциала. Вместе с Я. В. Успенским и другими учеными Гюнтер составил задачник, известный под названием задачника «десяти авторов». Задачник служил высшей школе более четверти века.

И. И. Иванов занимался теорией чисел. Его исследования можно разделить на два цикла: первый относится к теории идеалов и примыкает к трудам Е. И. Золотарева, второй посвящен вопросу о счете простых чисел. В последнем Иванов продолжил изыскания П. Л. Чебышева и Дирихле.

В первые же годы Советской власти была проведена реорганизация некоторых петроградских высших учебных заведений. В 1919 г. в состав Первого Петроградского университета были включены Второй Петроградский университет (психоневрологический институт) и Третий Петроградский университет (Высшие Бестужевские женские курсы).

Математику в университете преподавали А. А. Марков, Я. В. Успенский, Н. М. Гюнтер, И. И. Иванов, В. И. Смирнов, И. М. Виноградов, Г. М. Фихтенгольц, Б. Н. Делоне, Н. С. Кошляков, А. В. Васильев, Г. В. Колосов и др. Преподавание они сочетали с важными научными исследованиями в различных направлениях.

Я. В. Успенский, ученик Чебышева, занимался теорией чисел. Он передал традиции петербургской математической школы большой группе своих учеников — Р. О. Кузьмину, О. К. Житомирскому, А. М. Журавскому, Б. А. Венкову и др.

В 1917—1918 гг. в Петроградском университете были защищены три докторские диссертации по математике: Я. Д. Тамаркиным (1917 г.), В. И. Смирновым (1918 г.) и Г. М. Фихтенгольцем (1918 г.).

В. И. Смирнов, ученик В. А. Стеклова и А. А. Маркова, работал главным образом в области теории функций комплексного переменного и ее приложений и в 1925 г. организовал в Ленинградском университете





А. Н. Крылов.

кафедру по этой специальности. Особой заслугой Смирнова, а также Фихтенгольца является введение в 20-х годах в круг научных работ ленинградских ученых исследований по новым в то время разделам теории функций действительного переменного.

Г. М. Фихтенгольц, воспитанник Одесского университета, начал преподавание в Ленинградском университете в 1918 г. Его докторская диссертация посвящена теории функций действительного переменного. В этой области у него было в университете много учеников.

И. М. Виноградов по окончании Петербургского университета был оставлен для подготовки к профессорскому званию. С 1918 по 1920 г. работал в Пермском университете. В 1920 г. возвратился в Петербург и читал лекции в университете и политехническом

институте (до 1934 г.). Научное творчество Виноградова посвящено аналитической теории чисел. Его исследования непосредственно примыкают к петербургской школе теории чисел. Он является виднейшим ее представителем и в настоящее время. Им введены совершенно новые основополагающие методы, базирующиеся на оценках некоторых обобщенных тригонометрических сумм.

Б. Н. Делоне принадлежат исследования в области теории чисел, алгебры и геометрии, в частности вопросам математической кристаллографии.

В 1920 г. в Петроград вернулся из Перми А. А. Фридман (1888—1925). Он был избран преподавателем математики и механики Петроградского университета, одновременно работал старшим физиком в Главной физической обсерватории. Замечательный ученый, Фридман соединял в одном лице глубокого математика, механика и геофизика. В частности, в июле 1925 г. он совершил полет на аэростате, достигнув высоты 7400 м (это был рекорд для СССР).

К самому концу 20-х годов относится творчество И. А. Лаппо-Данилевского (1896—1931), ученика В. И. Смирнова. Он построил теорию аналитических функций от матриц, которую применил к основным проблемам аналитической теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Продолжал свои исследования в области приближенного численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений А. Н. Крылов. Несмотря на большую загрузку практической, инженерной и преподавательской работой, он находил время для научных математических занятий. В 1928 г. Крылов был избран директором Физико-математического института.

В 1920 г. в Педагогическом институте при университете по инициативе профессора А. В. Васильева, занимавшегося в эти годы главным об-

разом вопросами истории математики, был организован математический кружок. В 1921 г. этот кружок был реорганизован в Петербургское физико-математическое общество. Основной целью общества являлось содействие научному общению всех лиц, интересующихся математикой и математическим естествознанием. Педагогическая секция содействовала сближению педагогов средних школ города с математиками вузов. Председателем общества был избран А. В. Васильев.

В течение первых двух лет существования кружка-общества на его заседаниях было сделано значительное количество сообщений (Я. Д. Тамаркиным, Е. Л. Николаи, Н. М. Гюнтером, А. А. Саткевичем и другими учеными). В частности, очевидно в связи с научными интересами председателя общества, было прочитано несколько докладов по истории математики: Н. Я. Перном — «Новый метод изучения истории культуры», Д. П. Цинзерлингом — «Математика у древних египтян», В. Г. Богоразом — «Развитие понятия о числе» и др. Спустя некоторое время председателем стал профессор Н. М. Гюнтер. С 1924 по 1929 г. общество издавало свой журнал.

В 1924 г. в Ленинграде было основано Общество ревнителей математического образования (председателем его был профессор С. А. Богомолов, работавший в области геометрии и истории математики). На заседаниях этого общества зачитывались сообщения научно-методического характера, а также обзорные сообщения по ряду научных вопросов.

#### 4

#### Математика в Москве

В середине 20-х годов в народном хозяйстве нашей страны заканчивался восстановительный период, и, естественно, вопросы практической применимости результатов теоретических исследований приобретали весьма актуальное значение.

Коммунистическая партия и Советское правительство наметили мероприятия для дальнейшего развития промышленности и сельского хозяйства. В качестве первоочередной задачи была выдвинута индустриализация страны. Математики Ленинграда, Москвы и других городов активно включились в решение новых задач развития народного хозяйства, науки и культуры и, наряду с продолжением исследований по большим теоретическим проблемам, разрабатывали вопросы прикладного характера, имеющие важное значение для внедрения в производство тех или иных результатов непосредственно или через смежные области науки.

В 1925 г. закончилось в общих чертах восстановление промышленности. Валовая продукция достигла к этому году 73% выработки 1913 г. При этом социалистическому сектору принадлежало уже не менее 50% основных хозяйственных фондов страны. 18 декабря 1925 г. открылся XIV съезд ВКП(б), который указал, что основным, решающим звеном построения социалистического общества является индустриализация страны. Съезд поручил Центральному Комитету ВКП(б) «вести экономическое строительство под таким углом зрения, чтобы СССР из страны, ввозящей

машины и оборудование, превратить в страну, производящую машины и оборудование, чтобы таким образом СССР в обстановке капиталистического окружения отнюдь не мог превратиться в экономический придаток капиталистического мирового хозяйства, а представлял собой самостоятельную экономическую единицу, строящуюся по-социалистически и способную, благодаря своему экономическому росту, служить могучим средством революционизирования рабочих всех стран и угнетенных народов колоний и полуколоний»<sup>7</sup>.

В декабре 1927 г. состоялся XV съезд ВКП(б), на котором председатель ВСНХ СССР В. В. Куйбышев сформулировал основные принципы, положенные в основу составления первого пятилетнего плана народного хозяйства. К этим принципам относились повышение темпов развития социалистического хозяйства, которые должны были опережать темпы развития экономики капиталистических стран, повышение удельного веса социалистического сектора в стране, создание техники для перевооружения кооперированного сельского хозяйства, всемерное укрепление обороноспособности страны, пропорциональное развитие всех отраслей народного хозяйства.

Результаты решений съезда не заставили себя долго ждать. Уже к 1928 г. было развернуто большое строительство: только за один 1927/28 хозяйственный год в промышленность было направлено средств больше, чем за три последних года восстановительного периода. Усовершенствовано было руководство промышленностью. В результате всех мероприятий уровень развития промышленности к 1928 г. был не только доведен до довоенного, но и значительно превзойден в ряде отраслей промышленности. Тогда же пристальное внимание было направлено на вопрос воспитания кадров, без которых немислима дальнейшая творческая созидательная работа. Проводились организационные мероприятия. Некоторые высшие технические учебные заведения были переданы из ведения Наркомпроса в подчинение ВСНХ: из ленинградских вузов — Технологический институт, а из московских — МВТУ, Московская горная академия, Московский химико-технологический институт им. Д. И. Менделеева, Московский текстильный институт и Электромеханический институт им. Я. Ф. Каган-Шабая. Примечательно, что из этих высших учебных заведений только Ленинградский технологический институт и МВТУ были основаны до Великой Октябрьской социалистической революции, все же остальные — в годы Советской власти.

Великая Октябрьская социалистическая революция не только изменила социальный состав вузов и научных учреждений, но и принесла в науку новую тенденцию — коллективность творческой работы. Новые организационные формы науки — научно-исследовательская кафедра, научно-исследовательский институт, семинар — в значительной степени повлияли на тематику исследований московской математической школы.

В Москве находится старейший из отечественных университетов и один из ведущих технических вузов страны Московское высшее техническое училище, в котором математическое образование инженеров

---

<sup>7</sup> КПСС в резолюциях. Ч. 2, стр. 195.

поставлено весьма высоко. Характерно, что многие профессора МВТУ (и некоторых других технических вузов страны), читавшие технические предметы, были воспитанниками университета, а затем МВТУ. В этом слиянии глубокого математического и технического образования проявилась особая заслуга школы Н. Е. Жуковского, преподававшего в обоих высших учебных заведениях.

Зарождение современной московской математической школы относится к началу XX в. Создателями ее являются Д. Ф. Егоров и его ученик Н. Н. Лузин. Работа Егорова о последовательностях измеримых функций (1911 г.), как указывает П. С. Александров, «послужила началом бурного развития в Москве метрической теории функций действительного переменного. Доказанная в этой работе классическая теорема Егорова („всякая сходящаяся почти всюду последовательность измеримых функций сходится равномерно на замкнутом множестве, дополнение к которому имеет сколь угодно малую меру“) в некоторой степени подготовила открытие Н. Н. Лузиным так называемого „С-свойства“ („всякая измеримая функция непрерывна на множестве, дополнение к которому имеет сколько угодно малую меру“), за которым последовала, как известно, целая цепь выдающихся результатов Н. Н. Лузина и его учеников по метрической теории функций, приведшая к созданию одной из самых значительных школ Московского университета — московской школы теории функций»<sup>8</sup>.

В послереволюционные годы московской математической школой руководил Н. Н. Лузин, занимавшийся в это время исключительно метрической и дескриптивной теорией функций. Заслуга его в деле создания школы велика. Он не только руководил конкретными исследованиями своих учеников, но и приобщал их к современной математике, прививал им высокую математическую культуру. «Богатство творческих идей Н. Н. Лузина было столь велико, что почти каждое общение с ним служило для его учеников источником новых задач и неожиданных размышлений. Лекции Н. Н. Лузина, лишенные внешнего блеска и ораторских приемов, захватывали аудиторию своей творческой напряженностью. Лузин обладал необыкновенным искусством, излагая математический результат, заставлял аудиторию как бы участвовать в самом процессе его получения, превращая лекцию в какую-то своеобразную лабораторию математической мысли»<sup>9</sup>.



Н. Н. Лузин.

<sup>8</sup> П. С. Александров. Математика в Московском университете в первой половине XX века. — Ист.-мат. исслед. Вып. 8. Физматгиз, М., 1955, стр. 14.

<sup>9</sup> Там же, стр. 19.

Первые годы после революции Н. Н. Лузин работал в Иваново-Вознесенском политехническом институте, но уже в 1920 г. возвратился в Москву и в 1920—1923 гг. проводил свои семинары, пользовавшиеся большим успехом.

Роль организации, объединявшей всех московских математиков и представлявшей собой своего рода специализированную по математическим знаниям академию наук, играло Московское математическое общество, работой которого руководили в 20-х годах после смерти Н. Е. Жуковского Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин. Кроме того, в 1922 г. был организован научно-исследовательский институт математики и механики при Московском университете, директором которого был назначен Д. Ф. Егоров. Творческую группу московских математиков в начале 20-х годов составляли Д. Ф. Егоров, Н. Н. Лузин и ученики Егорова — И. И. Привалов, В. В. Голубев, В. В. Степанов, И. Г. Петровский — и Лузина — Д. Е. Меньшов, А. Я. Хинчин, П. С. Александров, М. Я. Суслин, П. С. Урысон, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник, Н. К. Бари, В. И. Гливенко и др.

Московская математическая школа отличалась от Ленинградской (Петербургской) и по происхождению и по характеру исследований в рассматриваемый период. В известном выступлении на юбилейном заседании Московского математического общества Л. А. Люстерник отметил: «Ленинградская школа унаследовала высокую аналитическую культуру идущего от П. Л. Чебышева алгебраического анализа и аналитическое мастерство А. М. Ляпунова. В московской же школе теории функций выработалась другая „математическая техника“ — геометрических и других элементарных конструкций, на которые накладывался усложняющий предельный переход, виртуозность таких конструкций высоко оценивалась...»<sup>10</sup>. Кроме того, «своеобразное положение московской школы теории функций действительного переменного в истории советской математики заключается не только в том, что с ее возникновением начинается новый период развития математики в Московском университете, но не в меньшей степени в том, что почти все другие университетские математические школы вышли, как бы „отпочковавшись“ от нее. В первую очередь это относится к топологии и к теории вероятностей»<sup>11</sup>.

Топология была одним из первых направлений, созданных московской математической школой при помощи развития методов теории функций действительного переменного. Основы этого направления в СССР заложили П. С. Урысон и П. С. Александров. В своих работах, публиковавшихся с 1922 г., но написанных значительно ранее, Урысон приступил к разработке теории размерности. Результатом плодотворного сотрудничества П. С. Урысона и П. С. Александрова явилось создание нового направления — теоретико-множественной топологии. Ими построена теория счетно-компактных пространств. Сотрудничество это было прервано неожиданной смертью П. С. Урысона (погиб в 1924 г. во время купания).

<sup>10</sup> Л. А. Люстерник. Выступление на юбилейном заседании Московского математического общества. — Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 3(123), стр. 29.

<sup>11</sup> П. С. Александров. Математика в Московском университете в первой половине XX века, стр. 30.

П. С. Александров успешно продолжил топологические исследования. Он создал теорию бикомпактных пространств (компактных, по новой терминологии). В его работах 1926—1930 гг. заложены основы комбинаторной топологии точечных множеств, включающей гомологическую теорию размерности. В 1925 г. П. С. Александров организовал в Московском университете топологический семинар (один из первых семинаров), ставший организационным центром научных исследований в области топологии. В этом семинаре начали свою научную работу А. Н. Тихонов, Л. А. Тумаркин, Л. С. Понтрягин и некоторые другие ученики П. С. Александрова. Понтрягин, продолжая исследования своего учителя, решил задачу о размерности произведения компактов. Им найден и доказан закон двойственности для компактов. В начале 20-х годов П. С. Александров читал курс лекций в Смоленском университете. Здесь его учеником стал А. Г. Куроп.



А. Я. Хинчин.

Другим направлением московской математической школы была теория вероятностей. В 1923 г. ею занялся А. Я. Хинчин (1894—1959). Первые его работы в этой области примыкали к его же работам по метрической теории функций и были посвящены точной оценке роста сумм независимых слагаемых в схеме Бернулли. Приблизительно в эти же годы Хинчин начал заниматься некоторыми вопросами теории чисел, также исходя из понятий метрической теории функций, в частности проблемами метрической теории непрерывных дробей и вообще диофантовых приближений. В 1925—1926 гг. он организовал в Московском университете научный семинар по аналитической теории чисел, в котором участвовали А. О. Гельфонд, Л. Г. Шнирельман и др.

Теорию функций комплексного переменного в 20-х годах разрабатывал И. И. Привалов (1891—1941). Его диссертация «Интеграл Cauchy», опубликованная в 1918 г. в «Известиях Саратовского университета», содержала, по словам П. С. Александрова, «результаты, далеко опередившие все, что в этой области в те годы делалось в Западной Европе», где она стала известной лишь через несколько лет после опубликования. Значительная доля результатов получена в совместной работе И. И. Привалова и Н. Н. Лузина. Привалов и Лузин исследовали граничные задачи теории аналитических функций, применяя методы теории функций вещественного переменного. В области теории функций комплексного переменного вели исследования также Д. Е. Меньшов, А. Я. Хинчин, В. В. Голубев и др.

Д. Е. Меньшов, один из первых учеников Н. Н. Лузина, с конца 1918 г. работал в Иваново-Вознесенском политехническом институте, а затем, в 1919—1920 гг., в Нижегородском университете. В 1920 г. он

Д. Е. Меньшов, один из первых учеников Н. Н. Лузина, с конца 1918 г. работал в Иваново-Вознесенском политехническом институте, а затем, в 1919—1920 гг., в Нижегородском университете. В 1920 г. он



М. А. Лаврентьев.

возвратился в Иваново, а в 1922 г. переехал в Москву. В Московском университете Меньшов читал почти все математические курсы.

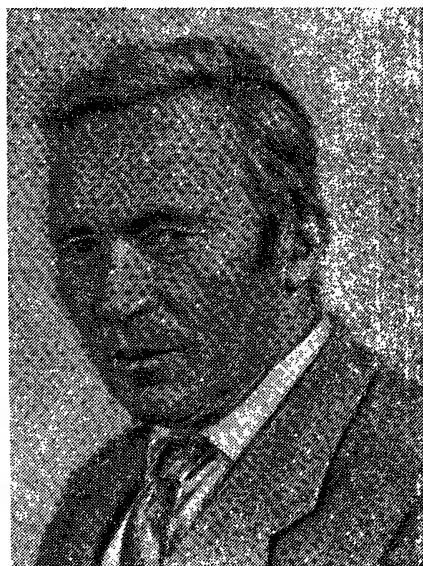
Д. Е. Меньшов занимался исследованиями в области метрической теории функций. Разрабатывал теорию тригонометрических рядов в направлении дальнейшего развития идей, заложенных в диссертации Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд». Ему принадлежат замечательные результаты по проблеме единственности разложения функции в тригонометрический ряд.

В 1922 г. в аспирантуру к Н. Н. Лузину поступил М. А. Лаврентьев. Его первые работы (1924—1925 гг.) относились к дескриптивной теории множеств. С 1925 г. интересы Лаврентьева все более и более перемещаются в область теории функций комплексного переменного, где им получены многие результаты основополагающего значения. В 1927 г. он начал большой цикл исследований по проблеме соответствия границ при конформных отображениях.

К старшим ученикам Лузина принадлежит также Л. А. Люстерник, поступивший в 1922 г. в аспирантуру при Институте математики и механики МГУ. Уже тогда определились его научные интересы. Вместе с Л. Г. Шнирельманом он создал новое направление, характеризующееся внедрением топологических методов в классические области анализа и геометрии, особенно в задачах вариационного исчисления.

Из группы учеников Лузина вопросами теории функций действительного переменного занимались А. Н. Колмогоров, Н. К. Бари и др. В частности, в работе А. Н. Колмогорова об операциях над множествами (выполненной в 1921 г., но опубликованной в «Математическом сборнике» лишь в 1928 г.) дескриптивная теория множеств получила принципиально новое развитие, продолженное Л. В. Канторовичем, Хаусдорфом, А. А. Ляпуновым и др.

Исследования по современной алгебре в Московском университете начались в 1920 г., с приходом О. Ю. Шмидта, одного из первых учеников Д. А. Граве по Киевскому университету. О. Ю. Шмидт занимался теорией групп, по которой и организовал в Московском университете семинар.



А. Н. Колмогоров.



В области дифференциальных уравнений в Московском университете работал В. В. Степанов. Основные его результаты за эти годы относятся к теории функций вообще и к почти периодическим функциям в частности. Эти исследования привели к созданию нового направления в качественной теории дифференциальных уравнений.

Геометры Московского университета С. С. Бюшгенс (1882—1963) и С. П. Фиников (1889—1964) в послереволюционные годы в определенной степени продолжали традиции ученых старшего поколения — Б. К. Млодзеевского и Д. Ф. Егорова. Главные работы Млодзеевского были посвящены дифференциальной геометрии и продолжали направление, начало которому положил К. М. Петерсон. Егоров после Октябрьской революции занимался исследованием дифференциальной геометрии и теорией интегральных уравнений. Ему принадлежат первые советские учебники по дифференциальной геометрии, теории чисел и вариационному исчислению.



С. А. Чаплыгин.

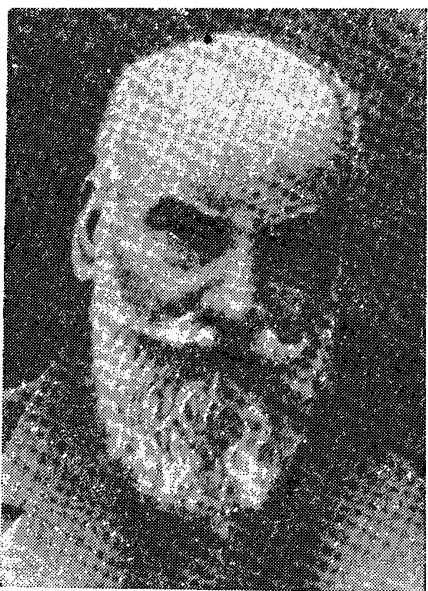
В 1923 г. в Москву из Одессы переехал специалист в области оснований геометрии В. Ф. Каган. Он развил в университете направления многомерной дифференциальной геометрии и тензорного анализа, организовал (1927 г.) семинар по тензорному исчислению, пользовавшийся большой популярностью. В 1923 г. Каган впервые в университете прочел курс тензорного анализа и римановой геометрии. Этот курс слушали, в частности, впоследствии известные физики А. А. Андронов и М. А. Леонтович. В первые же годы работы в Московском университете Каган начал читать курс оснований геометрии, в значительной части посвященный геометрии Лобачевского.

Преподавание и научную работу в области проективной геометрии продолжали вести К. А. Андреев и А. К. Власов, автор известных учебников по высшей математике. «А. К. Власов был талантливым и самобытным геометром, лекции которого по проективной геометрии производили большое впечатление даже на тех слушателей, которые не специализировались в области проективной геометрии. Среди этих слушателей назовем П. С. Урысона и А. Н. Колмогорова, которым лекции А. К. Власова не только дали основательные знания, но и пробудили в них постоянный интерес к проективной геометрии»<sup>12</sup>.

Следует отметить еще одну отрасль математики, развивавшуюся в университете в 20-х годах, — математическую логику. Важные результаты в этой области были получены А. Н. Колмогоровым. Ранее матема-

<sup>12</sup> П. С. Александров. Математика в Московском университете в первой половине XX века, стр. 16—17.





Н. Е. Жуковский.

тического логикой занимались И. И. Жегалкин, один из старейших профессоров университета, и В. И. Гливенко.

Историей математики в первые годы Советской власти в Московском университете занимался В. В. Бобынин, заложивший основы истории отечественной математики, а также работавший в других ее областях. В самом конце рассматриваемого периода с первыми работами по истории математики выступили М. Я. Выгодский и С. А. Яновская.

Все упомянутые выше исследования проводились на кафедрах, учрежденных в 20-х годах в результате разделения кафедры чистой математики. Кафедрой прикладной математики, или механики, продолжал руководить С. А. Чаплыгин. Кроме исследований в области гидроаэродинамики он занимался вопросами приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Н. Е. Жуковский в первые же послереволюционные дни приступил к реорганизации научно-исследовательской работы в области механики. 1 декабря 1918 г. был учрежден Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), во главе с Н. Е. Жуковским. Для подготовки инженеров авиации по его инициативе в 1920 г. на базе авиационного техникума был создан первый в стране Институт инженеров Красного Воздушного Флота. Ректором института был Жуковский. В 1922 г. институт преобразован в Военно-Воздушную Академию им. Н. Е. Жуковского.

Итак, в 20-х годах исследования в области математики, проводившиеся в Московском университете, в качественном отношении оказались на совершенно иной ступени, чем предреволюционные работы. Были заложены основы мощного коллектива московской математической школы, впервые широко введены методы коллективной работы в виде специальных семинаров и значительно расширена тематика научных исследований, в основном за счет новых разделов математики. Московский университет может служить ярким примером могучего взлета науки уже в первые годы Советской власти.

Исследования математиков, работавших в других московских высших учебных заведениях, примыкали, главным образом, к тематике работ ученых Московского университета.

В 1924 г. в Москву из Киева переехал А. П. Котельников, занимавшийся вопросами неевклидовой геометрии Лобачевского и кинематической геометрии. Он был избран заведующим кафедрой математики в МВТУ.

С 1920 г. в Тимирязевской сельскохозяйственной академии читал лекции ученик В. Ф. Кагана Я. С. Дубнов (1887—1957). В результате деятельности учеников Н. Е. Жуковского по университету и по МВТУ

В. П. Горячкина и Н. И. Мерцалова в академии были заложены основы двух мощных советских школ в области прикладного знания — земледельческой механики (В. П. Горячкин) и теории механизмов и машин (И. И. Артоболевский).

## Б

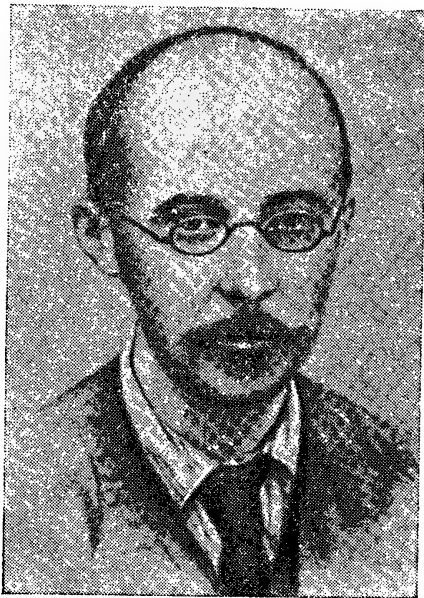
### Развитие математики в других вузовских центрах РСФСР

Выше отмечалось, что после Великой Октябрьской социалистической революции сразу начала изменяться география высших учебных заведений в стране. Многие новые институты в дальнейшем послужили базой для создания научных школ и направлений. Рассмотрим историю развития математики в основных вузовских центрах РСФСР в 20-е годы.

В старейшем после Московского Казанском университете в годы, непосредственно предшествовавшие революции, на кафедре чистой математики было два ординарных профессора — Д. Н. Зейлигер и Н. Н. Парфентьев. Зейлигер, ученик В. Н. Лигина по Новороссийскому университету, в 1917 г. возглавил Казанское физико-математическое общество. В эти годы он занимался комплексной геометрией линейчатого пространства. Воспитанник Казанского университета, ученик А. В. Васильева, Н. Н. Парфентьев в послереволюционные годы приложил много усилий к организации научной и педагогической работы в университете. С 1918 г. он декан физико-математического факультета, читает целый ряд курсов, в том числе несколько спецкурсов. Его учениками были впоследствии профессора университета В. А. Яблоков, П. А. Широков и Б. М. Гагаев.

Исследования В. А. Яблокова относятся к области дифференциальной и  $n$ -мерной геометрии. П. А. Широков (1895—1944) изучал вопросы неевклидовой геометрии Лобачевского и риманову геометрию. Б. М. Гагаев занимался исследованием дифференциальных и интегральных уравнений, а также теории функций.

Остановимся на деятельности математиков Донского (Северо-Кавказского, ныне Ростовского) университета. В 1915 г. в Ростов-на-Дону был эвакуирован Варшавский университет, который в 1917 г. был переименован в Донской, а в 1925 г. — в Северо-Кавказский. Положение университета в первые послереволюционные годы было крайне тяжелым. Во время хозяйничанья белогвардейцев в Донской области почти полностью прекратились учебные занятия. Для проведения занятий оставались лишь тесные, непригодные и неотапливаемые помещения, так как основные здания университета были заняты белогвардейскими частями. Только с января 1920 г., когда в Ростове-на-Дону была восстановлена Советская власть, начала налаживаться научная и педагогическая работа в университете. Постепенно изменялся и социальный состав студенчества. Рабочий факультет, открытый в 1920 г., обеспечил к 1924 г. до 30% принятых на первый курс студентов. В 1922 г. в составе университета открылся педагогический факультет, к которому в 1924 г. был присоеди-



А. А. Фридман.

нен и физико-математический факультет. Для подготовки научно-исследовательских и педагогических кадров в 1924 г. при университете был открыт Научно-исследовательский физико-математический институт с тремя математическими кафедрами — анализа, алгебры и теории чисел — и аспирантурой.

Кафедра чистой математики университета состояла из двух профессоров — Д. Д. Мордухай-Болтовского и В. П. Вельмина. Некоторые математические курсы читал также профессор механики Д. Н. Горячев.

Д. Д. Мордухай-Болтовской читал очень много курсов. Научные интересы его были весьма разносторонни. Он читал аналитическую, начертательную, проективную, неевклидову, синтетическую геометрию, историю и методику математики, ма-

тематическую логику, а также теорию функций. Мордухай-Болтовской руководил одногодичными курсами для переподготовки преподавателей, которые в дальнейшем были преобразованы в коллоквиум по истории и методике математики, получивший значение общегородского научно-методического центра.

В. П. Вельмин читал, как правило, высшую алгебру, теорию чисел, теорию Галуа, арифметику в квадратичных областях, а также различные курсы анализа.

В конце 20-х годов Северо-Кавказский университет служил базой для создания на Северном Кавказе новых высших учебных заведений.

Последним в дореволюционные годы — в 1916 г. — был открыт Пермский университет, как филиал Петербургского университета. В 1917 г. он получил полную самостоятельность.

После установления в Перми Советской власти университет начал быстро развиваться. Открылся физико-математический факультет с хорошим математическим кабинетом, а также механической лабораторией, для которой был выделен двухэтажный фабричный корпус. Математику читал А. С. Безикович. В начале 1918 г. в университет пришли И. М. Виноградов, Р. О. Кузьмин, А. А. Фридман, А. Ф. Гаврилов. В конце лета 1918 г. было основано Пермское физико-математическое общество, сразу начавшее издавать свой журнал.

Во время захвата Перми колчаковцами, в 1919 г., университет был разрушен и частично перевезен в Томск. В спасении имущества физико-математического факультета значительную роль сыграл А. С. Безикович. После освобождения Перми благодаря усилиям А. С. Безиковича и А. А. Фридмана, а также весьма действенной помощи В. А. Стеклова университет был восстановлен в составе трех факультетов: физико-математического, медицинского и сельскохозяйственного. В 1920 г. к ним

прибавились химико-металлургический, инженерно-строительный и электромеханический факультеты.

Пермский университет был первым высшим учебным заведением на Урале. Даже в Екатеринбурге (Свердловске), несмотря на большое хозяйственное и культурное значение, которое он имел для развития Урала, до 1917 г. не было ни одного вуза. Декрет об открытии Уральского университета в Свердловске подписал В. И. Ленин. Подобно Пермскому, Уральский университет организовывался по совершенно новой структуре, не похожей на стандартное деление на четыре факультета — физико-математический, историко-филологический, юридический и медицинский, — установившееся еще в XIX в. С 1920 по 1922 г. университет работал в составе горного, политехнического и других институтов, преобразованных в 1922 г. в факультеты. В 1924 г. медицинский факультет был переведен в Пермь, а в следующем году технические факультеты университета преобразованы в Уральский политехнический институт. Лекции по математике в университете, а затем в политехническом институте читал выпускник Казанского университета Н. П. Горин, исследования которого относятся к области дифференциальной и неевклидовой геометрии.



В. В. Голубев.

До революции на всем Поволжье было два университета — старейший Казанский и открытый в 1909 г. Саратовский. Саратовский университет, однако, до 1917 г. имел всего один факультет — медицинский, несмотря на то что общественность города все время ставила перед Министерством народного просвещения вопрос об открытии физико-математического факультета. Последний был открыт лишь в 1917 г.

В конце 1917 г. ординарным профессором Саратовского университета по кафедре чистой математики был избран приват-доцент Московского университета В. В. Голубев (1884—1954). Голубев проводил большую научную и педагогическую работу. В 1918—1922 гг. он также был деканом физико-математического факультета, проректором и ректором университета. Основные работы Голубева, относящиеся к 20-м годам, посвящены проблемам теории функций комплексного переменного и ее приложений. В университете Голубев читал несколько общих и специальных курсов, главным образом по своему основному научному направлению. С 1921 по 1930 г. он преподавал также в Саратовском институте сельского хозяйства и мелиорации общий курс математики и математическую статистику.

Одновременно с В. В. Голубевым в качестве экстраординарного профессора по кафедре чистой математики был избран И. И. Привалов, работавший в университете до осени 1921 г. С 1923 по 1925 г. профессором

кафедры математики была Л. Н. Запольская. С января 1919 г. в Саратовском университете преподавал также Г. Н. Свешников, в 1920 г. принявший на себя заведование кафедрой механики. Он читал общий курс механики, высшую алгебру, уравнения математической физики и интегральные уравнения. В 1923 г. начал преподавание в университете ученик Голубева П. П. Боев, занимавшийся теорией функций.

Летом 1918 г. был открыт университет в Нижнем Новгороде (ныне Горьковский), на базе эвакуированного во время войны Варшавского политехнического института. Вначале университет состоял из десяти факультетов: математического, механического, горнотехнического, электротехнического, инженерно-строительного, химического, агрономического, биологического, профессионального, рабоче-энциклопедического. Затем число факультетов сократилось, а в марте 1920 г. к университету был присоединен в качестве факультета педагогический институт. На педагогическом факультете университета кафедру математики занял И. Р. Брайцев (1870—1947), занимавшийся теорией аналитических функций. В 1919—1920 гг. математические курсы в университете читал Д. Е. Меньшов.

В первые же годы после революции началась научная работа в Иваново-Вознесенском политехническом институте и Воронежском университете. В 1915 г. в Москву, а оттуда в Иваново-Вознесенск (Иваново) был эвакуирован Рижский политехнический институт. В 1918 г. часть профессоров института вернулась в Ригу, часть же совместно с обществом рижских политехников образовала инициативную группу для организации Иваново-Вознесенского политехнического института. Первое собрание совета института состоялось в октябре 1918 г. Ректором был избран специалист в области деталей машин профессор Н. М. Берлов. Вскоре его сменил механик А. И. Некрасов.

Преподавание математики в Иваново-Вознесенском политехническом институте было поставлено на должную высоту. С 1918 по 1926 г. различные математические курсы читал А. Я. Хинчин. В эти же годы он опубликовал в «Известиях Политехнического института» и некоторых других журналах статьи по теории чисел и метрической теории множеств. С 1919 по 1921 г. в институте преподавал Н. Н. Лузин, а с 1920 по 1922 г. — Д. Е. Меньшов. Часть математических курсов читал также В. С. Федоров, специализировавшийся в области теории аналитических функций.

В 1918 г. на базе эвакуированного Юрьевского (Дерптского) университета был открыт университет в Воронеже. Главной задачей физико-математического факультета университета являлась подготовка педагогических кадров для средней школы.

Математику читали В. Г. Алексеев, первый ректор университета, П. П. Граве. В 1920 г. кафедру математики возглавил А. К. Сушкевич. Научные исследования Сушкевича были посвящены теории групп. В Воронеже он работал до 1929 г.

В 1924 г. физико-математический факультет был слит с педагогическим (открытым в 1921 г.).

Сибирь до революции обслуживали Томский технологический институт, Томский университет и открытые позднее Сибирские высшие

женские курсы с физико-математическим факультетом. В первые же послереволюционные годы были основаны политехнический и сельскохозяйственный институты в Омске, университет в Иркутске и политехнический институт (а затем университет) во Владивостоке. В Томском университете, частично на базе Высших женских курсов, был открыт физико-математический факультет.

На физико-математическом факультете Томского университета в 1918 г. были созданы две математические кафедры: чистой математики и механики (теоретической и практической). На кафедру чистой математики были приглашены из технологического института Ф. Э. Молин, работавший в области алгебры, и из Донского университета приват-доцент М. Ф. Субботин. Несколько позже пришел в университет В. А. Малеев. В 1926 г. на физико-математическом факультете был создан отдельный цикл со специальностями математики, астрономии и геодезии.

Иркутский университет основан в октябре 1918 г. Первые годы ему пришлось работать в крайне трудных условиях: не было ни соответствующих помещений, ни научно-педагогических кадров, ни научно-вспомогательных учреждений. Лишь после окончания гражданской войны университет начал разворачивать свою работу. Физико-математический факультет в 1922 г. был слит, на правах отделения, с педагогическим факультетом.

В Дальневосточном университете, в состав которого в 1923 г. как политехнический факультет вошел Дальневосточный политехнический институт, почти все математические курсы читал Н. А. Агрономов (1886—1929), с 1923 г. заведовавший кафедрой математики.

Нами рассмотрено развитие математики в университетах РСФСР. Другие высшие учебные заведения РСФСР в рассматриваемый период не были в достаточной степени обеспечены преподавательскими кадрами и лишь со временем наладили свою научную и педагогическую деятельность. В связи с этим, а также с некоторой недооценкой значения теоретических наук для технического развития летом 1922 г. физико-математические факультеты части университетов, как не имеющие конкретной практической установки, были преобразованы в педагогические, основной задачей которых являлась подготовка преподавателей для средней школы. Физико-математические факультеты были оставлены лишь в четырех университетах РСФСР — Московском, Ленинградском, Казанском и Томском, однако с довольно ограниченными штатами. Наибольший по количеству студентов 1-й Московской государственный университет (на базе Высших женских курсов после 1917 г. был открыт 2-й МГУ, впоследствии слитый с первым) в 1926 г. выпустил по специальности «математика» 21, а по специальности «механика» — лишь 1 чел. Впрочем, некоторые университеты, как показано выше на примере Ростовского-на-Дону университета, сумели сохранить высокий уровень научной работы и на педагогических факультетах, которые, таким образом, явились промежуточным звеном между возникшими позднее — в начале 30-х годов — педагогическими институтами и восстановленными в конце 20 — начале 30-х годов физико-математическими факультетами.

Изменялись и методы преподавания. Так, ректорское совещание в октябре 1924 г. установило, что наиболее отвечающим требованиям высшей школы методом преподавания был лабораторно-групповой метод. Сущность его заключалась в том, что студенты изучали научный материал не в виде «пассивного» восприятия преподносимой профессором с кафедры лекции, а путем самостоятельной работы аудитории над этим материалом по данному профессором списку вопросов или тем и беседы его с группой по этому материалу<sup>13</sup>. Обычно это были самостоятельные занятия групп студентов по определенным книгам и руководствам в учебных аудиториях, где роль преподавателя сводилась к консультации. Этот и подобные методы и способы на практике оказались недолговечными, они не особенно охотно принимались математическими коллективами и вскоре были полностью отброшены.

## 6

### Математика в Украинской ССР

Положение с высшим образованием и наукой на Украине в 20-х годах значительно отличалось от положения научно-педагогической работы в РСФСР в этот период. Австро-немецкая интервенция, Центральная рада, гетьманщина, интервенция со стороны стран Антанты, Директория, белогвардейщина Деникина и Врангеля, белополяки и бесконечные рейды многих бандитских главарей районного и губернского калибра, кончая разбойничьей шайкой Махно, — все это, естественно, не давало возможности восстановить научную жизнь в Украинской Советской Социалистической Республике в первые же послереволюционные годы.

Фактом огромного значения явилась организация ВУАН — Всеукраинской академии наук в Киеве. В 1918 г. группа ученых во главе с В. И. Вернадским разработала проект организации Академии наук. Однако лишь в начале 1919 г., после освобождения Киева советскими войсками от контрреволюционных властей, она была официально открыта в составе трех отделений: историко-филологического, физико-математического и социально-экономического. Первым президентом академии был избран В. И. Вернадский.

В числе первых украинских академиков были видные математики Д. А. Граве, Г. В. Пфейффер, Н. М. Крылов.

Д. А. Граве переехал в Киев в 1900 г. Здесь он создал алгебраическую школу, из которой вышло или к которой идейно примыкает большинство советских алгебраистов. Кроме алгебры Граве в 20-х годах занимался теорией чисел, теорией дифференциальных уравнений, а также некоторыми вопросами механики и прикладной математики.

Одним из учеников Д. А. Граве является Ю. Д. Соколов, с 1921 г. принимавший участие в семинаре, руководимом Граве. Его исследования в области небесной механики вылились позднее (1928 г.) в докторскую

---

<sup>13</sup> Научный работник, 1925, кн. 1, стр. 225.

диссертацию «Условия общего соударения трех тел, взаимно притягивающихся по закону Ньютона».

Г. В. Пфейффер работал в Киевском университете, как и Д. А. Граве, с 1900 г. Научные интересы его в основном относились к теории дифференциальных уравнений в частных производных. До разделения математической кафедры Пфейффер руководил в университете кафедрой чистой математики на правах ординарного профессора.

Н. М. Крылов по переезде в 1922 г. из Симферополя в Киев занял в Академии наук кафедру математической физики. Исследования его были посвящены в основном теории уравнений математической физики. С 1923 г. его учеником стал Н. Н. Боголюбов.

Н. Н. Боголюбов окончил в 1921 г. семилетнюю трудовую школу в с. Великая Круча Полтавской области, после чего самостоятельно изучал математику и физику. Несколько месяцев он занимался под руководством Д. А. Граве, а затем, с 1923 г. — Н. М. Крылова. В 1924 г. решением Наркомпроса УССР Боголюбов в возрасте 15 лет, в порядке исключения, был утвержден аспирантом при кафедре математической физики, а в 1926 г. — научным сотрудником кафедры. Вместе с Н. М. Крыловым он занимался исследованием вопросов математической физики и вариационного исчисления. В 1927 г. ими, также совместно, были начаты исследования по проблемам нелинейных колебаний, которые привели к созданию нового направления — нелинейной механики.

Некоторое время в Академии наук работал также М. К. Куренский (1895—1940), занимавшийся теорией дифференциальных уравнений в частных производных.

Кроме академических кафедр исследования в области математики проводились на научно-исследовательских кафедрах, а также на кафедрах высших учебных заведений.

Перестройка науки и высшей школы на Украине происходила несколькими иными путями, чем в РСФСР. В 1920 г. на Всеукраинском совещании по вопросам народного образования была принята «Схема народного просвещения УССР», согласно которой вся система образования, в том числе и высшего, должна была иметь практическое направление. В соответствии с этим решением в 1920—1921 гг. университеты Украины были заменены институтами народного образования, основной задачей которых являлась подготовка педагогов. Научно-исследовательская работа из области деятельности институтских кафедр была исключена и передана специально созданной системе научно-исследовательских кафедр Украины, подчинявшейся Научному комитету Народного комиссариата



Г. В. Пфейффер.





Н. М. Крылов.

просвещения УССР (Укрглавнаукe). По физико-математическим наукам такие кафедры были открыты в Киеве, Харькове, Екатеринославе (ныне Днепропетровск), Одессе и Каменце-Подольском.

Киевский университет был преобразован в Высший институт народного образования, переименованный в 1926 г. в Киевский институт народного образования. Первоначально отдел естественных наук с физико-математическим подотделом входил в состав школьного факультета Высшего института народного образования. Эта структура, однако, изменилась уже в 1921/22 учебном году: все отделы были включены в состав двух факультетов — социального воспитания и профессионального образования. Физико-математическое отделение входило в состав второго факультета.

В Киевском институте народного образования математические курсы читали профессора, работавшие ранее в университете, — Д. А. Граве, Г. В. Пфейффер, Б. Я. Букреев и др. Б. Я. Букреев в рассматриваемые годы занимался различными вопросами геометрии и вариационного исчисления.

С 1921 г. в Киевском институте народного образования и Киевском политехническом институте работал М. Ф. Кравчук (1892—1942). В Институте народного образования он был деканом факультета профессионального образования, читал введение в высшую математику и курс теории функций. Его исследования посвящены различным вопросам алгебры, математического анализа, теории дифференциальных и интегральных уравнений, теории функций и теории вероятностей. В 1929 г. Кравчук был избран академиком ВУАН.

Киевская научно-исследовательская кафедра математики, которой руководил Д. А. Граве (после А. П. Котельникова), занималась главным образом прикладными вопросами: Д. А. Граве вел семинар по прикладной математике, рассматривавший различные задачи технического характера, Н. М. Крылов — по теоретической и прикладной математике, Г. В. Пфейффер и М. К. Куренский — по дифференциальным уравнениям, Б. Я. Букреев — по вариационному исчислению и его применениям, М. Ф. Кравчук — по алгебре и теории функций, Н. Н. Столяров — по аналитической геометрии. В 1928 г. начали свою деятельность семинары Ю. Д. Соколова — по механике и теории дифференциальных уравнений, Н. И. Ахиезера — по теории функций комплексного переменного и аэродинамике, М. Х. Орлова — по исчислению конечных разностей и численным методам решения дифференциальных уравнений, В. Е. Дьяченко — по математической физике.

Кроме Высшего института народного образования в 20-х годах в Киеве было еще два высших учебных заведения — политехнический инсти-

тут и институт народного хозяйства. В политехническом институте математику преподавали А. П. Котельников, В. П. Ермаков, Б. Н. Делоне.

А. П. Котельников переехал в Киев в 1914 г. Читал математические курсы в университете — различные отделы геометрии и анализа и в политехническом институте — главным образом механику. Эти курсы он продолжал читать здесь до переезда в Москву (1924 г.). Котельников был первым руководителем Киевской научно-исследовательской кафедры математики (с 1922 г.).

В. П. Ермаков продолжал свою педагогическую деятельность в политехническом институте. Здесь же до 1922 г. работал Б. Н. Делоне.

В Киевском институте народного хозяйства математику преподавали Д. А. Граве и Е. Е. Слуцкий (1880—1948). Исследования Слуцкого в этот период относились к теории вероятностей и математической статистике. В 1926 г. он переехал в Москву.

Одновременно с Киевским был преобразован и Харьковский университет: в июле 1920 г. на его базе основана Академия теоретических знаний в составе двух институтов — физико-математических и общественных наук. Ректором академии был избран проф. А. П. Пшеборский. В 1921 г. академия преобразуется в Харьковский институт народного образования с тремя факультетами — социального воспитания, профессионального образования и политехнического просвещения. Как и в Киеве, прямым преемником университета явился факультет профессионального образования. Научно-исследовательские кафедры здесь также были отделены от учебных.

Кафедрой математического анализа заведовал Ц. К. Русьян, научные интересы которого в 20-е годы были сосредоточены в области дифференциальных уравнений в частных производных. В 1919 г. он подготовил и опубликовал один из первых на Украине после революции учебник по дифференциальному и интегральному исчислениям. В состав кафедры входили три действительных члена научно-исследовательской кафедры — профессор Харьковского института народного образования В. Л. Гончаров, профессор Харьковского технологического института П. Ф. Спенглер, профессор Екатеринославского института народного образования Г. А. Грузинцев и два научных сотрудника — профессор Екатеринославского института народного образования И. Е. Огиевецкий и профессор Харьковского института народного образования Н. М. Марчевский.

Научно-исследовательской кафедрой прикладной математики руководил С. Н. Бернштейн. В ее состав входили действительный член кафедры профессор Харьковского технологического института И. М. Баб-



Н. Н. Боголюбов.

ков и два научных сотрудника — Я. Л. Геронимус и А. И. Сыромский.

С. Н. Бернштейн в 20-е годы вел исследования в двух направлениях — теории функций и теории вероятностей. В первом он является основателем нового большого отдела — конструктивной теории функций вещественной переменной. Весьма разнообразны его результаты по теории вероятностей. В частности, он первым построил аксиоматику теории вероятностей и получил весьма общие результаты по предельным теоремам для независимых и независимых случайных величин.

Значительную роль сыграл Бернштейн в установлении контактов между математиками Советского Союза и западноевропейских стран. В 1922—1924 гг. он находился в научной командировке в Германии и Франции, с 1 сентября 1923 г. по 1 ноября 1924 г. — читал в Сорбонне курс теории вероятностей.

В 1924 г. С. Н. Бернштейн был избран членом-корреспондентом Российской академии наук, а в 1925 г. — академиком ВУАН.

Профессором механики в Харьковском институте народного образования с 1922 г. был Б. П. Герасимович. Ему принадлежат исследования по астрофизике и теоретическим вопросам астрономии.

Д. М. Синцов работал в Харьковском университете с 1903 г. Его исследования, в основном, были сосредоточены в области геометрии и геометрической теории дифференциальных уравнений. Значительное внимание он уделял разработке различных вопросов методики математики. Синцов руководил научно-исследовательской кафедрой геометрии.

С 1917 г. в университете, а затем в Харьковском институте народного образования работал М. Н. Марчевский. Занимался он математическим анализом, исчислением конечных разностей и некоторыми вопросами истории математики. В 1918—1920 гг. преподавал в Харьковском университете выпускник Петербургского университета алгебраист А. К. Сущкевич.

На базе научно-исследовательских кафедр в 1928 г. в Харькове был создан Украинский институт математических наук. Его возглавил С. Н. Бернштейн.

В марте 1922 г. состоялось первое после Октябрьской революции заседание Харьковского математического общества. Председателем общества был вновь избран Д. М. Синцов. На этом посту Синцов оставался до последних дней своей жизни. В 1924 г. возобновилось печатание работ членов Харьковского математического общества. С 1924 по 1928 г. вышло в свет три тома так называемой третьей серии сообщений общества под названием «Наукові записки науково-дослідчих математичних кафедр України». Редактором серии был С. Н. Бернштейн.

Екатеринославский университет был открыт в 1918 г. (на базе высших женских курсов и при значительной помощи профессорского коллектива горного института) в составе историко-математического, физико-математического, юридического и медицинского факультетов. В 1920 г. этот университет, как и другие университеты Украины, был реорганизован в Институт народного образования с двумя факультетами: социального воспитания и профессионального образования.

Весьма значительную роль в организации преподавания математики в новом университете сыграл профессор Харьковского университета Г. А. Грузинцев (1880—1929). Предметом его исследований была в основном теория множеств.

В 20-е годы в Екатеринославском институте народного образования начал свою педагогическую и научную деятельность воспитанник Одесского университета И. Е. Огиевецкий (1889—1956). Он вел исследования в области геометрии, математического анализа и теории функций. В 1924 г. опубликовал первый в СССР курс кинематической геометрии. В Екатеринославском институте народного образования, а затем в университете он проработал 34 года. Наравне с Грузинцевым ему принадлежит заслуга постановки преподавания математических дисциплин в этом институте.



С. Н. Бернштейн.

Ряд предметов математического цикла читали в Екатеринославском институте народного образования профессора горного института А. Н. Динник (1876—1950), впоследствии действительный член ВУАН и АН СССР и Я. И. Грдина (1876—1950). Основной специальностью Динника и Грдины была механика. Динник занимался главным образом механикой упругого тела, одновременно он изучал математические вопросы, в частности теорию функций Бесселя. Основной цикл исследований Грдины относится к механике живых организмов. Он является одним из ее создателей.

История Одесского (б. Новороссийского) университета имеет свои особенности. До Октябрьской революции он был единственным, если не считать высших женских курсов, высшим учебным заведением не только в Одессе, но и во всей южной части Украины. В 1918 г. при помощи университетских ученых был организован Одесский политехнический институт, давший позднее начало другим одесским высшим техническим учебным заведениям. В 1920 г. на базе Одесского учительского института был основан Одесский институт народного образования. В 1921 г. с ним были слиты институты Одесской академии теоретических знаний (б. университета) — физико-математических и гуманитарно-общественных наук.

К 1918 г. в Одессе сложился весьма сильный коллектив математиков. До 1922 г. здесь работал геометр В. Ф. Каган. В 1921/22 учебном году он впервые в истории русских университетов прочел курс теории относительности. Этот его курс слушали, в частности, будущие академики Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, И. Е. Тамм, А. Н. Фрумкин.

Большую научную и педагогическую работу в университете вел видный математик, один из организаторов и руководителей одесской математической школы С. О. Шатуновский, работавший в области анализа, алгебры, геометрии и теории чисел. Шатуновский — один из первых представителей конструктивного направления в современной математике.

Ему принадлежит изложение теории Галуа на основе понятия функционального модуля. Он работал также в области логического обоснования геометрии, создал чрезвычайно оригинальный курс введения в анализ.

С 1921 г. в Одесском институте народного образования и политехническом институте читал математические курсы один из крупнейших советских алгебраистов Н. Г. Чеботарев, ученик Д. А. Граве. Основные работы Чеботарева посвящены исследованию вопросов современной алгебры и алгебраической теории чисел. Начало этих исследований было выполнено им в Одессе. Здесь же он провел и некоторые исследования по топологии. В 1928 г. Чеботарев перешел в Казанский университет.

Исследованием вопросов алгебры занимался также профессор университета Д. А. Крыжановский.

При Одесском институте народного образования была организована научно-исследовательская кафедра математики, которой руководил известный историк математики И. Ю. Тимченко. Кафедра состояла из трех секций, которыми заведовали С. О. Шатуновский (секция анализа), И. Ю. Тимченко (секция геометрии) и Г. К. Суслов (секция механики). Научными работами руководили также действительные члены кафедры Н. Г. Чеботарев, Д. А. Крыжановский, А. С. Турчанинов (вариационное исчисление), Н. С. Васильев (механика, векторное исчисление), К. Н. Щербина (методика математики).

В 1918 г. в Крыму, в Симферополе, открылся филиал Киевского университета, преобразованный в 1919 г. в Крымский университет, а в 1925 г. в Крымский педагогический институт.

С самого основания университета на его физико-математическом факультете был сильный коллектив математиков, поэтому за немногие годы своего существования университет выполнил немало значительных работ. Здесь работали Н. М. Крылов, Л. А. Вишневский, Н. С. Кошляков, А. С. Кованько, М. А. Тихомандрицкий, Н. В. Оглоблин.

Н. М. Крылов был одним из инициаторов создания физико-математического факультета. Он организовал журнал «Записки математического кабинета Крымского университета» (в 1919 г.), в котором на протяжении двух лет напечатал более 25 статей, посвященных различным вопросам математической физики и приближенных вычислений. В «Записках» публиковал статьи по анализу и вариационному исчислению, написанные частично в соавторстве с Н. М. Крыловым, профессор университета Л. А. Вишневский (в 1925 г. он переехал в Томск). В эти же годы (до 1925 г.) в Крымском университете работал выпускник Петербургского университета Н. С. Кошляков (1891—1958). Выполненные им в Симферополе исследования посвящены применению теории вычетов в теории чисел.

А. С. Кованько преподавал в Симферополе в 1920—1926 гг. Он занимался теорией функций.

Н. В. Оглоблин (1881—1935) возглавлял в Крымском университете кафедру механики, а также читал математические курсы: анализ, аналитическую геометрию, теорию функций комплексного переменного, векторное и тензорное исчисления. После преобразования университета в педагогический институт он занял в нем кафедру математики, на которой и работал до конца своей жизни.

Рассмотрим состояние преподавания математики и математических исследований на западных землях Украины, входивших до 1919 г. в состав «лоскутной» Австро-Венгерской монархии Габсбургов. Под влиянием Великой Октябрьской социалистической революции в Галиции, как и во всей Австро-Венгрии, возникла революционная ситуация.

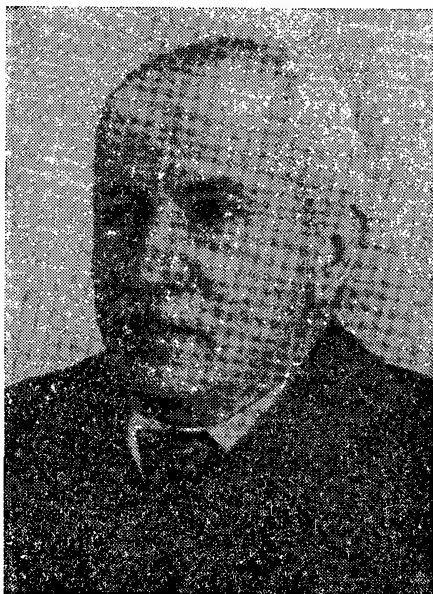
Украинские земли входили частично в состав Венгрии — Буковина и Закарпатская Украина, а частично в состав Австрии — Галиция, которая вместе с исконно польскими землями области Кракова образовывала так называемое королевство Галиции и Лодомерии, объединенное единым сеймом и единым управлением. Вследствие того что материальные и культурные богатства были сконцентрированы главным образом в руках польских магнатов, в их руках оказалась и реальная власть. Таким образом, коренное украинское население находилось кроме социального также под двойным национальным гнетом — немецких властей и польских магнатов.

В ноябре 1918 г. во Львове была провозглашена Западноукраинская буржуазная республика. Несмотря на то что основное население западных областей стремилось к воссоединению с Советской Украиной в едином государстве, буржуазные националисты, захватившие на западноукраинских землях власть в свои руки, всячески препятствовали осуществлению воссоединения. К июню 1919 г. они прекратили сопротивление белополякам, и восточная Галиция, а также западная часть Волыни вскоре были оккупированы буржуазной Польшей.

В Западной Украине началось новое широкое наступление на украинскую культуру. Было закрыто около одной трети всех украинских школ. В августе 1919 г. по приказу ректора во Львовский университет принимались лишь поляки, а из украинцев только лица, служившие в польской армии. В марте 1923 г. была закрыта Львовская украинская мужская учительская семинария, а Львовская и Перемышльская женские учительские семинарии преобразованы в двуязычные.

Математика во Львовском университете, как и в австрийских университетах, преподавалась на философском факультете. В 1925 г. философский факультет был разделен на два факультета — математико-естественный и гуманитарный.

В 20-х годах в университете математику преподавали четыре профессора и один доцент. Кроме учебных занятий по математике работали также математические семинары, состоявшие из четырех отделов. Отделом «А» руководил профессор Е. Жилинский, воспитанник Киевского университета. Этот семинар занимался проблемами теории групп. В нем принимало участие до 100 чел.



А. Н. Динник.

Семинар «В» вел профессор Г. Штейнгауз, преподававший в университете в качестве доцента еще до первой мировой войны. В нем принимали участие студенты старших курсов. На занятиях рассматривались вопросы вариационного исчисления, функционального анализа и ортогональных рядов. В семинаре участвовало 15—20 чел.

Профессор С. Рузевич вел семинар по вопросам теории функций действительного переменного, в котором участвовало также до 20 чел.

В 1922 г. профессуру во Львовском университете получил виднейший львовский математик С. Банах. Его семинар был наиболее многочислен. Научные исследования Банаха относятся к области функционального анализа. Банах является одним из его создателей. Им написаны учебники по математическому анализу и механике. В 20-х годах он читал дифференциальное и интегральное исчисления и вел практические занятия по этим же предметам. Банах сыграл большую роль в создании львовской математической школы.

В другом львовском высшем учебном заведении — политехническом институте в рассматриваемый период в общем ежегодном числе студентов 2000—2500 чел. украинцев было в среднем не более 50. Политехнический институт вначале состоял из пяти факультетов. В 1922 г. открылся шестой — «общий» факультет, задачей которого являлась подготовка учителей для специальных технических школ. По своим программам он был близок к университету. В институте было три кафедры математики и две кафедры начертательной геометрии.

Первая кафедра математики, старейшая из всех трех (основана в 1851 г.), принадлежала факультету путей сообщения. Руководил ею В. Стожек, исследовавший различные вопросы анализа и теории дифференциальных уравнений. Второй кафедрой математики, при механическом факультете, заведовал профессор А. Ломницкий, преподававший кроме обязательных предметов — математического анализа и аналитической геометрии также математическую картографию, математическую дидактику, теорию вероятностей и математическую статистику, входившие в круг его научных интересов. На этой кафедре с 1919 г. в разное время работали С. Банах, С. Рузевич, С. Качмаж, Г. Штейнгауз, В. Никлиборц.

Третья кафедра принадлежала общему факультету. Руководил ею вначале В. Стожек, а с 1927 г. — К. Куратовский, занимавшийся топологией.

Из двух кафедр начертательной геометрии одной руководил А. Платцер, другой — К. Бартель, окончивший в 1907 г. Львовский политехнический институт, а затем занимавшийся в университетах Львова и Мюнхена.

На математическом отделении общего факультета программа в основном соответствовала университетской. Курс был рассчитан на четыре года. Заканчивавшие факультет получали степень магистра математических наук. Факультет был очень малочисленным: число студентов в 20-х годах немногим превышало 20.

В связи с дискриминацией коренного украинского населения во львовских высших учебных заведениях в 1919—1925 гг. во Львове действовал частный украинский университет, дававший студентам настолько серъ-



езную теоретическую подготовку, что свидетельства, выданные им, признавались заграничными университетами. Объем изучавшегося в нем материала соответствовал обычным университетским программам двух первых курсов. На математическом отделении читали В. И. Левицкий, Н. А. Чайковский, В. Стасюк и И. Ситницкий. К 20-м годам В. И. Левицкий (1872—1956) опубликовал немало работ по разным вопросам математики, однако он не был допущен к преподаванию во Львовском университете и с 1919 по 1925 г. читал в украинском университете математический анализ, аналитическую, синтетическую и дифференциальную геометрию и другие предметы. В эти же годы он был председателем математико-естественно-медицинской секции Научного общества им. Т. Г. Шевченко.

Предметом исследований Н. А. Чайковского являлись некоторые вопросы алгебры, теории функций, истории и методики математики, а также проблемы украинской математической терминологии.

В 20-е годы продолжала работать математико-естественно-медицинская секция Научного общества им. Т. Г. Шевченко. Она издавала «Сборник секции». С 1918 по 1928 г. вышло в свет два тома сборника. К 1925 г. относится начало установления научных связей между математиками Львова и Советской Украины, инициаторами которых были Д. А. Граве и М. Ф. Кравчук.

Положение в Северной Буковине, где коренное население составляют также украинцы, в 20-х годах было аналогичным положению в Галиции. В ноябре 1918 г. Народное Вече, собравшееся в Черновцах, провозгласило свое решение присоединиться к Советской Украине. Однако осуществлению этого решения помешала Антанта: в ноябре 1918 г. вся Северная Буковина была оккупирована войсками боярской Румынии. Университет, преподавание в котором велось до этого времени в основном на немецком языке, был переведен целиком на румынский язык. У коренного украинского населения были отобраны даже те немногие достижения в области культуры, которые оно завоевало во времена австро-венгерской монархии: закрыты единственная украинская реальная гимназия, украинская мужская семинария и украинская женская семинария. Украинский язык как язык преподавания был оставлен лишь в некоторых начальных школах.

В январе 1919 г. Закарпатское всенародное собрание также потребовало воссоединения закарпатских земель с Советской Украиной. Однако по сговору стран Антанты Закарпатская Украина, коренным населением которой являются украинцы, была передана буржуазной Чехословакии. Таким образом, и здесь развитие украинской национальной культуры было задержано почти на четверть века. Ни Северная Буковина, ни Закарпатская Украина в рассматриваемый период не внесли существенного вклада в развитие украинской математической культуры, да они и не могли этого сделать, так как не имели возможностей для развития национальной культуры вообще.



## Математика в Белорусской ССР

Белоруссия была одной из самых отсталых окраин Российской империи. Во всех белорусских губерниях не было ни одного высшего учебного заведения, преподавание в школе велось только на русском языке и лишь немногочисленным деятелям белорусской культуры с большим трудом удавалось издавать на родном языке некоторые журналы и литературные произведения. Первая мировая война привела в упадок промышленность и сельское хозяйство, и до войны не отличавшиеся здесь высоким уровнем развития.

Одновременно с Москвой и Петербургом в дни Великой Октябрьской социалистической революции власть в Минске перешла в руки Советов депутатов, большинство в которых имели большевики. Но в феврале 1918 г. Минск оккупировали немцы, и только 1 января 1919 г., когда значительная часть Белоруссии и ее столица были очищены от оккупантов, в Белоруссии была провозглашена Советская власть. Однако вследствие войны с буржуазной Польшей и заключенного в 1921 г. Рижского договора Белоруссия была разделена на две части: западная ее часть отошла к Польше.

Культурное строительство в Белоруссии началось сразу же после провозглашения Советской власти. В декабре 1920 г. начались занятия в Минском политехническом институте (с 1922 г. сельскохозяйственный институт). Математику в нем читал профессор Б. К. Армфельд. Осенью 1921 г. был открыт Белорусский государственный университет. К 1927 г. в БССР насчитывалось несколько высших учебных заведений: университет, комакадемия, сельскохозяйственный и ветеринарный институты, Институт белорусской культуры. В 1929 г. последний был преобразован в Белорусскую академию наук.

Датой начала развития математики в Белоруссии следует считать 1922 год, когда в университете было открыто физико-математическое отделение педагогического факультета. Преподавали математику бывшие учителя гимназий и реальных училищ, и почти до конца 20-х годов в университете велась лишь педагогическая работа. Однако уже тогда были подготовлены кадры преподавателей из университетской молодежи, которые впоследствии, после переподготовки в научно-исследовательских учреждениях Москвы и Ленинграда, смогли самостоятельно заняться научной работой.

Научная работа по математике на физико-математическом факультете в университете начала активизироваться лишь в 1929 г., с переездом в Минск профессоров Ц. Л. Бурстина и Я. П. Громмера. Ц. Л. Бурстин (1883—1938) вел исследовательскую работу в области дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений, Я. П. Громмер занимался вопросами алгебры, теории относительности и механики. В феврале 1921 г. в системе Наркомпроса БССР была создана научно-терминологическая комиссия, вошедшая затем в состав Института белорусской культуры. В ней, в частности, была математическая секция.

## Математика в Грузинской ССР

Вопрос о необходимости организации высших учебных заведений в Закавказье поднимался общественностью и в конце XIX, и в начале XX в. В сущности, до первой мировой войны весь Юго-Восток Европейской части России, восточная часть Украины, Кавказ и Закавказье обслуживались Харьковским университетом, Харьковским технологическим и Новочеркасским политехническим (с 1907 г.) институтами, а также Высшими женскими курсами в Харькове и Ростове. Перед самой войной Высшие женские курсы были открыты также в Тбилиси, в составе трех факультетов (в том числе физико-математический), однако они не могли заменить университет, к тому же число слушательниц на этих курсах всегда было небольшим (не более 400). И хотя многие грузины учились в Петербургском, Московском, Юрьевском, Киевском и других университетах, для широких масс населения Закавказья, как и других районов страны, высшее образование стало доступно лишь после свержения царизма.

Весной 1917 г. начала работать комиссия по реформе высшего образования, созданная Министерством народного просвещения. Однако временное правительство не могло решить хотя бы в какой-то степени вопросы организации образования на национальных языках. В сентябре 1917 г. в Тбилиси был открыт политехникум (сельскохозяйственный факультет) с преподаванием на русском языке. В 1918 г. в нем открылся экономический, в 1919 — гидро-электротехнический и в 1920 г. — строительный факультеты.

В комиссии возникло и второе предложение: открыть в Тбилиси общекавказский университет, также с преподаванием на русском языке. Однако этот вариант не мог удовлетворить возросшие потребности на местах.

Грузинский университет был открыт в Тбилиси в 1918 г. В первом составе его профессоров было четыре математика — А. М. Размадзе, Н. И. Мухелишвили, Г. Н. Николадзе и А. К. Харадзе.

Большую работу по созданию грузинской математики выполнил А. М. Размадзе (1889—1929). Его исследования относятся к вариационному исчислению (он решал вариационные задачи для случая, когда один конец кривой зафиксирован, а другой — свободен, а также для случая разрывных функций). А. М. Размадзе окончил в 1910 г. Московский университет; докторскую диссертацию защитил в 1925 г. в Сорбонне. В Тбилисском университете читал основные курсы по математическому анализу.

Выдающийся ученый в области механики упругого тела и в области теории функций Н. И. Мухелишвили окончил в 1914 г. Петербургский университет, в котором затем и работал до переезда в Грузию. В 20-х годах он начал исследования в области теории интегральных уравнений и по ряду проблем математической физики. Мухелишвили был одним из первых профессоров грузинского университета, а также одним из инициа-



А. М. Размадзе.



Г. Н. Николадзе.

торов инженерного образования на родном языке: в конце 1921 г. в составе Тбилисского университета был открыт политехнический факультет. С 1926 г. Мухелишвили исполнял обязанности декана факультета, а в 1928 г. после объединения факультета с политехническим институтом он был избран первым ректором политехнического института.

Г. Н. Николадзе (1888—1931) по образованию был инженером-металлургом (в 1913 г. окончил Петербургский технологический институт). С 1913 по 1918 г. он вместе с И. П. Бардиным (впоследствии академиком) работал в доменном цехе на Юзовском заводе, в свободное время занимаясь математикой. По возвращении в Тбилиси Николадзе начал читать в университете курсы по геометрическим предметам, не оставляя также инженерной и инженерно-педагогической деятельности: в 1920 г. он разработал и внедрил на Тбилисском металлургическом заводе производство ферромарганца. В 1924 г. по инициативе Г. Н. Николадзе было основано Грузинское географическое общество. В 1926—1928 гг. Николадзе находился в научной командировке в Париже. В 1928 г. в Сорбонне он защитил докторскую диссертацию по алгебраической геометрии.

Г. Н. Николадзе является зачинателем советского альпинизма: под его руководством было проведено первое массовое восхождение (с участием женщин) на Эльбрус и Казбек.

В 1919 г. начал свою педагогическую деятельность в Тбилисском университете А. К. Харадзе, воспитанник Московского университета (окончил в 1917 г.). Его работы, выполненные в 20-х годах, относятся, главным образом, к алгебре полиномов и специальным вопросам анализа.

Одним из важных звеньев развития грузинской математики является создание грузинской математической терминологии, работа над которой была начата уже в 1918 г. Грузинское техническое общество (основано в 1917 г.) в 1920 г. выпустило



Группа грузинских математиков: А. К. Харадзе (стоит), слева направо — А. М. Размадзе, Г. Н. Николадзе, Н. И. Мусхелишвили. 1924 г.

в свет первый русско-грузинский технический словарь. В этом же году начал выходить первый грузинский технический журнал «Техника и жизнь», был опубликован первый том «Курса математического анализа» А. М. Размадзе (первая часть третьего тома — интегральное исчисление, неопределенные интегралы — вышла в 1922 г.). Сочинение Размадзе, оставшееся незаконченным, отличалось высокими научными достоинствами и явилось событием в грузинской математике. В 1924 г. был издан (на стеклографе) курс интегрального исчисления, написанный коллективом авторов под руководством Г. Н. Николадзе, в 1926 г. — «Курс начертательной геометрии» Г. Н. Николадзе, а также курс алгебры А. К. Харадзе.

Во второй половине 20-х годов коллектив грузинских математиков получил пополнение — это были первые выпускники Грузинского университета Л. П. Гокиели, В. Д. Купрадзе, А. К. Рухадзе, Д. М. Тоидзе, Д. Г. Цхакая, А. Я. Горгидзе, И. Н. Векуа, Ш. Е. Микеладзе, В. Г. Челидзе.

## 9

### Математика в Азербайджанской ССР

Осенью 1919 г. был открыт Бакинский университет — первое высшее учебное заведение в Азербайджане. В 1920 г. в университете открылся физико-математический факультет, а в 1921 г. — математическое отделение факультета. В 1924 г. физико-математический

факультет был влит в качестве самостоятельной секции в новоорганизованный педагогический факультет.

В первых уставах университета (1919—1922 гг.) подчеркивалось, что он является научно-учебным учреждением. Так, по сути, и было вначале, университет был не только учебным, но и научным и, более того, единственным научным учреждением Азербайджана. В дальнейшем, с развитием науки и высшей школы, основной задачей его стала подготовка научных и педагогических кадров для учебных заведений республики, научная деятельность была сосредоточена в академических учреждениях. В 1921 г. при Бакинском университете была учреждена аспирантура. Координация научно-исследовательской работы кафедр сосредоточивалась в Научной ассоциации, преобразованной в 1922 г. в Ученый комитет. В 1929 г. было создано центральное научно-исследовательское учреждение Азербайджана — Азербайджанский государственный научно-исследовательский институт.

Кафедра математики в университете была учреждена с самого начала его существования. С 1921 по 1923 г. математику преподавал Л. С. Лейбензон (1879—1951), ученик Н. Е. Жуковского по Московскому университету и МВТУ, специалист в области механики, теории упругости и гидродинамики вязкой жидкости, созданной в основном его трудами (с 1923 г. он профессор Московского университета). В 1925 г. в Баку из Симферополя переехал А. С. Кованько, продолживший в университете свои исследования в области теории функций, в основном по почти периодическим функциям. Некоторые математические предметы и методику математики преподавал приват-доцент А. М. Амосов. Математические курсы на азербайджанском языке читали М. Р. Эфендиев и А. Х. Усуббекова.

Научные работы азербайджанских математиков в 20-х годах публиковались в «Известиях Азербайджанского государственного университета», в отделе «Естествознание и медицина».

## 10

### Математика в Армянской ССР

Как и в Тбилиси и Баку, высшее образование в Ереване, столице Советской Армении, входившей в первой половине 20-х годов в состав Закавказской федерации, пришлось организовывать с самого начала, поскольку никакой базы для него в дореволюционные годы создано не было: местное население могло обучаться лишь в гимназиях и реальных училищах.

Ереванский государственный университет был основан в 1920 г. С 1921 г. на техническом и естественном факультетах введено преподавание математики. Математика как специальность появляется в Ереванском университете лишь в 1924 г. (было открыто физико-математическое отделение педагогического факультета).

Для преподавания математических дисциплин были приглашены математики-армяне, которые получили подготовку в русских и зарубежных университетах, — А. Акопян, А. Тонян, О. Навакатилян, А. Тер-Мкртчян и др.

А. О. Тонян, окончивший университет в Галле (Германия), читал математический анализ, начала теории функций комплексного переменного. О. Н. Навакатилян, выпускник Московского университета, — аналитическую геометрию, высшую алгебру, дифференциальные уравнения. А. М. Тер-Мкртчян, воспитанник Новочеркасского политехнического института, — дифференциальные уравнения, теоретическую механику и некоторые другие математические дисциплины. А. О. Тонян занимался также вопросом создания армянской математической терминологии.

К первой половине 20-х годов относится также начало создания армянской математической учебной литературы: издавались лекции по различным математическим курсам, переводились на армянский язык некоторые учебники.

В 1925 г. по постановлению Совнаркома Армянской ССР было основано высшее научное учреждение страны — Институт науки и искусства.

## 11

### **Математика в республиках Средней Азии и в Казахской ССР**

История высшего образования в Среднеазиатских республиках начинается лишь со времени Великой Октябрьской социалистической революции. До революции вопрос об организации высшего образования в Туркестане даже не поднимался. На всю громадную область было несколько гимназий и реальных училищ, небольшое количество «русско-туземных» школ и учительская семинария. «Национальное» образование было представлено низшими школами при мечетях, в которых преподавался коран на арабском языке, и высшими духовными школами — медресе.

В 1918 г. общественность Ташкента возбудила вопрос о необходимости открытия университета. На состоявшемся в июне этого же года в Москве совещании преподавателей высших учебных заведений Москвы и Петрограда было решено организовать Туркестанский университет в Ташкенте, направив первый преподавательский состав для организации университета из Москвы и выделив необходимое для этого оборудование. В январе 1920 г. из Москвы в Ташкент был отправлен первый эшелон. Его возглавил проректор Туркестанского университета профессор А. Э. Шмидт. Эшелон прибыл на место назначения лишь в конце марта. Следующие эшелоны — второй, третий и четвертый — прибыли в Ташкент быстрее. К сентябрю подготовительные работы по организации университета были завершены, и в октябре 1920 г. в Туркестанском университете, в частности на рабочем и физико-математическом факультетах, начались занятия.

Первым математиком Туркестанского университета, и по времени работы в университете и по значению научной деятельности, был В. И. Романовский. С 1911 г. он работал в Варшавском университете. Научные интересы его составляли различные вопросы анализа и теории вероятностей, затем интегрирование систем дифференциальных уравнений в частных производных. Эти исследования он продолжил и в первый период



В. И. Романовский.

своего пребывания в Ташкенте. Воспитанник Ташкентского реального училища, Романовский в 1915 г. вернулся в Ташкент и принял участие в организации университета. В начале 20-х годов, наряду с исследованиями в области теории вероятностей, он начал заниматься проблемами математической статистики.

С 1921 г. в Туркестанском университете преподавал Д. Г. Гребенюк, только окончивший этот же университет. Ему принадлежат статьи по высшей алгебре и теории полиномов, наименее уклоняющихся от нуля.

В 1918 г. было образовано Ташкентское физико-математическое общество.

В начале 20-х годов еще не было проведено национальное размежевание в Средней Азии. Туркестанская АССР, входившая в состав РСФСР вместе с Бухарской и Хорезмской республиками, территориально занимала всю южную часть Средней Азии. Север занимала Киргизская АССР, в 1925 г. переименованная в Казахскую АССР. Только в 1924—1925 гг. в Средней Азии было проведено государственное размежевание с учетом национальных признаков: образованы Узбекская и Туркменская ССР, вошедшие в мае 1925 г. в состав СССР как союзные республики, Таджикская АССР в составе Узбекистана, Казахская АССР и Киргизская автономная область в составе РСФСР. Таким образом, для дальнейшего развития национальной культуры среднеазиатских народов были заложены прочные основы.

В 1927 г. было открыто второе высшее учебное заведение университетского типа — Узбекская государственная педагогическая академия (в Самарканде), имевшая, в частности, физико-математический факультет, педагогические институты в Бухаре и Фергане, а в октябре 1928 г. — университет, с педагогическим факультетом, в Алма-Ате.

## 12

### Развитие математики в Прибалтийских республиках

Условия для развития точных наук в Прибалтике в 20-х годах были не одинаковыми. В Тарту (Эстония) и Риге (Латвия) продолжались традиции университетского преподавания и исследований в области математики. В Вильнюсе, если эти традиции и были нарушены, оставалась база для восстановления университета. Однако Вильнюс очень скоро был оторван от Литвы и оккупирован Польшей. В новой же столице Литвы — Каунасе все приходилось начинать



заново. Вместе с тем во всех Прибалтийских республиках власть захватила буржуазия, которая не была заинтересована в развитии народного образования вообще и высшего в частности.

Старейшим по времени основания среди всех прибалтийских высших учебных заведений был Виленский университет, закрытый царским правительством в связи с восстанием 1832 г. В марте 1919 г. декретом Совнаркома Литовско-Белорусской ССР за подписью В. Мицкявичюса-Капсукаса университет был открыт. Однако вскоре всю Вильнюсскую область оккупировали польские войска, и университет начал работу как Вильнюсский университет Стефана Батория. В связи с политикой польских националистов, университетские кафедры были заняты почти исключительно поляками. Математику, в частности, в нем преподавали С. Я. Кемписты (1892—1947), профессор (с 1925 г.), видный специалист в области теории функций действительного переменного, В. Станевич, Ю. Рудницкий.



Х. Я. Яксон

В 1919 г. группа прогрессивных ученых передала правительству буржуазной Литвы меморандум с требованием организации Литовской высшей школы в Каунасе. Правительство отклонило меморандум. Тогда ученые организовали в Каунасе на общественных началах Высшие курсы Литвы, которые возглавил профессор З. Жемайтис. Правительство не оказало поддержки курсам, однако вынуждено было пойти на уступки и 16 февраля 1922 г. открыло Литовский университет в Каунасе. На математико-естественном факультете университета были две математические кафедры: кафедра геометрии, которой заведовал З. Жемайтис, и кафедра математического анализа. Математику преподавали П. Шернас, П. Катилюс и др.

В 1919 г. возобновил свою деятельность Тартуский университет, единственное в Эстонии высшее учебное заведение. В XIX в. преподавание в нем велось сначала на немецком, а затем на русском языке, с 1919 г. — на эстонском языке. Первыми эстонскими профессорами математики были Я. Сарв, Х. Яксон и Г. Ряго.

Я. Х. Сарв (1877—1954) занимался исследованием вопросов оснований геометрии и арифметики. Х. Я. Яксон (1891—1964) работал в области математического анализа (обобщение метода Фурье для решения бесконечных систем линейных уравнений). Г. А. Ряго, преподававший с 1915 г. в Донском политехническом институте (в Новочеркасске), в 1919 г. переехал в Эстонию. Он занимался вопросами методики преподавания математики. В 1922—1924 гг. Ряго и Сарв опубликовали первые университетские курсы математики на эстонском языке — «Курс элементов математического анализа» и два курса аналитической геометрии.



В 1926 г. в Тартуском университете начал читать лекции Ю. Ю. Нуут (1892—1952), исследовавший вопросы, относящиеся к основаниям арифметики и геометрии.

Сарв, Яаксон, Ряго, Нуут и их ближайшие ученики к середине 30-х годов создали эстонскую математическую школу, правда, крайне малочисленную, так как университет не имел возможности для увеличения количества кафедр и аспирантов, оставляемых для подготовки к профессорскому званию. Лишь с открытием в 1936 г. технического института в Таллине положение несколько улучшилось.

В Латвии до Великой Октябрьской социалистической революции было одно высшее учебное заведение — Рижский политехнический институт, эвакуированный во время первой мировой войны в Иваново-Вознесенск. В 1919 г. правительство Советской Латвии открыло Латвийский университет (на базе реэвакуированного политехнического института) с химическим, механическим, сельскохозяйственным, строительным и инженерных наук факультетами в Риге и сельскохозяйственный институт в Приекуле. Большую роль в деле реорганизации системы высшего образования играл профессорско-преподавательский коллектив, активно включившийся в проведение мероприятий Советской власти.

В конце 1919 г. власть в Латвии захватила буржуазия. Начатое Советской властью расширение народного просвещения прервалось. За обучение в вузах была введена высокая плата, поэтому отсев учащихся с 1919 по 1939 г. составил почти 65%. Развитие же научных исследований в условиях буржуазной Латвии вообще оказалось на втором плане и совершенно не обеспечивалось материальными ресурсами.

В 1919 г. в Ригу вернулся и приступил к преподаванию в университете крупнейший латвийский математик, один из основоположников теории почти периодических функций и пионер применения топологических методов в теории дифференциальных уравнений П. Г. Боль, проработавший в университете, однако, всего два года. В декабре 1921 г. он умер от кровоизлияния в мозг. Последним трудом Боля, изданным при его жизни, был курс аналитической геометрии и дифференциального и интегрального исчисления. Книга вышла в Риге в 1921 г. на русском языке, на котором Боль всегда читал лекции.

С первых лет существования Латвийского университета математику в нем преподавали Э. Лейниекс, А. Р. Медер и К. Я. Залтс. А. Р. Медер, воспитанник Тартуского университета, работал ранее (с 1897 по 1918 г.) в Рижском политехническом институте. Он занимался вопросами дифференциальной геометрии, теории вероятностей и истории математики. Научные интересы К. Я. Залтса (1885—1953), окончившего Киевский политехнический институт, были связаны с вычислительной математикой и математической статистикой.

## Творческие связи советских математиков

Как отмечалось выше, одной из основных черт, которыми можно охарактеризовать развитие советской математики в течение первого десятилетия после Великой Октябрьской социалистической революции, является стремление к коллективным научным исследованиям и созданию больших математических школ. «Положительная сторона отмеченного сдвига в сторону коллективизации не замедлила сказаться у нас самым разительным образом. Когда, после первых тяжелых лет революции, после голода, блокады, гражданской войны, мы получили наконец возможность научных сношений с учеными западных стран, вполне естественным было бы ожидать, что при быстроте развития современной науки мы окажемся отброшенными далеко назад, — на самом же деле оказалось, что в эти годы научной разлуки, среди разрухи, в нетопленных кабинетах — а чаще всего и вовсе без кабинетов —... напряжение мысли [наших ученых] было не менее сильно и не менее плодотворно. То, что во всех областях математики писалось на Западе, было и для наших математиков родным и близким; а в некоторых отдельных дисциплинах русская математика с полным правом могла смотреть на тогдашнюю европейскую литературу сверху вниз, как уже на превзойденный этап»<sup>14</sup>.

Выше писалось об огромной роли В. А. Стеклова в восстановлении научных контактов с зарубежными учеными. Значительным событием в жизни советских математиков было участие во Всемирном конгрессе математиков в Торонто (Канада), состоявшемся 11—16 августа 1924 г. В числе участников, в частности, были В. А. Стеклов, Н. М. Гюнтер, Н. М. Крылов, А. М. Размадзе. Доклад Стеклова, прочитанный на конгрессе, посвящен последним работам Ляпунова.

Связи, установленные на математическом конгрессе, а затем В. А. Стекловым во время его поездок по Западной Европе, были развиты и закреплены на праздновании двухсотлетнего юбилея Российской академии наук и, несколько позднее, чествовании юбилея геометрических открытий Лобачевского. Юбилейные торжества в честь Лобачевского организовало Казанское физико-математическое общество. В состав комиссии по организации торжеств входили Н. Н. Парфентьев, Н. И. Порфирьев и П. А. Широков. 25—26 февраля 1926 г. были прочитаны научные доклады, в том числе Н. Н. Парфентьева «О геометрической системе Лобачевского и о ее роли в истории развития физико-математических наук» и А. В. Васильева «О Н. И. Лобачевском».

В декабре 1925 г. была восстановлена международная премия им. Н. И. Лобачевского, присуждавшаяся Казанским физико-математическим обществом за сочинения, представляющие крупный научный вклад в развитие идей Лобачевского, создана комиссия по изданию полного со-

<sup>14</sup> А. Я. Х и н ч и н. Математика. — В кн.: Десять лет Советской науки. Сб. ст. под ред. Ф. Н. Петрова. Госиздат, М. — Л., 1927, стр. 40.

брания сочинений Лобачевского и объявлен 7-й Международный конкурс, присуждение премий по которому состоялось в мае 1927 г. На конкурс поступило 27 работ, из них 19 — из-за границы. Премия была присуждена швейцарскому математику Герману Вейлю за труд «Raum, Zeit, Materie» (1923 г.).

В 1925 г. Главнаука Наркомпроса СССР начала премировать наиболее выдающиеся работы года. Одним из первых премию получил М. А. Лаврентьев, за совокупность работ по дескриптивной теории функций. В 1927 г. были премированы Н. М. Гюнтер, за цикл работ, посвященных доказательству существования решений уравнений гидродинамики при некоторых весьма общих условиях с возможно меньшим числом ограничений, и Б. Н. Делоне, за работу «О представлении чисел кубическими двойными формами отрицательного определителя».

Постановлением Совета Народных Комиссаров СССР в 1925 г. были учреждены премии им. В. И. Ленина за научные работы (присуждались начиная с 1926 г.).

Премирование советских ученых явилось прямым проявлением признания важного значения их работ для советской науки, культуры, народного хозяйства.

Период восстановления был закончен, наступил период строительства и поисков новых путей в науке. Математика к концу 20-х годов и качественно и количественно отличалась от той, которая была унаследована страной от дореволюционной России. Математические объединения в старых университетских городах превратились в мощные научные организации, готовившие кадры. Так, коллектив Научно-исследовательского института математики при 1-м МГУ в 1927 г. состоял из 12 действительных членов, 8 научных сотрудников и 60 аспирантов, тогда как в дореволюционное время Московский университет мог оставлять при математической кафедре для подготовки к профессорскому званию всего несколько человек. Были созданы новые научные организации: Всеукраинская академия наук с сильной группой математиков, научно-исследовательские кафедры Украины, научные общества и кафедры в новых университетах РСФСР, Средней Азии и Закавказья.

Необходимость научного общения привела к созыву съезда математиков. Всероссийский съезд математиков проходил в Москве 27 апреля — 4 мая 1927 г. Он был созван по инициативе Научно-исследовательского института математики и механики при 1-м МГУ и Московского математического общества. В его работе приняли участие 378 математиков из 33 городов Советского Союза, в том числе представители УССР, ЗСФСР, БССР и УзССР. Таким образом, съезд имел всесоюзное значение. Наибольшие по численности делегации представляли Москву (210 чел.), Ленинград (37), Харьков (21), Киев (10), Воронеж (9), Ташкент (7), Смоленск (7), Казань (6), Одессу (6), Томск (6), Иваново-Вознесенск (6), Днепропетровск (4), Омск (4), Ростов-на-Дону (4).

На съезде проводились пленарные и секционные заседания. Было организовано 4 секции: анализа и теории чисел, геометрии, математического естествознания, математической статистики. Всего было заслушано 9 обзорных докладов и 78 секционных. С обзорными докладами выступили

Н. Н. Лузин — «Современное состояние теории функций действительно-го переменного», П. С. Александров — «Об основных направлениях современной топологии», С. Н. Бернштейн — «Современное состояние теории вероятностей и ее приложений» и др. На последнем заседании съезда А. В. Васильев выступил с докладом «Следует ли писать историю математики в России», Д. М. Синцов поставил вопрос о продолжении работ над отечественной математической библиографией.

Значительного развития достигла к концу 20-х годов издательская деятельность в области математических наук. Первые годы после революции для публикации научных трудов были очень трудными: не было полиграфической базы, за исключением типографии Академии наук в Петрограде, бумаги, материальных ресурсов. Отдельные институтские и ведомственные журналы не могли удовлетворить все возраставшие потребности и поэтому много ценных работ, выполненных в это время, осталось в рукописи (позднее некоторые все же были опубликованы). Назовем наиболее важные органы, в которых печатались математические работы в 20-х годах. Более подробные сведения об этом можно найти в библиографии к настоящему разделу (библиография помещена в четвертом томе).

В Ленинграде с 1917 г. издавался журнал «Известия Академии наук». В 1928 г. он был разделен на серии, выходившие отдельными изданиями. Математические статьи печатались в серии ОМЭН (Отделения математических и естественных наук). В 1924 г. начали издаваться «Доклады Академии наук». Вышло два тома «Журнала Ленинградского физико-математического общества» (т. I — 1926 г., т. II — 1928 г.). Продолжали издаваться «Известия Ленинградского политехнического института» (в 1918 г. вышел из печати 27-й том), где статьи по математике печатались в серии «Отдел техники, естествознания и математики».

В Москве продолжал выходить (с 1924 г. регулярно) ежегодник Московского математического общества «Математический сборник».

Издание «Известий Казанского физико-математического общества» было возобновлено в 1923 г. С 1923 по 1925 г. вышли 23—25-й тома второй серии, а с 1926 г. начала выходить третья серия.

Журнал Физико-математического общества при Пермском университете начал издаваться в 1918 г. В этом же году вышли в свет «Известия Донского университета». С 1922 г. университет издавал «Научный вестник», а с 1925 г. начали выходить «Известия Института математики и естествознания Северо-Кавказского университета».

В 1924 г. начали издаваться «Ученые записки Саратовского университета».

Благодаря трудам Н. Н. Лузина и его сотрудников очень насыщенным математическими статьями оказался журнал Иваново-Вознесенского политехнического института «Известия», 1-й том которого вышел в 1918 г., второй — в 1919 г. В 1926 г. вышел в свет 1-й том «Известий Горьковского университета».

Издательская деятельность Среднеазиатского университета была налажена сразу же после его открытия. С 1922 г. выходили «Труды Туркестанского университета», с 1924 г. — «Труды Туркестанского науч-

ного общества» и с 1925 г. — «Бюллетень Среднеазиатского университета». В Тбилиси «Бюллетень университета» начал издаваться в 1920 г.

Значительное развитие получила публикация трудов по математике на Украине. В 1918—1919 гг. были выпущены последние книги университетских трудов и известий, являющиеся продолжением соответствующих дореволюционных серий. В 1922 г. начал выходить первый том «Записок физико-математического отделения ВУАН» (до 1925 г.; вып. 1—4). В 1926—1927 гг. вышел второй том, а в 1928—1929 гг. — третий. Одновременно издавались «Труды физико-математического отделения».

В 1923 г. был выпущен первый том «Научных записок научно-исследовательских кафедр» Киева. С 1926 г. начали выходить «Записки Киевского института народного образования». В 1924 г. появились «Записки» и «Известия» других киевских вузов, в которых периодически помещались математические статьи.

Основным математическим журналом в Харькове продолжали оставаться «Сообщения Харьковского математического общества». Третья серия «Сообщений» выходила под названием «Научные записки научно-исследовательских кафедр Украины». На протяжении 1924—1928 гг. были напечатаны три тома этой серии. В 1927 г. вышел в свет первый том четвертой серии, под названием «Сообщения Харьковского математического общества». В 1922 г. выходил журнал «Наука на Украине», в котором было помещено 8 статей по математике. Небольшое количество статей математического содержания было опубликовано также в «Записках» и «Известиях» харьковских высших учебных заведений.

В Одессе в 1921 г. был опубликован первый (и единственный) том «Ученых записок Высшей школы». Научно-исследовательские кафедры Одессы в 1923—1924 и 1926 гг. издали два тома своего журнала. В 1927 г. вышел первый том «Записок Одесского института народного образования».

Статьи математического содержания печатались также в разных периодических изданиях высших учебных заведений Днепропетровска, Житомира, Каменца-Подольского, Херсона, Симферополя и других городов.

Перестройка высшей школы, начатая вскоре после Великой Октябрьской социалистической революции и продолжавшаяся на протяжении всех 20-х (и первой половины 30-х) годов, потребовала особенно пристального внимания к учебникам и учебной литературе. В дореволюционные годы этот вопрос не был особенно серьезным, так как число учащихся было не особенно большим и высшие школы находились в крупных городах, где в распоряжении учащихся были большие библиотеки. Распирение контингента учащихся, изменение их социального состава, изменение географии высших учебных заведений, постановка преподавания — все это выдвигало на первый план создание учебной математической литературы.

Вопрос об издании учебников был поставлен сразу же после революции. Решался он в трех направлениях: перепечатывались некоторые до-

революционные учебники, переводились некоторые учебники иностранных авторов, составлялись новые оригинальные учебники. В 20-х годах большое распространение получил учебник дифференциального и интегрального исчисления Гренвилля, позднее переработанный Н. Н. Лузиным. Из учебников, написанных в послереволюционный период, особенно широко известными были следующие: «Курс высшей математики» (т. I — 1922 г., т. II — 1925 г.) В. И. Смирнова, «Курс высшей математики» в двух томах А. К. Власова, «Элементы теории чисел» (1923 г.), «Основания вариационного исчисления» (1923 г.) и «Дифференциальная геометрия» (1924 г.) Д. Ф. Егорова, «Введение в математическую статистику» (1920 г.) В. В. Голубева, «Основания теории определителей» (1922 г.) В. Ф. Кагана, «Введение в анализ» С. О. Шатуновского, «Аналитическая геометрия» Н. И. Мусхелишвили, «Геометрические приложения дифференциального исчисления» (дифференциальная геометрия, 1919 г.) и «Задачник по высшей математике» (1923 г.) Д. М. Синцова, «Теория вероятностей» (1927 г.) С. Н. Бернштейна и много других. Практика издания внутриинститутских курсов и учебных пособий, свойственная дореволюционной школе, была воспринята и советскими вузами, поэтому учесть все эти издания в библиографии является делом весьма сложным.

□

Заканчивая рассмотрение, в общих чертах, истории развития математики в Советском Союзе за первые десять лет, можно сделать следующие выводы. Уже в этот период значительно расширился диапазон исследований советских математиков. Некоторые отрасли математики — теория функций, топология, теория вероятностей — в значительной степени продвинулись вперед именно благодаря советским ученым. «Может быть, в эти первые тяжелые годы революции математика, по чисто внешним причинам, оказалась поставленной в несколько особые условия, позволившие ей развиваться интенсивнее других точных наук: математику не нужно ни лабораторий, ни реактивов; бумага, карандаш и творческие силы — вот предпосылки его научной работы; а если к этому присоединить возможность пользоваться более или менее солидной библиотекой и некоторую долю научного энтузиазма (а это есть почти у каждого математика), то никакая разруха не может остановить его творческой работы. Недостаток текущей литературы в известной степени возмещался неустанным научным общением, которое в эти годы удалось организовать и поддерживать»<sup>15</sup>.

Большая работа была проведена по организации новых математических кафедр в городах, где раньше математика ни как наука, ни как предмет преподавания не развивалась. Заслуга в этом принадлежит, в первую очередь, отечественным университетам — Московскому, Ленинградскому, Казанскому, Харьковскому и Киевскому. К концу 20-х годов появились новые научные школы в области математики в Ташкенте, Тбилиси,

---

<sup>15</sup> А. Я. Хинчин. Математика, стр. 30.

Саратове, Днепропетровске. Создание Академии наук СССР и научно-исследовательских институтов в других республиках внесло новую организационную структуру в развитие математики в национальных республиках. Наряду с высшими учебными заведениями зарождаются учебные и научно-исследовательские институты нового типа, основной задачей которых является развитие определенной отрасли науки. Этого в дореволюционной России не было.

Советские математики в 20-е годы проделали грандиозную работу. Они заложили основы тех научных направлений, которые проложили пути к созданию многих новых школ в советской науке в 30—40-е годы. Во всех свершениях советского народа, в его достижениях, дерзаниях и творческих успехах есть часть труда и советских математиков, который был выполнен ими еще в героические 20-е годы.

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В СССР В 30-е ГОДЫ

#### 1

#### Развитие высшей школы в годы первых пятилеток

Первый пятилетний план развития народного хозяйства СССР разрабатывался по директивам ЦК ВКП(б) с 1927 г. В результате большой и интенсивной работы коллектива Госплана СССР под руководством Г. М. Кржижановского и коллектива ВСНХ СССР под руководством В. В. Куйбышева были составлены два проекта пятилетнего плана — минимальный и оптимальный. Оба проекта были вынесены на обсуждение XVI Всесоюзной конференции ВКП(б), состоявшейся в Москве в апреле 1929 г. Конференция приняла оптимальный проект плана, указав, в частности, что пятилетний план есть план создания фундамента для социалистического общества.

Претворяя в жизнь первый пятилетний план, советский народ начал строить крупные машиностроительные и металлургические заводы: Уральский завод тяжелого машиностроения, Краматорский и Горловский машиностроительные заводы, завод сельскохозяйственного машиностроения в Ростове-на-Дону и др. Была заложена вторая угольно-металлургическая база на Востоке — Урало-Кузнецкий комбинат. Решающими стройками первой пятилетки стали Магнитогорский, Кузнецкий и Запорожский металлургические комбинаты, Волгоградский, Харьковский и Челябинский тракторные заводы, Уральский и Новокраматорский машиностроительные заводы, Бобриковский и Березниковский химические комбинаты, Первый московский подшипниковый завод, Горьковский и Московский автозаводы, Днепровская и Свирская гидроэлектростанции, Зуевская районная тепловая электростанция.

Проводившееся одновременно с крупнейшим промышленным строительством социалистическое преобразование сельского хозяйства означало окончательную ликвидацию капиталистического сектора в народном хозяйстве.

В условиях крупного промышленного строительства особенно важным стал вопрос подготовки кадров. Выступая на XVI съезде ВКП(б), В. В. Куйбышев указывал, что необходимой предпосылкой выполнения пятилетнего плана является решение проблемы кадров, а это требует решительного и резкого расширения и качественного улучшения практической работы в области подготовки и повышения квалификации кад-



ров промышленности. Чтобы обеспечить кадрами промышленность, надо было преобразовать высшую техническую школу, которая в то время ни количественно, ни качественно не удовлетворяла новым требованиям. Необходимо было не только ускорить подготовку инженеров существовавших ранее профилей, но и разработать планы подготовки специалистов совершенно новых профессий.

Реорганизация всей системы высшего технического образования, осуществленная в 1930—1931 гг., была основана на следующих принципиальных положениях. В качестве квалификационной характеристики за основу принималась узкая специализация инженеров. В связи с этим были сокращены сроки их подготовки. Одни высшие технические учебные заведения перестраивались на трехлетний курс обучения, с более узкой специализацией, другие — на четырехлетний курс, с более широкой подготовкой. Было решено также проводить одновременно с теоретическим обучением непрерывную производственную практику, однако это решение выполнялось лишь некоторыми вузами.

Сокращение сроков обучения обусловило жесткие требования к учебным планам и программам. Все предметы были распределены по четырем циклам: общественно-политическому, физико-математическому, общетеchnическому и специальному. Удельный вес предметов физико-математического цикла был следующим: математика — 50, механика — 30, физика и химия — 20%.

Одновременно проводились организационные мероприятия. Высшие учебные заведения были переданы в ведение главных управлений ВСНХ и разукрупнены. На базе отдельных факультетов вузов были созданы самостоятельные институты, например на базе Уральского политехнического института — институты стали, цветной металлургии, химико-технологический, строительный, лесотехнический, горный, машиностроительный, энергетический; на базе Одесского политехнического института — институт инженеров водного транспорта, электротехнический, мукомольный, консервный и энергетический институты. Очень сложную переформировку прошли ленинградские и московские институты: они были разукрупнены на факультеты-институты, но некоторые факультеты или специальности аналогичного профиля разных институтов объединялись в новые институты. В частности, из Московского высшего технического училища было создано пять новых институтов, в состав одного из них — Московского механико-машиностроительного института им. Баумана — вошли все механические отделения и специальности других московских вузов.

Вследствие децентрализации управления вузами образовалось несоответствие в программах отдельных вузов, однако на предметах физико-математического цикла она отразилась менее заметно.

В 1931 г. завершился первый этап реорганизации высших технических учебных заведений. Была ликвидирована многопредметность (например, в Томском технологическом институте раньше студенты изучали до 165 предметов), уточнен профиль инженеров, выпускаемых вузами, изменена география самих вузов: вступили в строй многие новые вузы Урала, Средней Азии, Дальнего Востока, Закавказских республик.

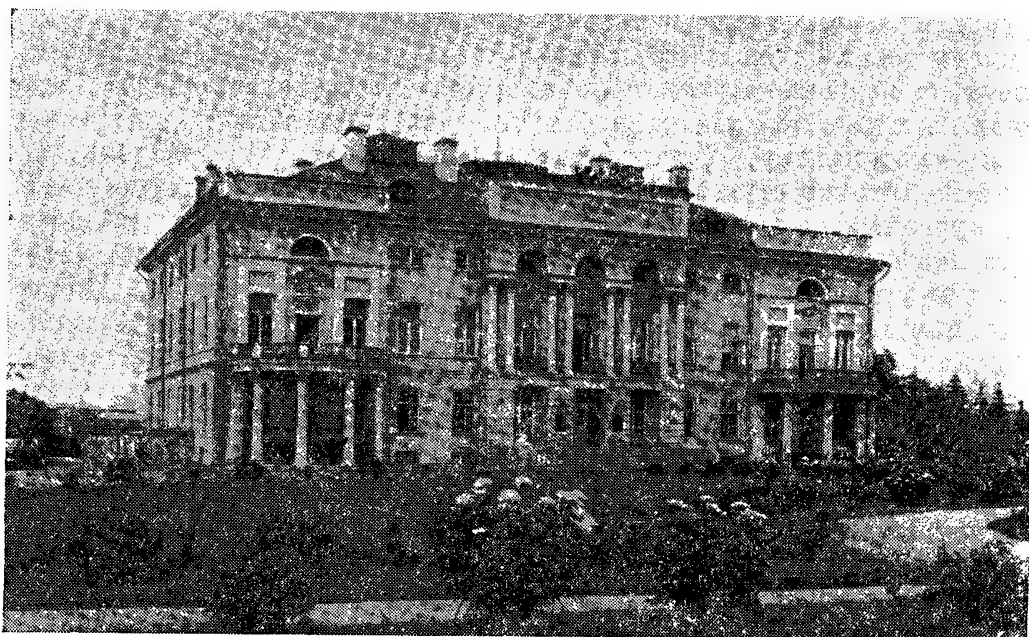
При сокращении сроков обучения возникла серьезная задача: за счет каких предметов следует сокращать сроки обучения. Поскольку время, отведенное на изучение профилирующих предметов, оказалось явно недостаточным, пришлось уменьшить число часов на общетеоретические предметы — математику, физику, химию и механику, а это сразу же сказалось на подготовке студентов к слушанию специальных предметов на старших курсах. Уже в декабре 1932 г. с резкой статьей по этому вопросу выступил академик И. Г. Александров. «Инженер, не владеющий математическими методами, — писал он, — это не инженер, а монтер... Инженер в полном смысле этого слова не мыслим без знания математики. Ничего нельзя сделать без математики: мост построить нельзя, плотину — нельзя, гидростанцию — нельзя. Сокращать объем преподавания математики — преступление. Надо изучать ее как можно в большем объеме, а главное — как можно основательнее»<sup>1</sup>. Эти слова знаменитого инженера, строителя Днепрогэса, отражали мнение большинства работников высшей школы. Повышение требований к математической подготовке студентов высших технических учебных заведений стало серьезной задачей в дальнейшей работе высшей школы.

В результате героических усилий нашего народа под руководством Коммунистической партии план первой пятилетки был успешно выполнен и перевыполнен. Однако положение с кадрами все же оставалось узким местом: 21 тыс. инженеров и техников, выпущенных техническими вузами в 1931 г., 38 тыс. — в 1932 г. не могли полностью удовлетворить потребности бурно растущей промышленности. Поэтому в 1933 г. перед высшей школой были поставлены две неотложные задачи — качественная и количественная: значительно увеличить выпуски втузов и одновременно повысить качество учебного процесса. Мелкие специализированные втузы, не имевшие зачастую ни лабораторий, ни квалифицированных преподавателей, не могли решить эти задачи. И в 1933 г. началось новое преобразование высшей школы, которое должно было сохранить преимущество первого преобразования — массовость подготовки кадров, но обеспечить при этом высокое качество учебного процесса и создать наиболее благоприятные условия для развития науки.

На базе слияния мелких втузов были созданы индустриальные институты, а также крупные институты по отраслям промышленности — машиностроительные, инженерно-строительные, химико-технологические и др. Из 362 втузов было сформировано 280, число учащихся в которых составляло 265 тыс. Аналогичные мероприятия были проведены и по другим высшим учебным заведениям. На Украине в результате слияния физико-химико-математических институтов с институтами профобразования были восстановлены университеты. С октября 1933 г. приступили к работе четыре университета: Киевский, Харьковский, Одесский и Днепропетровский. На них возлагалась новая задача: подготовка не только педагогов, но и работников науки для научно-исследовательских институтов и высших учебных заведений, специалистов для промышленности

---

<sup>1</sup> И. Г. Александров. За математическое образование инженера. — Техника, 1932, № 118.



Здание Президиума Академии наук СССР.

(работников заводских лабораторий, инженеров-вычислителей и пр.). Это, в свою очередь, обусловило переработку и изменение существующих учебных планов.

Преобразования, связанные с индустриализацией страны, затронули не только высшую школу, но и научные учреждения. Роль науки в деле индустриализации страны была раскрыта в важнейших партийных документах — постановлениях ЦК ВКП(б) «О мероприятиях по укреплению научной работы в связи с итогами 2-й Всесоюзной конференции марксистско-ленинских научно-исследовательских учреждений» (май 1929 г.)<sup>2</sup>, «О журнале „Под знаменем марксизма“» (январь 1931 г.)<sup>3</sup> и «О работе Комакадемии» (март, 1931 г.)<sup>4</sup>.

23 мая 1930 г. был принят новый устав Академии наук, возлагавший на нее обязанность «вести исследования во всех областях теоретического знания, всемерно способствовать развитию исследовательской мысли, содействовать выработке единого научного метода на основе материалистического мировоззрения». Основной задачей академии являлось подчинение всей своей научной работы нуждам социалистического строительства в стране.

В 1932 г. в состав Академии наук впервые были избраны ученые технических специальностей — И. Г. Александров, И. П. Бардин, А. В. Вин-

<sup>2</sup> О мероприятиях по укреплению научной работы в связи с итогами 2-й Всесоюзной конференции марксистско-ленинских научно-исследовательских учреждений. Постановление ЦК ВКП(б) от 27 мая 1929 г. — Правда, № 158, 13 июля, 1929, стр. 3.

<sup>3</sup> О журнале «Под знаменем марксизма». Постановление ЦК ВКП(б) от 25 января 1931 г. — Справочник партийного работника, 1934, вып. 8, стр. 340.

<sup>4</sup> О работе Комакадемии. Постановление ЦК ВКП(б) от 15 марта 1931 г. — Там же, стр. 340—342.

тер, Г. О. Графтио и другие, хотя она и состояла по-прежнему из двух отделений: отделения математических и естественных наук и отделения общественных наук. В этом же году были организованы Уральский, Дальневосточный и Закавказский филиалы Академии наук и две ее базы — Казахская и Таджикская. Весьма важным событием в научной жизни страны явилось постановление СНК СССР от 25 апреля 1934 г. о переводе Академии наук в Москву.

Основной и решающей хозяйственной задачей второй пятилетки являлось *завершение реконструкции всего народного хозяйства, создание новейшей технической базы для всех отраслей народного хозяйства*<sup>5</sup>. Перед наукой были поставлены задачи огромной важности, прямо указанные в решениях XVII съезда ВКП(б). Исходя из этих документов был разработан и принят новый устав Академии наук (ноябрь 1935 г.), согласно которому, в частности, в ее составе организовывалось отделение технических наук.

Некоторым преобразованиям подверглась также структура филиалов Академии наук. В 1935 г. Закавказский филиал разделился на три самостоятельных филиала: Азербайджанский, Армянский и Грузинский. Несколько позднее Таджикская и Казахская базы были преобразованы в филиалы. В 1939 г. был образован Узбекский, а в 1940 г. — Туркменский филиал.

В результате выполнения второй пятилетки Советский Союз вышел по промышленной продукции на второе место в мире, обогнав Германию, Англию и Францию. XVIII съезд ВКП(б) принял третий пятилетний план развития народного хозяйства СССР (1938—1942 гг.). Этот план предусматривал, в частности, развитие промышленности восточных районов страны, на долю которых приходилось около  $\frac{1}{3}$  всех капитальных вложений. За три года третьей пятилетки производство промышленной продукции Урала, Поволжья, Сибири, Средней Азии и Казахстана возросло в полтора раза, что сыграло огромную роль в годы Великой Отечественной войны.

## 2

### **Математика в Академии наук СССР, ленинградских и московских высших учебных заведениях**

Состоявшиеся в 1929 г. выборы в Академию наук значительно пополнили ее состав. В частности, академиками были избраны С. Н. Бернштейн, И. М. Виноградов, Н. М. Крылов, Н. Н. Лузин, С. А. Чаплыгин, членами-корреспондентами — П. С. Александров, Б. Н. Делоне, Н. Г. Чеботарев и почетными академиками — Д. А. Граве и Д. Ф. Егоров. В начале 30-х годов ее членами-корреспондентами были избраны И. А. Лаппо-Данилевский, В. И. Смирнов, А. И. Некрасов, Н. С. Кошляков, Л. С. Лейбензон, С. Л. Соболев, Л. Г. Шнирельман, О. Ю. Шмидт, В. В. Голубев.

---

<sup>5</sup> КПСС в резолюциях. Ч. 3, стр. 151.

Основной научно-исследовательской организацией, объединявшей математиков Академии наук СССР в 30-х годах, продолжал оставаться Математический институт им. В. А. Стеклова. В 1934 г. институт был переведен в Москву (в Ленинграде в 1939 г. был открыт его филиал). Вместе с институтом в Москву переехали ленинградские математики И. М. Виноградов, Н. Е. Кочин, С. Л. Соболев и Б. Н. Делоне.

И. М. Виноградов с 1925 по 1934 г. руководил в Ленинградском университете кафедрой теории чисел и теории вероятностей и с 1932 г. возглавляет Математический институт им. В. А. Стеклова.

Н. Н. Лузин в начале 30-х годов отошел от преподавания и занялся исключительно научной работой в Математическом институте им. В. А. Стеклова, где с 1930 г. руководил отделом теории функций. Помимо теории функций он в эти годы разрабатывал также некоторые вопросы дифференциальной геометрии, написал учебники дифференциального и интегрального исчисления, основанные на переработанном им ранее тексте учебников Гренвилля, серию статей для первого издания БСЭ, в том числе статьи «Функция», «Дифференциальное исчисление», а также несколько работ историко-математического содержания. В 1933 г. вышла его монография «Современное состояние теории функций действительного переменного».

В области теории функций действительного переменного в Академии наук СССР работал также С. Н. Бернштейн. Оба цикла его работ — по теории функций и по теории вероятностей — связаны с исследованиями петербургской математической школы. С. Н. Бернштейн является создателем современной конструктивной теории функций вещественной переменной, которая возникла, как он сам писал, на основе идей двух великих математиков прошлого столетия — Вейерштрасса и Чебышева. В теории вероятностей результаты С. Н. Бернштейна весьма разнообразны. В частности, ему принадлежат весьма общие, в известном смысле завершающие результаты по предельным теоремам как для независимых, так и для зависимых случайных величин. Он построил аксиоматику теории вероятностей.

В. И. Смирнов продолжал свои исследования в области математической физики, аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории функций комплексного переменного и по-прежнему преподавал в Ленинградском университете. В середине 30-х годов он вместе с Г. М. Фихтенгольцем начал исследования по функциональному анализу и продолжал работу над «Курсом высшей математики», ставшим в конце 30-х годов наиболее популярным учебником по этому предмету.

Математические работы А. И. Некрасова (1883—1957), по преимуществу занимавшегося аэродинамикой, посвящены линейным интегро-дифференциальным и нелинейным интегральным уравнениям. В 1946 г. Некрасов был избран академиком.

Исследования Н. С. Кошлякова, преподававшего в 30-е годы в Ленинградском университете, относились к аналитической теории чисел и специальным функциям.

С. Л. Соболев, ученик В. И. Смирнова, работал в Математическом институте им. В. А. Стеклова (с 1932 г.) и в Московском университете

(с 1935 г.). Его исследования, выполненные в этот период, посвящены решению основных задач дифференциальных уравнений с частными производными, как линейных, так и нелинейных. В них подробно рассмотрены некоторые основные понятия (частной производной, обобщенного решения уравнения), построены функциональные пространства (пространства Соболева), сыгравшие существенную роль в дальнейшем развитии функционального анализа и теории уравнений с частными производными, а также решена задача Коши для уравнения гиперболического типа в функционалах.

Л. Г. Шнирельман (1905—1938) работал в Московском университете и Математическом институте им. В. А. Стеклова. Исследования его были весьма разнообразными. Особенно широко известен разработанный им метод решения проблемы Гольдбаха (в ослабленной постановке), основанный на введенном им понятии о плотности последовательности натуральных чисел. Вместе с Л. А. Люстерником Шнирельман применил топологические методы к решению задач вариационного исчисления.

О. Ю. Шмидт был избран членом-корреспондентом (а в 1935 г. — академиком) АН СССР по математике и географии. В развитии алгебраических исследований большую роль сыграли его работы по теории групп. С 1926 г. он был профессором Московского университета, где с 1930 г. возглавлял алгебраический семинар. Общеизвестны географические исследования О. Ю. Шмидта и его участие в Челюскинской экспедиции. В 1937 г. ему было присвоено звание Героя Советского Союза.

В. В. Голубев начал работать в Москве с 1930 г., сначала в ЦАГИ и Московском университете, а с 1932 г. также в Военно-воздушной академии им. Н. Е. Жуковского. Он продолжал свои исследования по теории автоморфных функций. В 1941 г. опубликовал «Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений».

В 1939 г. в Академию наук СССР пришло новое большое пополнение. Всего было избрано 56 академиков и 102 члена-корреспондента, в частности по отделению математических и естественных наук академиками — А. Н. Колмогоров и С. Л. Соболев, членами-корреспондентами — А. О. Гельфонд, Л. С. Понтрягин, И. И. Привалов, А. Н. Тихонов и А. Я. Хинчин; по отделению технических наук академиками — Н. И. Мусхелишвили и Н. Е. Кочин, членами-корреспондентами — И. И. Артоблевский и С. А. Христианович.

А. Н. Колмогоров в 30-х годах был профессором Московского университета, а с 1939 г. — также заведующим отделом Математического института им. В. А. Стеклова. Диапазон математических исследований Кол-



С. Л. Соболев.



И. И. Привалов.

могорова, выполненных в 30-е годы, весьма широк. Его работы относятся к теории вероятностей, теории функций, теории множеств, функциональному анализу, математической логике, философии и истории математики и другим областям. Ему принадлежит несколько статей в первом издании БСЭ, в том числе статья «Математика».

И. И. Привалов продолжал свои исследования в области теории функций комплексного переменного, написал известные руководства по теории функций комплексного переменного и интегральным уравнениям.

А. Я. Хинчин в рассматриваемый период работал в Московском университете, с 1939 г. — в Математическом институте им. В. А. Стеклова. Кроме исследований по теории вероятностей и теории чисел ему

принадлежат также некоторые работы по философии математики и истории математики. А. Я. Хинчин является одним из первых советских ученых, занявшихся изучением советского периода в истории отечественной математики.

А. О. Гельфонд начал научную и педагогическую деятельность в 1929 г. Его исследования по теории чисел и теории функций быстро приобрели широкую известность. В частности, он разработал метод, примененный им самим, а также другими учеными для исследования трансцендентных чисел.

Первые работы Л. С. Понтрягина появились в 1927 г., еще до окончания им Московского университета. Ему принадлежат крупные открытия в области топологии, теории групп и теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

А. Н. Тихонов, также начавший с исследований по топологии, работами 30-х годов внес большой вклад в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Основные труды Н. Е. Кочина (1901—1944) посвящены динамической метеорологии, гидро- и аэродинамике. Математические его работы относятся к области дифференциальных уравнений и теории матриц. Ему принадлежит широко известный курс «Векторное исчисление и начала тензорного исчисления».

Научные интересы С. А. Христиановича относятся преимущественно к механике жидкостей и газов.

Исследования А. Н. Крылова, выполненные в 30-е годы, в основном относятся к теории корабля и прикладной механике. Однако он продолжал и математические исследования — по вопросам методов приближенных вычислений, а также написал ряд очерков и статей по истории науки и техники.

Тридцатые годы для московской математической школы были периодом значительного усиления научных исследований и перехода к изучению новых проблем. За эти годы коллектив московских математиков пополнился талантливой молодежью, окончившей аспирантуру в Научно-исследовательском институте математики и механики 1-го МГУ, а также при отдельных математических кафедрах московских высших учебных заведений. Институт математики и механики 1-го МГУ состоял из семи отделов — анализа и теории функций, топологии, синтетической геометрии, классической и тензорной дифференциальной геометрии, алгебры и теории чисел, теории вероятностей и математической статистики, механики — и сектора истории и философии математики и механики. В январе 1935 г. отдел механики был преобразован в Институт механики. Кроме того, как отмечалось выше, в 1934 г. в Москву был переведен Математический институт им. В. А. Стеклова Академии наук СССР. Таким образом, с середины 30-х годов в Москве было уже два крупнейших в Советском Союзе математических института.

Расширение исследовательской тематики сильнейшего в Советском Союзе коллектива математиков Москвы происходило не только за счет чисто теоретических проблем: в начале 30-х годов, в связи с постановлением партии и правительства о науке и ее роли в деле строительства социализма, перед математиками и механиками был поставлен вопрос о решении, наряду с развитием математической теории, задач, связанных с первоочередными проблемами промышленности. 21—26 октября 1932 г. состоялась Вторая всесоюзная конференция по планированию научно-исследовательской работы в тяжелой промышленности, на которой с докладом выступил А. И. Некрасов. Указав на сложность современной техники, продвижение в которой невозможно без глубокой научной базы, он отметил, что для синтеза теоретических и прикладных наук необходимы реформа физико-математических факультетов университетов в сторону подготовки специалистов для нужд промышленности и развитие научно-исследовательских институтов. Характерно, что уже к самому началу 30-х годов многие советские математики выполнили работы, получившие важные применения в технике. Некрасов отметил также, что для решения проблем упругих колебаний, к которым приводятся многие вопросы техники, необходим хорошо разработанный математический аппарат. Таким аппаратом являются дифференциальные уравнения в частных производных, а также интегральные уравнения. В связи с решением важных аэродинамических задач С. А. Чаплыгин разработал новые методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений.

Движение машин с большими скоростями выдвинуло проблему его устойчивости. Пути решения в этих вопросах были намечены в свое время в трудах Пуанкаре и Ляпунова. Трудности решения подобного рода задач заключались в том, что нельзя было ограничиваться малыми отклонениями. Этой теме посвятили свое исследование в 30-х годах Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов. Они шли по пути, указанному Ляпуновым. Идеи Пуанкаре развивал А. А. Андронов.

Современная механика изучает периодические, квазипериодические, почти периодические, рекуррентные движения. Исследование этих по-





Л. С. Понтрягин.

вых видов движения, связанное с топологией, вели В. В. Степанов, А. Я. Хинчин, Л. С. Понтрягин, А. Н. Тихонов.

Весьма важными являются изученные в рассматриваемый период задачи гидродинамики и теории упругости. Плоскую задачу гидродинамики исследовали Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин. Основным математическим методом, применявшимся к ней, был метод конформного отображения, в значительной степени разработанный учеными московской математической школы.

Исследования по теории функций комплексного переменного успешно развивали Н. Н. Лузин, И. И. Привалов и В. В. Голубев, М. А. Лаврентьев, М. В. Келдыш, А. О. Гельфонд, А. Н. Маркушевич и др.

Начало научной и педагогической деятельности М. А. Лаврентьева в москов-

ских высших учебных заведениях относится к концу 20-х годов. Исследования в области теории функций комплексного переменного, начатые им еще в 1925 г., он продолжал на протяжении всех 30-х годов. Фундаментальные его труды в этом направлении посвящены теории конформных отображений. Разработанные им методы были впоследствии распространены на созданную им теорию квазиконформных отображений. В соавторстве с Л. А. Люстерником он написал большую монографию по вариационному исчислению (издана в 1935 г.). Лаврентьев воспитал целую плеяду ученых, имена многих из них ныне широко известны — это М. В. Келдыш, Л. И. Седов, А. Ю. Ишлинский, А. И. Маркушевич и др.

Фундаментальные исследования М. В. Келдыша, начатые еще в 1934 г., связаны с тематикой ЦАГИ по аэродинамическим проблемам и созданию соответствующего математического аппарата. Для их выполнения он разработал эффективные методы применения многих разделов теории функций комплексного переменного. К 30-м годам относится цикл его работ по математической физике, в частности по задачам Дирихле и Неймана, изучению последовательностей полиномов и конформному отображению круга на область со спрямленной границей. Некоторые из этих работ выполнены совместно с М. А. Лаврентьевым.

А. И. Маркушевич в 30-х годах занимался исследованиями проблем теории конформных отображений областей с переменной границей.

Проблематика исследований в области топологии, выполненных в 30-е годы, связана с топологическим семинаром при Московском университете, которым руководил П. С. Александров. Комбинаторная топология точечных множеств, разработанная Александровым в 1926—1930 гг., сыграла большую роль в развитии дальнейших исследований в области топологии. В 1932 г. Л. С. Понтрягин доказал известный закон двойственности. «Построенная Понтрягиным при доказательстве его закона двой-

ственности теория характеров топологических коммутативных групп и дальнейшие исследования Понтрягина по топологическим группам составляют одно из значительнейших достижений новейшей математической мысли вообще и кладут в то же время основу новой математической дисциплине — „топологической алгебре“<sup>6</sup>.

Теорию нормированных колец в топологических пространствах в конце 30-х годов начал разрабатывать И. М. Гельфанд. Его исследования относились также к теории дифференциальных уравнений. Он прочитал несколько курсов в Московском университете.

Исследования исключительной важности в области теории вероятностей проводились в Московском университете под руководством А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина. Колмогоров в 1930 г. разработал на основе общего понятия меры аксиоматику теории вероятностей. Тогда же, в монографии «Об аналитических методах теории вероятностей» он создал теорию случайных процессов марковского типа. Одновременно Хинчин развил теорию случайных процессов, связав ее с общей теорией динамических систем. В результате этих основополагающих исследований теория вероятностей далеко переросла границы классической теории, установив связи с функциональным анализом и теорией уравнений математической физики. К ним примыкают работы Е. Е. Слуцкого, В. И. Гливленко, Н. В. Смирнова, Б. В. Гнеденко и др.

Е. Е. Слуцкий занимался вопросами теории вероятностей и, главным образом, продолжал свои исследования в области математической статистики, начатые им еще в Киеве. В области математической статистики работали также А. Я. Боярский, В. И. Старовский и В. И. Хотимский.

В. И. Гливленко (1896—1940) занимался теорией вероятностей, вопросами анализа, основаниями математики и математической логикой. Теорию вероятностей и математическую статистику изучал также Н. В. Смирнов (1900—1966).

Теория вероятностей составляла основную тематику исследований Б. В. Гнеденко. Результаты, полученные им в этой области, а также в области математической статистики, имеют важное значение как в развитии теории, так и в практических приложениях.

Исследования московской математической школы по теории чисел ведут свое начало от трудов А. Я. Хинчина и его семинара (1925—1926 гг.), участниками которого были Л. Г. Шнирельман, А. О. Гельфонд, Н. Г. Чудаков, Н. П. Романов.



М. В. Келдыш.

<sup>6</sup> П. С. Александров. Математика в Московском университете в первой половине XX века, стр. 32.

Л. Г. Шнирельман создал новый метод решения задач аддитивной теории чисел, основанный на рассмотрении плотности числовых последовательностей. А. О. Гельфонд выполнил ряд исследований в области теории трансцендентных чисел.

Продолжал свои исследования в области теории чисел И. М. Виноградов. Он разработал новые исключительно глубокие методы и решил проблему Гольдбаха, доказав, что всякое нечетное число, начиная с некоторого числа  $N_0$ , является суммой не более трех простых чисел.

Работы Б. Н. Делоне (с 1935 г. он в Московском университете) в рассматриваемый период относятся главным образом к геометрической теории чисел. В этом направлении он является продолжателем идей Г. Ф. Вороного.

Исследования в области современной алгебры в Московском университете начались лишь в 20-х годах (семинар О. Ю. Шмидта по теории групп). С 1930 г. в Московском университете работает А. Г. Курош. Первые его работы относятся к абстрактной топологии, затем он перешел к исследованиям в области теории групп и других вопросов общей алгебры. В 1937 г. Курош начал изучать теорию абелевых групп без кручения, имеющих конечный ранг. Полную теорию этого класса групп позднее построил А. И. Мальцев.

Московская школа функционального анализа возникла в самом конце 20-х годов. Первыми ее представителями были А. Л. Люстерник, В. В. Немыцкий, Л. Г. Шнирельман, А. И. Плеснер. Ученик Н. Н. Лузина Л. А. Люстерник в конце 20-х годов в статьях, написанных в соавторстве с Л. Г. Шнирельманом, рассмотрел вопросы применения топологических методов к решению задач дифференциальной геометрии и анализа. В начале 30-х годов аналогичные вопросы разрабатывал А. Н. Колмогоров, развивший ряд основных идей московского направления функционального анализа. А. И. Плеснер длительное время руководил в Московском университете семинаром по функциональному анализу. Во второй половине 30-х годов функциональным анализом начал заниматься ученик А. Н. Колмогорова по Московскому университету И. М. Гельфонд.

Теорию дифференциальных уравнений в Московском университете в 30-х годах исследовали В. В. Степанов, И. Г. Петровский, Л. С. Понтрягин, В. В. Немыцкий. Петровский занимался вначале обыкновенными дифференциальными уравнениями, затем распространил свои исследования на уравнения в частных производных. Ему принадлежат первые большие работы по общей теории систем уравнений в частных производных. Специальными вопросами теории дифференциальных уравнений в связи с теорией колебаний и нелинейной механикой занимались А. А. Андронов и Б. В. Булгаков.

В. В. Степанов с 1930 г. руководил семинаром по качественной теории дифференциальных уравнений. Он выполнил ряд работ по почти периодическим функциям. Его ученик В. В. Немыцкий занимался изучением свойств метрического пространства. В 30-х годах Немыцкий посвятил свои исследования динамическим системам и интегральным уравнениям.

Геометрию в Московском университете в 30-е годы развивали С. П. Фиников, С. С. Бюшгенс, В. Ф. Каган, П. К. Рашевский и их ученики.

Исследования С. П. Финикова относились к классической дифференциальной геометрии, в области которой им создана большая школа. Его работы посвящены теории изгиба, теории конгруэнций, проективно-дифференциальной геометрии и другим вопросам.

С. С. Бюшгенс изучал различные вопросы дифференциальной и кинематической геометрии, в частности применение теории функций комплексного переменного к задачам кинематики плоских механизмов.

В. Ф. Каган создал в университете направление по многомерной и тензорной дифференциальной геометрии. Представителями этого направления являются П. К. Рашевский, А. П. Норден, В. В. Вагнер, Я. С. Дубнов, Н. В. Ефимов и др.

Научные исследования П. К. Рашевского разнообразны: они относятся к геометрии пространств, теории геометрических объектов, теории конгруэнтов, многомерных пространств, обобщению римановых пространств, топологическим вопросам дифференциальной геометрии и т. д.

В конце 20 — начале 30-х годов в Московском университете возобновилось преподавание истории математики, а также исследования по философии математики. Заслуга в этом принадлежит С. А. Яновской и М. Я. Выгодскому. В 1935 г. под их руководством в университете начал работать научный семинар по истории математики. Одновременно над вопросами истории математики работал в МВТУ А. П. Юшкевич, а в Московском областном педагогическом институте И. К. Андронов.

С. А. Яновская одна из первых начала разрабатывать вопросы марксистско-ленинской методологии в математике. Особо важное значение имеет ее большая работа по исследованию, публикации и комментированию математических рукописей Карла Маркса. В 1936 г. под ее редакцией вышел в свет «Сборник трудов по философии математики».

Работы М. Я. Выгодского относятся главным образом к истории математики



Л. А. Люстерник.



И. Г. Петровский.



В. В. Степанов.

в Вавилоне и Древней Греции, а также к истории геометрии.

А. П. Юшкевич занимался вопросами истории математики XVII и XVIII вв., а в конце 30-х годов приступил к исследованию истории математики в России. А. П. Юшкевич и М. Я. Выгодский принимали участие в развернувшейся в 30-е годы работе по изданию на русском языке сочинений Кеплера, Декарта, Монжа и других зарубежных классиков математики.

Как показано выше, математическая жизнь в Москве в 30-е годы объединялась вокруг Института математики и механики Московского университета, а со второй половины этого десятилетия — вокруг Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР.

В эти же годы растет сеть специальных научно-исследовательских институтов, также оказавших большое влияние на развитие математики. Особенно значительной является роль Центрального аэрогидродинамического института. Исключительную роль в развитии советской математики и механики сыграл первый руководитель института Н. Е. Жуковский. В университете и Высшем техническом училище он подготовил группу инженеров с глубоким математическим образованием. Это В. П. Горячкин, Н. И. Мерцалов, А. И. Сидоров и др. В 30-е годы педагогические идеи Жуковского и его ближайших учеников развивали молодые механики, которые получили фундаментальное математическое образование и научное творчество которых в определенной степени относится к прикладной математике. К концу 20-х годов относится начало научной деятельности И. И. Артоболевского, ученика В. П. Горячкина и Н. И. Мерцалова. В 30-х годах он заложил основы советской школы теории механизмов и машин. Им были развиты весьма своеобразные геометрические методы исследования плоских и пространственных механизмов.

Идеи Н. Е. Жуковского в области гидравлики развивал его ученик Л. С. Лейбензон, исследования которого относятся к движению вязких жидкостей в трубах и теории фильтрации, а также к другим областям механики.

Гидродинамике посвящены работы С. А. Чаплыгина, Л. И. Седова, М. А. Лаврентьева, М. В. Келдыша, В. В. Голубева, А. И. Некрасова, выполненные в основном в ЦАГИ. Ими изучены теория неустановившихся движений, теория крыла и винта самолета, волновое сопротивление жидкости и др. В конце 30-х годов начал научную деятельность А. Ю. Ишлинский. Первые его работы относятся к теории сельскохозяйственных машин и теории трения.

Важную роль в 30-е годы играло Московское математическое общество. В 1932 г. было избрано новое правление общества, а его президентом —

П. С. Александров. По словам А. Г. Куроша, именно в начале 30-х годов «началась и широко развивалась активная общественно-научная деятельность общества».

Общество работало в это время много, как можно судить по протоколам. Правление не боялось заседать часто; если было нужно, то собиралось дважды в месяц, и ему было что делать. Оказалось, что общества касается все, что имеет какое-либо отношение к математике и ее преподаванию, все, что влияет на развитие советской математики и на уровень математической культуры в стране. Общество стало в это время в полном смысле этих слов организатором и выразителем общественного мнения московских математиков, и его авторитет очень быстро стал исключительно высоким»<sup>7</sup>.

В 1935 г. Московское математическое общество учредило премии для молодых математиков. Первые премии были присуждены И. М. Гельфанду, М. В. Келдышу и П. К. Ращевскому.

После перевода Академии наук в Москву между ведущими математическими организациями страны установились более прочные и глубокие связи. Несколько сотрудников Математического института им. В. А. Стеклова были кооптированы в состав правления Московского математического общества. Позднее установились связи также с другими отечественными математическими объединениями. Печатным органом Московского математического общества оставался «Математический сборник». Этот единственный в 30-е годы центральный математический журнал выходил нерегулярно. Редакция журнала решила сделать его главным органом советских математиков, укрепить его и увеличить периодичность. Редакцией руководил О. Ю. Шмидт, помощником его в этом важном деле был А. Ф. Бермант (1904—1959), занимавшийся теорией дифференциальных и интегральных уравнений, а также вопросами преподавания математики в высшей школе.

Рассмотрим состояние исследований по математике и ее преподавание в Ленинграде. До 1934 г. здесь находились Академия наук СССР и Математический институт им. В. А. Стеклова. Значительные работы проводились также на кафедрах университета, политехнического и горного институтов и других высших учебных заведений, число которых в 30-е годы резко возросло.

Осенью 1934 г. при Ленинградском университете был открыт Научно-исследовательский институт математики и механики. Постепенно он начал организовывать научные семинары по отдельным проблемам матема-



И. И. Артоболевский.

<sup>7</sup> А. Г. Курош. Московское математическое общество за последнюю треть века. — Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 3 (123), стр. 11.



И. М. Гельфанд.

тических наук, участие в которых принимали преподаватели не только университета, но и других высших учебных заведений Ленинграда. После перевода Математического института АН СССР в Москву Институт математики и механики становится основным центром математической науки в Ленинграде.

В 30-х годах значительно расширилась тематика исследований ленинградских математиков. Начали развиваться исследования в области геометрии и топологии. Математики, работавшие в различных направлениях, принимали участие в специальных семинарах, число которых достигало 12.

В конце 20 — начале 30-х годов в Сейсмологическом институте АН СССР велись исследования по теории распространения волн в упругой среде. Начало этим исследованиям было положено работами В. И. Смирнова и С. Л. Соболева. В 1932 г. Смирнов и Соболев предложили метод решения динамических задач теории упругости при помощи теории функций комплексного переменного, что открыло большие возможности в решении целого ряда весьма актуальных задач механики. С этими работами по теории распространения волн связаны и последующие важные исследования С. Л. Соболева по теории уравнений в частных производных.

В Ленинградском университете кафедрой дифференциальных уравнений заведовал Н. М. Гюнтер, с 1932 г. — Г. М. Мюнтц, а с 1938 г. — снова Гюнтер. Мюнтц работал в области теории интегральных уравнений. С 1932 по 1934 г. он руководил в университете семинаром по качественной теории дифференциальных уравнений. Для Гюнтера 30-е годы были завершением его научно-педагогической деятельности (умер в 1941 г.). Всего в Ленинградском университете он проработал 47 лет, более 30 лет — в Институте инженеров путей сообщения (Гюнтер преподавал также в других ленинградских высших учебных заведениях). По словам близких ему людей, он только за три недели до смерти оставил педагогическую работу.

В 30-е годы в Ленинградском университете преподавали также Б. Н. Делоне, Г. М. Фихтенгольц, Н. П. Еругин, В. И. Крылов, Л. В. Канторович.

Н. П. Еругин, ученик Н. М. Гюнтера, начал в середине 30-х годов исследования по теории дифференциальных уравнений. Хотя с 1935 по 1938 г. он читал в университете курс математического анализа и теории функций комплексного переменного, его научные интересы с самого начала относились к области дифференциальных уравнений. С 1938 по 1941 г. он работал на кафедре дифференциальных уравнений.

Выше отмечалось, что аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений составляла одно из направлений деятельности



И. А. Лаппо-Данилевского. Труды его были изданы посмертно. В обработке и публикации его научного наследия принимали участие В. И. Смирнов, Н. Е. Кочин, Н. П. Еругин и В. И. Крылов.

В. И. Крылов занимался дифференциальными и интегральными уравнениями и вариационным исчислением. Написанный им совместно с В. И. Смирновым и Л. В. Канторовичем курс вариационного исчисления (1933 г.) был одним из первых учебников по этому предмету для высшей школы.

В 1927 г. начал исследования по теории дифференциальных уравнений, а затем по топологии А. А. Марков (младший).

Существенные результаты в области конформных отображений в 30-е годы получил Г. М. Голузин (1906—1952), работавший в Ленинградском университете с 1930 г.

С задачами функционального анализа и применения их к вопросам рационализации некоторых областей производства связаны исследования Л. В. Канторовича. Они относятся к теории дифференциальных уравнений, общей теории функций, теории конформных отображений. Канторовичем предложены новые методы сопряженных тригонометрических рядов для конформного отображения и вариационный метод для предельных задач эллиптического типа.

Теорией конформных отображений занимался также профессор Ленинградского политехнического института С. А. Гершгорин (1901—1933). Первые его работы посвящены разысканию механизмов для воспроизведения математических функций. В связи с этим он занялся теорией приближенного интегрирования дифференциальных уравнений и теорией конформных отображений.

Б. Н. Делоне до переезда в Москву руководил в Институте математики в Ленинграде семинаром по геометрии. В своих исследованиях он уделял много внимания геометрическим свойствам кристаллов и другим вопросам применения теории чисел к геометрии. Этими же вопросами занимался в 30-е годы его ученик А. Д. Александров. В конце 30-х годов научные интересы Александрова были сосредоточены на исследовании поверхностей и объемов выпуклых тел. Исследования в области геометрии (в частности, дискретной геометрии) проводил в университете также В. А. Тартаковский.

Выше отмечалось, что в 30-е годы одним из источников расширения тематики исследований московских математиков являлся рост научных связей с Ленинградом. Подобное явление происходило и в Ленинграде, где начали разрабатываться некоторые вопросы, связанные с тематикой исследований ученых Москвы.



Н. П. Еругин.



Теорию функций действительного переменного в Ленинграде развивали Н. М. Гюнтер, В. И. Смирнов, Г. М. Фихтенгольц. В связи с переездом в 1933 г. в Ленинград С. Н. Бернштейна некоторые ленинградские математики сосредоточили свои исследования на вопросах конструктивной теории функций. К ним, в частности, принадлежали И. П. Натансон (1906—1964) и Е. В. Вороновская.

Алгебре в Ленинграде в 30-х годах были посвящены работы Д. К. Фаддеева, ученика Б. Н. Делоне и И. М. Виноградова. В области теории чисел специализировался Ю. В. Линник, работавший в Ленинградском университете с 1938 г.

Исследовательская работа на математических кафедрах ленинградских вузов и педагогических институтов имела свои давние традиции и постепенно расширялась, что особенно стало заметным в 30-е годы. В 1933 г. в Ленинградский политехнический институт пришел С. Н. Бернштейн, и математические кафедры этого, а затем и других технических вузов, организованных на базе его факультетов, явились в известной мере центрами научных исследований в различных областях математики. Так, в политехническом институте Г. А. Гринберг разрабатывал вопросы математической физики и смежные проблемы анализа, предмет изысканий М. Л. Франка (1878—1941) составили теория приближенных вычислений, графическое интегрирование и теория математических приборов. В педагогическом институте Е. С. Ляпин занимался изучением абелевых групп. В Ленинградской лесотехнической академии А. К. Митропольский работал в области математической статистики. Он опубликовал несколько руководств по этому предмету.

Выше отмечалось, что в 1939 г. в Ленинграде было открыто отделение Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (ЛОМИ). Членами-учредителями ЛОМИ были выделены В. А. Тартаковский (директор), А. Р. Марченко (ученый секретарь), Ю. В. Линник, Г. М. Голузин, А. А. Марков, Н. П. Еругин, Л. В. Канторович и Д. К. Фаддеев.

### **3**

#### **Развитие математики в других городах РСФСР**

Во многих новых высших учебных заведениях страны для развития точных и технических наук не было соответствующей базы. На помощь им пришли математики крупных научных центров. Они не только сами принимали непосредственное участие в работе молодых математических кафедр, но и подготовили целый ряд специалистов, широко распространивших идеи и методы больших творческих коллективов Москвы, Ленинграда, Казани, Киева и др.

В целях дальнейшего укрепления высших учебных заведений и повышения в них учебной и научно-исследовательской работы ЦИК СССР в 1932 г. принял постановление «Об учебных программах и режиме в высшей школе и техникумах». Это постановление выдвигало требование «укрепить существующие университеты, как учебные заведения, готовящие высококвалифицированных специалистов по общенаучным дисциплинам».

линам, а также педагогов, и развернуть университеты в тех республиках (Украина и др.), в которых их не имеется»<sup>8</sup>.

Научные исследования по математике в Казанском университете в 30-е годы проводились в нескольких направлениях. Н. Н. Парфентьев по-прежнему читал ряд математических курсов, а с 1930 г. заведовал кафедрой механики.

П. А. Широков продолжал начатую еще в середине 20-х годов работу по тензорному анализу. В 1934 г. он опубликовал монографию «Тензорное исчисление», ч. I, долго служившую одним из основных руководств по этому вопросу. К 30-м годам относятся его исследования по теории симметрических пространств и, в частности, обобщению пространств Шура. С 1932 г. Широков заведовал кафедрой математики, а после ее разделения, с 1934 г., — кафедрой геометрии.

Б. М. Гагаев, с 1933 г. руководивший кафедрой математического анализа, вместе со своими учениками вел исследования в этой области. Он рассмотрел вопросы, относящиеся к ортогональным и полигармоническим функциям, а также задачи дифференциальных уравнений в частных производных. Гагаев читал также математические курсы в Казанском педагогическом институте.

Исследованиями по дифференциальной геометрии в университете занимался В. А. Яблоков, ученик Н. Н. Парфентьева. С 1936 г. он руководил кафедрой общей механики. Ему принадлежат также работы в области теории дифференциальных уравнений.

Теорией дифференциальных уравнений и механикой занимался и другой ученик Н. Н. Парфентьева — Н. Г. Четаев (1902—1959). Ему принадлежат исследования по проблемам теории устойчивости движения. Он руководил в университете научным семинаром и создал научное направление по теории устойчивости движения. В 1940 г. Четаев переехал в Москву, где продолжал свои исследования.

К. П. Персидский, ученик Парфентьева и Четаева, занимался в 30-е годы теорией вероятностей, а затем перешел к исследованиям по устойчивости движения. В Казанском университете он работал до 1940 г., затем переехал в Алма-Ату.

Новое направление математических исследований в Казани связано с именем Н. Г. Чеботарева, исследовавшего вопросы теории групп Галуа, теории алгебраических чисел, групп Ли, продолжаемых полиномов и проблемы резольвент. Чеботарев принимал самое деятельное участие в организации в 1934 г. при университете научно-исследовательского института математики и механики и был его первым руководителем. «Н. Г. Чеботарев... был исключительно прост и общителен... Со своими слушателями и учениками он быстро устанавливал добрые и простые отношения, основанные на принципе равенства, вовлекал их в вопросы, которые сам разрабатывал. В живых, непринужденных беседах при обсуждении самых разнообразных математических проблем его собеседники получали

---

<sup>8</sup> Директивы ВКП (б) и постановления Советского правительства о народном образовании. Сб. документов за 1917—1947 гг. Приложение к журн. «Советская педагогика». Вып. 2. Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, М.—Л., 1947, стр. 86.



Н. Г. Четаев.

импульсы к творческой работе. Его влияние испытали на себе почти все казанские математики»<sup>9</sup>.

Северо-Кавказский государственный университет в 1930 г. был переименован в Ростовский-на-Дону. В следующем году в его составе был восстановлен физико-математический факультет, а на базе педагогического факультета организован педагогический институт. В 1933 г. в учебный план физико-математического факультета были внесены существенные изменения. По старому плану наибольшее внимание уделялось прикладному направлению — приближенному интегрированию, графическим методам, номографии и другим предметам, теперь же значительный вес приобрели основные математические дисциплины. Были организованы три кафедры: математического анализа, алгебры

вместе с теорией чисел и геометрии.

Д. Д. Мордухай-Болтовской, заведовавший кафедрой геометрии, кроме неевклидовой геометрии занимался задачами теории вероятностей, вопросами теории функций и др. В этот период им выполнены интересные исследования по истории математики, а также работа о принципах построения украинской и белорусской математической терминологии.

В. П. Вельмин, руководивший кафедрой алгебры и теории чисел, опубликовал работы о числе классов идеалов действительной и мнимой квадратичных областей, а также о методах приближенных вычислений.

Исследования М. П. Черняева относились в основном к аффинной дифференциальной геометрии. Вопросы геометрии в пространстве Лобачевского изучал Н. М. Нестерович (1891—1955).

В 30-х годах в аспирантуре Ростовского-на-Дону университета было подготовлено немало способных математиков, впоследствии работавших в Ростове, а также других научных центрах страны.

Как упоминалось, к 1930 г. на базе факультетов Уральского политехнического института были созданы специальные вузы. Однако часть этих вузов не имела ни собственной материальной базы, ни преподавательского коллектива. Поэтому в 1934 г. они опять объединились в Уральском политехническом институте. Был восстановлен и Уральский государственный университет. К этому времени улучшилось положение и с кадрами математиков. К моменту организации Уральского университета в Свердловске не было своих преподавателей, их приходилось приглашать из других городов, в начале же 30-х годов в Свердловске работало 35 преподавателей физико-математических наук, в том числе П. Г. Конторович, С. Н. Черников, Г. Д. Гахов.

<sup>9</sup> Б. Л. Лаптев. Математика в Казанском университете за 40 лет (1917—1957). — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 12. Физматгиз, М., 1959, стр. 38.

П. Г. Конторович и С. Н. Черников занимались теорией групп. Ф. Д. Гахов, работавший в Свердловске с 1930 по 1934 г., а затем переехавший в Казань, исследовал вопросы, относящиеся к краевым задачам теории функций комплексного переменного.

До конца 30-х годов свердловские математики работали разобщенно. Впервые научный семинар (по теории групп) был организован в 1935 г., им руководили П. Г. Конторович и С. Н. Черников.

Значительная исследовательская работа проводилась в 30-е годы в Саратовском университете. Реорганизация университета производилась на общих основаниях. В 1931 г. из его состава был выделен педагогический факультет, преобразованный в самостоятельный педагогический институт. Мордовское отделение педагогического факультета было переведено в Саранск и на его основе развернут Мордовский педагогический институт. Вместо факультетов в университете были учреждены отделения, в том числе и механико-математическое. В марте 1933 г. Саратовский университет был вновь реорганизован. Теперь он состоял из четырех факультетов, одним из которых был физико-математический факультет.

Исследования по математике в университете начались в 1931 г., по теории чисел и теории функций. В первом направлении работал Н. Г. Чудаков. Он применил метод И. М. Виноградова к решению некоторых проблем аддитивной теории чисел. Другой саратовский математик — Г. П. Боев, начавший научную деятельность еще в 20-е годы, продолжал свои исследования по теории аналитических функций и специально по автоморфным функциям.

В 1935 г. кафедра математики разделилась на пять кафедр: математического анализа, теории функций, теории вероятностей и теории чисел, геометрии, алгебры. Для заведования новыми кафедрами были приглашены И. Г. Петровский (кафедра математического анализа), Г. А. Курош (кафедра алгебры), В. В. Вагнер (кафедра геометрии). Кроме того, периодически в университет приезжали С. А. Яновская и Л. С. Понтрягин. Деятельность московских математиков в Саратовском университете продолжалась около двух лет, и за это время они провели работу, во многом определившую дальнейшее направление исследований в университете.

В мае 1937 г. при Саратовском университете открылся Научно-исследовательский физико-математический институт с тремя отделами: математики (специальности — теория функций, дифференциальная геометрия), механики и физики. Руководил институтом В. В. Вагнер. Этому геометру принадлежат исследования по неголомомной геометрии и ее приложениям к механике неголомомных систем, а также по приложениям тензорных методов к теории поверхностей. За исследования по теории кривизны (кандидатская диссертация, принесшая ему сразу степень доктора) Казанский университет в 1937 г. присудил ему премию имени Н. И. Лобачевского. Исследования в области дифференциальной и римановой геометрии в университете проводили также А. Е. Либер и А. Л. Правдолюбов.

Научная работа в Горьковском университете значительно оживилась с приходом в 1931 г. А. А. Андропова (1901—1952). Его математи-



А. А. Андронов.

ческие исследования относились к качественной теории дифференциальных уравнений и ее приложениям к теории колебаний. В этом же направлении работала Е. А. Леонтович-Андропова. Качественную теорию дифференциальных уравнений изучал А. Г. Майер (1905—1951). И. Р. Брайцев продолжал свои исследования по теории аналитических функций.

Значительные математические исследования еще в 20-х годах проводились в Иваново-Вознесенске. В 1930 г. Ивановский политехнический институт был разделен на химико-технологический, энергетический и текстильный институты. В этом же году открылся Ивановский педагогический институт.

Кафедру математики в Ивановском энергетическом институте в 1930 г. возглавил В. С. Федоров. Его научные интересы

сосредоточивались на вопросах математического анализа и теории функций комплексного переменного.

В Ивановском педагогическом институте математические дисциплины читал А. И. Мальцев, ученик А. Н. Колмогорова. Его исследования относятся к области алгебры, а также к теории аналитических групп. В Иванове он заложил основы алгебраической школы, связанной со своим методом и приложениям с топологией, геометрией, анализом.

Восстановилась деятельность в области математики в 30-х годах в Воронежском университете. Здесь в начале 30-х годов работал А. К. Сушкевич, а с 1934 по 1941 г. — геометр Н. В. Ефимов, занимавшийся теорией поверхностей.

Старейшим из сибирских университетов является Томский университет. В 1930 г. на базе его факультетов были организованы самостоятельные институты, в том числе в 1931 г. Томский педагогический институт. Оставшиеся в университете факультеты были преобразованы в отделения. В 1933 г. он снова перешел на факультетскую систему, был восстановлен и физико-математический факультет.

Несколько ранее, в мае 1932 г., при Томском университете открылся Научно-исследовательский институт математики и механики. Первыми научными сотрудниками этого института были Ф. Э. Молин, В. А. Малеев, Л. А. Вишневский, М. Н. Иванов, Н. Н. Горячев. Молин в 30-е годы опубликовал несколько статей по теории гиперкомплексных чисел и некоторым другим вопросам, Малеев занимался задачами теории сравнений, Горячев продолжал свои исследования в области механики. Вопросы аддитивной теории чисел разрабатывал в Томском университете в 1935—1944 гг. Н. П. Романов.

В 30-е годы начали развиваться в Томском университете научные исследования и по другим математическим проблемам. С 1931 г. в уни-

верситете работает П. П. Куфарев. Первые его работы посвящены теории аналитических функций. В институте математики и механики проводились также исследования по теории функций комплексного переменного.

Второй из сибирских университетов — Иркутский в 30-е годы служил базой для развития высшего образования в Восточной Сибири. На физико-математическом отделении университета математику читал И. Н. Рукавицын, преподававший также в педагогическом институте. Ему принадлежат работы по векторному исчислению и геометрии связок кругов и сфер.

#### 4

### Математика в Украинской ССР

Развитие научных исследований на Украине в 30-е годы было связано с большими задачами первых пятилетних планов. Украина стала одной из наиболее индустриальных союзных республик. Являясь первой угольно-металлургической базой Советского Союза, она оказала значительное влияние на развитие других союзных республик. На Украине была построена наибольшая по тому времени гидроэлектростанция Советского Союза — Днепровская. Благодаря этому выработка электроэнергии в УССР с 1932 по 1940 г. выросла в четыре раза. Незначительные в прошлом провинциальные города Запорожье, Кривой Рог и другие стали крупнейшими индустриальными центрами страны, резко возрос машиностроительный потенциал Харькова, увеличилась промышленность других городов Украины, в том числе ее столицы (с 1934 г.) Киева. Естественно, что такие темпы индустриализации и ее общесоюзное значение не могли не повлиять и на направления в развитии науки.

В 30-е годы значительно пополнился состав математиков в академических учреждениях Украинской ССР, где продолжали работать академики Д. А. Граве, Н. М. Крылов, Г. В. Пфейффер. В 1929 г. академиками АН УССР были избраны М. Ф. Кравчук и А. Н. Динник, в 1934 г. академиком АН УССР — О. Ю. Шмидт, членами-корреспондентами — Н. И. Ахиезер, В. Е. Дьяченко, М. Х. Орлов, В. М. Майзель, в 1939 г. академиками АН УССР — Д. М. Синцов и М. А. Лаврентьев, членами-корреспондентами — Н. Н. Боголюбов, И. Я. Штаерман, Е. Я. Ремез, Ю. Д. Соколов, М. Г. Крейн.

Академик С. Н. Бернштейн, работавший в Харькове до 1933 г., сыграл большую роль в деле создания на Украине мощного направления в теории вероятностей и теории функций, влияние его работ продолжало сказываться здесь и после его переезда в Ленинград.

Исследования в области математики кроме кафедры математической физики Н. М. Крылова объединялись двумя академическими комиссиями — так называемой Комиссией чистой математики, которую возглавлял Г. В. Пфейффер, и Комиссией прикладной математики, работавшей под руководством Д. А. Граве. В 1933 г. был основан Институт



М. Ф. Кравчук.

математики Академии наук УССР. Первым его директором был Д. А. Граве.

Начиная с 1929 г. кафедра математической физики Академии наук УССР приступила к циклу исследований, в результате которых было создано новое математическое направление, имеющее самые глубокие выходы в технику, — нелинейная механика. Результаты, полученные Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, уже в 1931—1932 гг. использовались в радиотехнике, в технике сильных токов, в исследованиях вопросов статической и динамической устойчивости синхронных машин, в авиастроении, в решении проблемы продольной устойчивости самолетов, в строительстве и машиностроении. Применение методов нелинейной механики в квантовой механике готовило почву для создания мате-

матического аппарата микромеханики.

Д. А. Граве в 30-х годах, наряду с работами в области алгебры и теории чисел, выполнил несколько исследований по механике, написал монографию «Теоретическая механика на основе техники», выдержавшую два украинских и одно русское издания, подготовил три тома энциклопедического «Трактата по алгебраическому анализу», из которых два было издано при его жизни.

Исследования М. Ф. Кравчука охватывали в рассматриваемый период вопросы алгебры, теории функций, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей, а также истории математики.

Г. В. Пфейффер выполнил ряд исследований по теории дифференциальных уравнений в частных производных. Он исчерпывающе решил задачу Софуса Ли о построении дифференциальных операторов для линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Ему принадлежит также обобщение метода Якоби интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка и распространение этого обобщения на нелинейные уравнения.

Различные вопросы математической физики являлись предметом исследований В. Е. Дьяченко (1896—1954). Ю. Д. Соколову, одному из старейших сотрудников Института математики АН УССР, ученику Д. А. Граве, принадлежат исследования в области теории дифференциальных уравнений по проблемам динамики (задача трех тел) и приближенным способам интегрирования уравнений. Е. Я. Ремез получил результаты в теории дифференциальных уравнений и особенно в теории функций действительного переменного (аппроксимация функций полиномами).

Рассмотрим деятельность институтов народного образования Украины, состоявших обычно из двух факультетов — профессионального

образования и социального воспитания. Физико-математические отделения входили в состав первого факультета.

Решения партии и правительства об индустриализации страны были поняты Народным комиссариатом просвещения Украины несколько односторонне. Он считал, что необходимо готовить только специалистов, которых можно непосредственно использовать на производстве. В связи с этим физико-математические отделения факультетов профессионального образования были преобразованы в индустриально-математические. Однако практика социалистического строительства вскоре внесла в это дело очень важные коррективы. Решениями июльского Пленума ЦК ВКП(б) 1928 г. и ноябрьского Пленума ЦК ВКП(б) 1929 г. институты народного образования были разукрупнены: на базе факультетов социального воспитания были созданы институты этого же профиля (позднее преобразованные в педагогические институты), на базе факультетов профессионального образования — институты профессионального образования и физико-химико-математические институты.

В 1933 г. на Украине, как и в РСФСР, изменилась структура высших учебных заведений. На базе физико-химико-математических институтов и институтов профобразования в Киеве, Харькове, Одессе и Днепропетровске были восстановлены университеты с физико-математическими факультетами. Физико-математические факультеты существовали также в подавляющем большинстве педагогических институтов.

В 1927/28 учебном году в Советском Союзе было всего 148 вузов, в том числе 39 на Украине, в 1932/33 учебном году число их увеличилось по стране в целом до 832 и на Украине до 203. Естественно, что такой рост вузов требовал соответствующего роста преподавательских кадров, в частности для математических кафедр. Правда, уже в следующем году сеть вузов несколько сократилась, но при этом усилились кафедры оставшихся вузов. И хотя, согласно положению, физико-химико-математические институты, а затем университеты должны были готовить преподавателей средней школы и работников научно-исследовательских учреждений, практически основной их задачей стала подготовка преподавателей для высшей школы.

В Киевском физико-химико-математическом институте (университете) продолжали работать Б. Я. Букреев, Д. А. Граве, М. Ф. Кравчук, Г. В. Пфейффер, К. Я. Латышева. Несколько позднее начали преподавательскую деятельность здесь Н. Н. Боголюбов, Г. И. Дринфельд, В. Е. Дьяченко, И. Б. Погрбысский.



Ю. Д. Соколов.



К. Я. Латышева (1897—1956) занималась главным образом теорией линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, а также различными применениями теории моментов. Некоторые работы выполнены ею совместно с М. Ф. Кравчуком.

Основные работы Г. И. Дринфельда относились к теории интегральных инвариантов. Предметом исследований И. Б. Погребысского являлись различные вопросы математического анализа, математической физики, механики, а также гидро- и аэродинамики.

В Киевском политехническом институте и институтах, отделившихся от него, работала значительная группа математиков, в частности И. Я. Штаерман, А. С. Смогоржевский, В. А. Зморович.

И. Я. Штаерман (1891—1962) изучал значительный круг прикладных вопросов приближенного интегрирования дифференциальных и интегральных уравнений, теории специальных функций, математической физики и механики.

Исследования А. С. Смогоржевского были связаны с теорией обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, теорией ортогональных полиномов и гиперболической геометрией. Работы В. А. Зморовича посвящены теории однолистных функций, вопросам конформных отображений, а также некоторым вопросам теории нелинейных дифференциальных уравнений.

Математическая жизнь в Харькове была не менее насыщенной, чем в Киеве. В начале 30-х годов определяющим для харьковской математической школы являлось научное творчество С. Н. Бернштейна и его учеников. Под его идейным руководством разрабатывали конструктивную теорию функций В. Л. Гончаров, Н. И. Ахиезер, Я. Л. Геронимус, В. Ф. Бржечка и др. Теорией конформных отображений, применением теории функций комплексного переменного к аэродинамическим задачам, а также теорией дифференциальных уравнений занимался И. З. Штокало. Направление исследований в области геометрии, а также в области геометрической теории дифференциальных уравнений создал Д. М. Синцов. С ним работали Я. П. Бланк, М. А. Николаенко, П. А. Соловьев. А. К. Сушкевич продолжал свои исследования в области теории обобщенных групп. М. Х. Орлов, М. Н. Марчевский, В. К. Балтага изучали различные вопросы теории функций и анализа.

Научная работа проводилась на кафедрах физико-химико-математического института (университета), технологического института (и институтов, выросших на его базе) и в Украинском институте математики и механики, вошедшем в 1935 г. в состав Харьковского университета. Кроме того, продолжало свою деятельность Харьковское математическое общество.

В. Л. Гончаров работал в Харькове до 1934 г., занимался конструктивной теорией функций, а также различными вопросами теории аналитических функций.

Н. И. Ахиезер с 1928 по 1933 г. преподавал в Институте народного образования и других вузах Киева, некоторое время — в Нежинском педагогическом институте. В Украинском научно-исследовательском институте математики и механики и Харьковском университете начал

работать в 1933 г. Его исследования охватывают широкий круг математических проблем. Это задачи теории функций действительного переменного, в первую очередь вопросы аппроксимации функций, проблемы теории моментов, различные вопросы теории функций комплексного переменного, в том числе теории конформных отображений и ее приложений к задачам аэродинамики. Некоторые работы 30-х годов выполнены им совместно с М. Г. Крейном и своим учеником, а затем сотрудником по Харьковскому университету Б. М. Левитаном. Левитан занимался также теорией почти периодических функций.

В харьковских технических высших учебных заведениях в 30-е годы работали Я. Л. Геронимус, В. Ф. Бржечка, Б. А. Рымаренко и др. Я. Л. Геронимус работал в основном в двух направлениях. Вслед за С. Н. Бернштейном он занимался конструктивной теорией функций. Второе направление его исследований составлял значительный цикл работ по теории механизмов и машин. Труды В. Ф. Бржечки и Б. А. Рымаренко также относятся к конструктивной теории функций.

В 1934 г. в Харьковском университете и авиационном институте работал И. З. Штокало, окончивший аспирантуру в Харьковском научно-исследовательском институте математики и механики. Он читал лекции по математическому анализу и дифференциальным уравнениям.

Организация исследований в области геометрии в Харьковском университете связана с именем Д. М. Синцова. По его инициативе в университете начали читать такие курсы, как неевклидова геометрия, риманова геометрия, проективно-дифференциальная геометрия, шаровая геометрия, линейчатая геометрия, теория алгебраических кривых, теория непрерывных групп преобразований, топология и др. Интересен его курс дифференциальных уравнений с рассмотрением геометрических интерпретаций. Синцову принадлежит также ряд работ по истории отечественной математики.

С 1931 г. сначала в Харьковском физико-химико-математическом институте, а затем в университете работал Я. П. Бланк. Исследования его относятся главным образом к дифференциальной геометрии. В эти же годы работал в университете П. А. Соловьев, исследования которого связаны с проективной геометрией.

В 30-е годы единственным алгебраистом в Харьковском университете был А. К. Сушкевич. Его учебники по алгебре и теории чисел выдержали несколько изданий.

Предметом исследований М. Х. Орлова (1900—1936) являлись вопросы теории интегральных уравнений. С 1932 по 1934 г. он был директором Харьковского научно-исследовательского института математики и механики и заведовал кафедрой математики в авиационном институте.

Курсы, относящиеся главным образом к математическому анализу, в Харьковском университете читал М. Н. Марчевский.

Анализу и теории функций посвящены научные исследования В. К. Балтага, преподававшего в Харьковском авиационном институте и университете. Операционное исчисление развивали А. М. Эфрос (1908—1941) и А. М. Данилевский (1906—1941). Оба они погибли во время гитлеровской оккупации Харькова.

Самым молодым в то время из украинских университетов был Днепропетровский. Значительную помощь физико-математическому факультету университета оказывали московские ученые. Здесь читали лекции и руководили научной работой П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, В. Ф. Каган.

Старейший из математиков университета в 30-е годы И. Е. Огиевский проводил исследования в области кинематической геометрии и математического анализа (теория рядов).

В 1930 г. в университете работал С. М. Никольский, заведовавший также кафедрой математики в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта (с 1932 г.). В 1934—1935 гг. он занимался в аспирантуре в Московском университете под руководством А. Н. Колмогорова, а с 1935 г., по возвращении в Днепропетровск, занял кафедру теории функций. Его исследования относятся главным образом к теории аппроксимации функций полиномами.

Учеником А. Н. Динника и Я. И. Грдины по Днепропетровскому университету был Г. Н. Савин. Педагогическую деятельность он начал в 1934 г. в университете и инженерно-строительном институте. Его научные исследования, выполненные под влиянием трудов Н. И. Мусхелишвили, относятся к механике упругих тел.

Большую научную и педагогическую работу в Днепропетровском университете проводил А. Н. Динник. Он читал лекции по приближенным методам интегрирования дифференциальных уравнений и некоторым вопросам механики.

В Одесском физико-химико-математическом институте кафедру анализа, а затем алгебры возглавил Н. А. Чайковский, кафедру геометрии — И. Ю. Тимченко, директор Одесского филиала Харьковского научно-исследовательского института математики. С 1931 г. кафедрой анализа руководил Н. Н. Васильев. В 1932 г. была организована кафедра механики и математической физики. Ее возглавил М. Г. Крейн.

Научные исследования Крейна относятся к алгебре, теории функций, теории дифференциальных уравнений и функциональному анализу. В Одесском университете он читал курсы уравнений математической физики, интегральных уравнений, линейных преобразований квадратических форм, теории функций комплексного переменного и теории гильбертова пространства. Периодически Крейн читал также некоторые курсы в Харьковском университете.

И. Ю. Тимченко преподавал в Одесском университете аналитическую, дифференциальную и высшую геометрию, а также курс по истории математики (которая являлась предметом его научных исследований), Н. А. Чайковский — высшую алгебру, Д. А. Кржижановский и Н. Н. Васильев — математический анализ.

На кафедре механики в Одесском физико-химико-математическом институте с 1927 по 1933 г. работал Ф. Р. Гантмахер (1908—1964), ученик С. О. Шатуновского и Г. К. Сулова. В 1934 г. он перешел в Математический институт им. В. А. Стеклова. В Одессе Гантмахер выполнил, совместно с М. Г. Крейном, цикл работ по теории матриц и интегральных уравнений.

С 1934 г. в Одесском университете работал Б. Я. Левин. Его исследования относились к теории целых функций.

Положение в университетских центрах западноукраинских земель — во Львове и Черновцах — в 1929—1940 гг. оставалось таким же, как и в 20-е годы. Математика во Львове в рассматриваемый период была представлена известными работами С. Банаха и Г. Штейнгауза. В 1929 г. Банах и Штейнгауз основали журнал «*Studia mathematica*», выходивший во Львове до 1941 г. (всего за это время вышло 10 томов). Банах начал во Львовском университете интересную памятную тетрадь — так называемую *Szkoska księga* («шотландскую книгу»), в которую видные математики, посещавшие Львов, записывали нерешенные задачи.

Штейнгауз и Качмаж опубликовали во Львове в 1936 г. монографию «Теория ортогональных рядов». Несколько позднее, в 1938 г., Штейнгауз издал популярную книгу «Математический калейдоскоп», получившую большую известность и переведенную на многие языки.

В 30-е годы число преподавателей во Львовском университете увеличилось. Математические предметы читали четыре профессора и шесть доцентов, поэтому оказалось возможным серьезно поставить преподавание специальных математических предметов — теории интегральных уравнений, интеграла Лебега, теории тригонометрических рядов, математического анализа, неевклидовой и проективной геометрии, оснований геометрии, теории вероятностей и, особенно, функционального анализа.

Во Львовском политехническом институте до 1934 г. был общий факультет, в некоторой степени дублировавший математическое отделение университета. Число студентов этого факультета, хотя и выросло (достигнув в 1932/33 учебном году рекордного числа — 206), все же оставалось незначительным, и в 1934 г. факультет был закрыт.

С 1918 г. во Львовский политехнический институт начали принимать женщин, однако их число оставалось незначительным. Процент студентов-украинцев в университете и политехническом институте был столь же низким, как и в предыдущие годы, и колебался в пределах 5—7. Таким образом, коренное украинское население было лишено возможности получать высшее, как, впрочем, и среднее и даже начальное, образование.

## **Б**

### **Математика в Белорусской ССР**

Постановлением ЦИК и СНК БССР от 13 октября 1928 г.

Институт белорусской культуры был преобразован в Академию наук Белорусской ССР. Полностью это постановление было проведено в жизнь к 1 января 1929 г. Таким образом, в Советском Союзе появилась третья по счету Академия наук, после Академии наук СССР и Академии наук УССР.

В 1931 г. был организован Белорусский физико-технический институт, которым руководил академик БССР Ц. Л. Бурстин. Бурстин

провел цикл исследований по дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений.

Исследования Я. П. Громмера в рассматриваемый период посвящены алгебре и теории относительности. Н. В. Ламбин занимался теорией аналитических функций, С. И. Мельник — вопросами теории интегральных уравнений.

К 1938 г. центр научно-исследовательской работы в области математики в Белоруссии переместился на математические кафедры Белорусского университета. В этом году впервые были организованы специальные кафедры, в частности, на математическом отделении — кафедры математического анализа (И. М. Гельфанд), геометрии (А. М. Лопшиц), теории функций (Н. В. Ламбин), алгебры (В. Л. Нисневич), дифференциальных уравнений (А. В. Гельфанд), механики (Н. А. Столяров).

Научная работа по математике проводилась также в Витебском педагогическом институте, где А. Х. Турецкий начал исследования в области тригонометрической интерполяции.

Заметим, что в научно-педагогической работе, проводившейся в 30-е годы в Белоруссии, принимали участие не только ученые, получившие научную подготовку в других братских республиках, но уже и выпускники белорусской высшей школы (В. Л. Нисневич, А. Х. Турецкий и др.).

## 6

### Математика в Грузинской ССР

В 1931 г. Тбилисский университет, как и другие университеты страны, подвергся реорганизации. В январе 1933 г. он был возобновлен как университет. Одновременно открылся педагогический институт в Кутаиси. В 30-х годах педагогические институты были организованы также в Батуми, Сухуми, Гори, Телави, Цхинвали, Зугдиди.

Кафедрами математики в 20-х и начале 30-х годов руководили А. М. Размадзе (математический анализ), Н. И. Мусхелишвили (прикладная математика и механика), А. К. Харадзе (алгебра) и Г. Н. Николадзе (геометрия). С 1932 г. объединенной кафедрой алгебры и анализа руководил А. К. Харадзе, кафедрой геометрии и механики — Н. И. Мусхелишвили, кафедрой общей математики — Л. П. Гокиели. В 1934 г. была организована кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, которую возглавил В. Д. Купрадзе.

Н. И. Мусхелишвили с группой своих учеников и сотрудников продолжал исследования в области применения теории функций комплексного переменного к задачам механики упругого тела. В 1933 г. он опубликовал фундаментальную монографию «Некоторые основные задачи математической теории упругости», выдержавшую пять изданий и переведенную на несколько языков. Благодаря этой работе в 40—50-х

годах возник целый ряд научных направлений в области механики упругого тела.

30-е годы явились для Грузии годами становления второго поколения грузинских математиков-исследователей, в подавляющем большинстве выпускников Тбилисского университета. В математику пришли новые ученые, в ней появились направления, ранее здесь не развивавшиеся. Так, И. Н. Векуа, В. Д. Купрадзе, Ш. Е. Микеладзе начали работать в области математической физики и теории функций. Купрадзе в эти годы занимался главным образом теорией интегральных уравнений и уравнений математической физики. Исследования Векуа с самого начала его научной деятельности были связаны с проблемами теории дифференциальных уравнений в частных производных, уравнениями математической физики и теорией функций комплексного переменного. Микеладзе работал над вопросами численного интегрирования уравнений математической физики и задачами приближенного анализа.

При университете в 1933 г. был создан Математический институт. Основную тематику его научной работы составляли вопросы теории упругости, интегральные уравнения, теория аналитических функций, вопросы обоснования математики. Научно-исследовательская работа института очень быстро дала результаты: уже в 1934 г. на Втором все-союзном математическом съезде в Ленинграде более десяти сотрудников института выступили с докладами.

Как упоминалось выше, в 1935 г. был открыт Грузинский филиал АН СССР. В его состав в этом же году вошел Математический институт Тбилисского университета. Институт состоял из пяти отделов — математической физики (руководитель В. Д. Купрадзе), механики (Н. И. Мусхелишвили), теории функций комплексного переменного (А. К. Харадзе), теории вероятностей (последним руководил по совместительству С. Н. Бернштейн) и алгебры. Возглавил институт В. Д. Купрадзе. В нем работали в 30-е годы М. А. Лаврентьев (по совместительству), И. Н. Векуа, А. К. Рухадзе, Д. Е. Долидзе, Л. П. Гокиели, Ш. Е. Микеладзе, К. К. Марджанишвили и другие ученые.



Н. И. Мусхелишвили.



И. Н. Векуа.



В. Д. Купрадзе.

Исследования А. К. Харадзе относились к теории приближения функций полиномами. Л. П. Гокиели изучал вопросы обоснования математики и теории множеств. В начале 30-х годов в области теории чисел работал К. К. Марджанишвили, читавший математические курсы в политехническом институте. Вопросами математической физики и прикладной математики занимались Д. Е. Долидзе, А. К. Рухадзе, А. Я. Горгидзе. В области тензорной проективно-дифференциальной геометрии работал А. И. Чхатаури. Предмет научных исследований В. Г. Челидзе, читавшего различные математические курсы в университете, составляли теория функций действительного переменного и некоторые вопросы теории функций комплексного переменного.

К 1936 г. относится начало в Математическом институте исследований по аддитивной теории чисел, руководил которыми профессор Варшавского университета А. З. Вальфиш (1892—1963).

В конце 30-х годов в Математическом институте начал работать выпускник Московского университета Г. С. Чогошвили, исследования которого относятся к топологии.

В педагогическом и политехническом институтах, а затем в университете преподавал Д. Г. Цхакая. В 30-е годы он начал исследования по истории математики в Грузии.

Теории функций и вариационному исчислению посвящены работы Д. М. Тоидзе.

К 30-м годам относится ряд монографических исследований и учебников грузинских ученых: «Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными» (1936 г.) Ш. Е. Микеладзе, учебник анализа (на грузинском языке, 1938 г.), «Вопросы обоснования теории множеств» (на грузинском языке, 1934 г.) и курс вариационного исчисления (1933 г.) Л. П. Гокиели (последний составлен по лекциям А. М. Размадзе).

## 7

### Математика в Азербайджанской ССР

Математические исследования в Азербайджане также значительно возросли в 30-е годы. Связано это было, с одной стороны, с организацией целого ряда учебных заведений и с реорганизацией математических кафедр в Азербайджанском университете, проведенной в 1934 г. Имело также значение создание при Азербайджанском университете

жанском филиале АН СССР сектора физики, в котором проводились исследования и по математике. В Азербайджане в эти годы работали математики Б. Г. Побединский, А. С. Кованько, А. А. Бухштаб, Я. Б. Лопатинский, М. Р. Эфендиев.

А. С. Кованько работал в Азербайджанском университете с перерывами до 1938 г. Его исследования относились к почти периодическим функциям и некоторым другим вопросам теории функций.

Я. Б. Лопатинский окончил Азербайджанский университет в 1926 г., работал в различных бакинских высших учебных заведениях до 1946 г. Его исследования здесь были связаны главным образом с проблемами теории дифференциальных уравнений и алгебры. Теорией дифференциальных уравнений занимался также Б. Г. Побединский.

Научные интересы А. А. Бухштаба относились к аддитивной теории чисел. Он работал в Баку с 1934 по 1940 г. и с 1942 по 1944 г.

В 30-е годы начали свою преподавательскую и научную деятельность в Азербайджанском университете его воспитанники А. И. Гусейнов и М. А. Джавадов. Гусейнов работал в области дифференциальных уравнений, Джавадов — в области геометрии.

## 8

### Математика в Армянской ССР

В 1933 г. в Ереванском университете открылся физико-математический факультет с отделениями физики и математики, позднее были добавлены отделения механики и астрономии. Математической кафедрой руководил А. О. Тонян. В 1938 г. были организованы три кафедры: анализа и дифференциальных уравнений (руководитель Н. Петросян), геометрии (А. Л. Шагинян) и высшей алгебры (З. Хаджанетян).

Первые математические исследования в Армении связаны с именем А. Л. Шагиняна. Он окончил Ереванский университет в 1930 г., но преподавательскую деятельность начал еще будучи студентом, в 1929 г. В 1933—1937 гг. занимался под руководством В. И. Смирнова в аспирантуре при Ленинградском университете. По возвращении в Ереван читал в университете несколько курсов и руководил научным семинаром по теории функций. В середине 30-х годов им были заложены основы научно-исследовательской школы. Первые его работы относились к теории приближений в комплексной области и примыкали к исследованиям В. И. Смирнова, М. А. Лаврентьева, М. В. Келдыша.



А. Л. Шагинян.



В 1934 г. начал педагогическую деятельность в Ереванском университете Г. Б. Петросян, специализировавшийся на исследовании истории древней армянской математики.

В 1935 г. в Армении был создан центр для ведения научно-исследовательских работ — Армянский филиал АН СССР. Председателем его стал крупнейший советский востоковед академик И. А. Орбели.

## 9

### Математика в Среднеазиатских республиках

Наиболее значительные математические исследования в республиках Средней Азии проводились в Ташкенте, где под руководством В. И. Романовского и его учеников была создана сильная научно-исследовательская база.

Выше отмечалось, что в 1927/28 учебном году в Узбекистане было три высших учебных заведения — два в Ташкенте и одно в Самарканде. В них обучалось 3876 студентов. В 1929 г. в Ташкенте открылся Среднеазиатский хлопково-ирригационный политехнический институт. В 1930 г. в Ташкенте были основаны еще два института — сельскохозяйственный и инженеров железнодорожного транспорта. В 1934 г. открылся Среднеазиатский индустриальный (впоследствии политехнический) институт. В 1933 г. на базе Самаркандской педагогической академии был открыт второй в республике Узбекский государственный университет, а за счет отдельных факультетов существовавших высших учебных заведений — еще несколько институтов. Таким образом, в 1934 г. в Узбекистане было 27 высших учебных заведений, а число студентов достигло почти 11 тыс. Для руководства научно-исследовательской работой в республике в сентябре 1932 г. был образован Комитет наук.

В научно-исследовательской работе в области математики в 30-е годы продолжались и закреплялись достижения 20-х годов. Выполненные к этому времени исследования явились базой для создания ташкентской школы в теории вероятностей и математической статистики. Математики этой школы выполнили исследования по применению статистических методов в хлопководстве, промышленности, агрономии и биологии.

Создателем и бессменным руководителем ташкентской математической школы был В. И. Романовский. Большую часть его исследований составляют работы по теории вероятностей и математической статистике. Учениками его являются воспитанники Среднеазиатского университета Т. Н. Кары-Ниязов, Т. А. Сарымсаков, Н. Н. Назаров и др.

Т. Н. Кары-Ниязов — автор первых учебников на узбекском языке по элементарной и высшей математике (курсы анализа и аналитической геометрии, курс дифференциальных уравнений). Впоследствии он посвятил свои исследования истории среднеазиатской математики и астрономии.

Первые работы Т. А. Сарымсакова посвящены вопросам теории вероятностей, а также классического анализа (распределение нулей классических полиномов и др.).

Н. Н. Назаров (1908—1947) создал в Ташкенте школу математического анализа и механики. Его научные интересы относились главным образом к нелинейным интегральным уравнениям, а также к теории функций.

Развитие науки в Киргизии относится к концу 20-х годов. В 1928 г. во Фрунзе было создано первое научно-исследовательское учреждение в республике — Институт краеведения, преобразованное в 1930 г. в Институт культурного строительства. В 1936 г. был учрежден Комитет наук, задачей которого являлось объединение всех научных сил республики и координация их деятельности.

Несколько раньше, в январе 1930 г., подобное учреждение — Учебный комитет был создан при ЦИК Таджикской ССР. На него возлагалось планирование всей научной работы, проводившейся в различных организациях республики. В 1932 г. при значительной помощи Ленинградского университета была основана Таджикская астрономическая обсерватория. В 1933 г. в Душанбе была создана база АН СССР, реорганизованная в 1941 г. в Таджикский филиал АН СССР.



Т. Н. Кары-Ниязов.

## 10

### **Математические совещания.**

#### **Издание математической литературы**

Характерной особенностью советской математики, отличающей ее от дореволюционной, является коллективность работы и организация больших научных школ и новых направлений исследований. Никогда ранее в нашей стране не было так развито научное сотрудничество и различные формы научного общения. Оно выражается в организации научных семинаров по различным вопросам математики, в основании научно-исследовательских кафедр и институтов при университетах и специализированных научно-исследовательских институтов. Большую роль играют также региональные и союзные съезды, конференции и совещания по общим и частным вопросам математики <sup>10</sup>.

---

<sup>10</sup> А. Ф. Лапко и Л. А. Люстерник. Математические съезды и конференции в СССР. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 47—130; 1958, т. 13, вып. 5 (83), стр. 121—166.

Первый всесоюзный съезд математиков происходил в Харькове 24—29 июня 1930 г., в период развернувшихся работ по выполнению первого пятилетнего плана. Выступая на открытии съезда, О. Ю. Шмидт подчеркнул его значение. Он сказал: «Пятилетка осуществляется успешно. Наиболее узким местом ее осуществления является недостаток специалистов... Соответственно с этим происходит расширение высшего образования. Как раз в день моего отъезда сюда Совнарком утвердил цифру приема в вузы на будущий год в 120 тысяч человек против 50 с небольшим тысяч приема прошлого года и менее 40 тысяч позапрошлого... Из этих 120 тысяч не менее чем 100 тысячам мы, математики, будем преподавать высшую математику... Эта перспектива — иметь 100 тысяч учеников в будущем году — является одной из предпосылок огромного, грандиозного развития у нас математики, которое нам, несомненно, предстоит.

...На рынке преподавателей высшей школы более всего не хватает математиков. Молодой человек, который занимается нашей наукой, имеет все шансы стать профессором в 25 лет. Такая большая нужда!... В стране, где строится социализм, где нужно уметь считать, нужно, чтобы это умение математически формулировать стоящие перед каждым задачи... было всеобщим достоянием. Нам необходимо трудиться над тем, чтобы общая математическая культура у нас была выше, чем у других»<sup>11</sup>.

На съезде было семь секций — алгебры и теории чисел, теории функций и теории рядов, дифференциальных и функциональных уравнений, геометрии, механики и математической физики, теории вероятностей и математической статистики, философии математики. В работе съезда приняли участие 471 представитель 54 городов страны и 14 представителей из-за границы. Весьма интересна картина представительства от различных городов, показывающая, как изменилась география нашей науки на 13-м году Советской власти: Москва — 149, Харьков — 62, Ленинград — 57, Днепропетровск — 24, Киев — 15, Тбилиси — 15, Одесса — 14, Минск — 10, Ташкент — 9, Казань — 9, Воронеж — 8, Ростов-на-Дону — 8, Луганск — 5, Краснодар — 5, Симферополь — 5, Херсон — 5, Тверь — 3, Нижний Новгород — 3, Каменец-Подольский — 3, Донецк — 3, Ереван — 3, Омск — 3, Саратов — 3, Томск — 3 чел.; по два представителя прислали Баку, Чернигов, Пермь, Запорожье, Свердловск, Владивосток, Иркутск, Новочеркасск, Житомир, Иваново-Вознесенск, по одному — Алма-Ата, Ростов, Вятка, Уфа, Смоленск, Старобельск, Владикавказ, Винница, Полтава, Козин, Каменское, Купянск.

На восьми пленарных заседаниях съезда было заслушано 15 докладов, одно из заседаний посвящалось 50-летию Харьковского математического общества и одно — вопросам истории и философии математики. На секциях было прочитано 14 обзорных докладов. Всего на съезде было заслушано 167 докладов. Обзорные доклады читали:

---

<sup>11</sup> О. Ю. Ш м и д т. Роль математики в строительстве социализма. — В кн.: Труды Первого всесоюзного съезда математиков. ОНТИ, М. — Л., 1936, стр. 28—33.

О. Ю. Шмидт — «Роль математики в строительстве социализма», П. Монтель (Франция) — «Новейшие методы изучения особенностей аналитических функций», С. Н. Бернштейн — «Современное состояние и проблемы теории приближения функций действительного переменного посредством полиномов», Д. М. Синцов — «Харьковское математическое общество за 50 лет», Н. М. Гюнтер — «О некоторых научных работах акад. В. А. Стеклова», Л. Лихтенштейн (Германия) — «Об одной статической теореме в гидродинамике», Ж. Адамар (Франция) — «Уравнения в частных производных и теория функций действительного переменного», А. Данжуа (Франция) — «Предмет и смысл обобщения понятия интеграла после Лебега», М. Я. Выгодский — «Проблемы истории математики с точки зрения методологии марксизма», С. А. Яновская — «Критика основных современных течений в области оснований математики с точки зрения философии диалектического материализма», В. Бляшке (Германия) — «Новые течения в дифференциальной геометрии», Э. Картан (Франция) — «Проективная геометрия и риманова геометрия», Б. Н. Делоне и В. А. Тартаковский — «Современное положение дискретной геометрии», Б. П. Герасимович — «Статистические ансамбли звездной астрономии», В. Ф. Каган — «О теоретической и прикладной математике в СССР» (на заключительном заседании), Ж. Адамар — «Принцип Гюйгенса и теория Гюнио», Н. И. Ахиезер — «О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля», О. Блюменталь (Германия) — «О полиномах с некоторыми минимальными свойствами с приложением к теории целых трансцендентных функций», Б. А. Венков — «Современное состояние арифметики гиперкомплексных чисел», Д. А. Граве — «Сопротивление жидкости движению тела», Н. М. Гюнтер — «О модулях алгебраических форм», Д. И. Зейлигер — «Современное состояние комплексной геометрии линейчатого пространства», И. А. Лаппо-Данилевский — «Основные задачи теории систем линейных дифференциальных уравнений с произвольными рациональными коэффициентами», Д. М. Синцов — «Современное состояние теории коннексов», Е. Е. Слуцкий — «О связанных случайных функциях одной независимой переменной», А. К. Сушкевич — «Системы с одним действием», С. П. Фиников — «Теория прямолинейных конгруэнций в проективной дифференциальной геометрии», В. А. Фок, С. А. Янчевский — «Предельные задачи в математике и физике», Н. Г. Чеботарев — «Современное состояние теории алгебраических чисел».

На съезде обсуждались проблемы, имевшие важное значение для развития советской математики в целом. Большое внимание уделялось вопросам о значении математики в социалистическом строительстве СССР, о применении метода диалектического и исторического материализма к истории и обоснованию математики, о связи между теоретической и прикладной математикой, о преодолении разрыва между различными областями математики при усилении ее дифференциации. Во вступительном докладе О. Ю. Шмидт отметил: «Математика представляет собой одну из наиболее разветвленных наук, настолько разветвленных, что когда кто-нибудь делает математический доклад, то очень небольшое число присутствующих может следить за ним компетентно.

Это таит в себе опасность общего разброда, опасность отрыва от питающих корней, опасность заблуждений в дебрях леса, откуда не выбраться и где напрасно расточаются силы и гибнут таланты. Успех в том, чтобы рядом со специальными работами была и работа синтетическая, чтобы основа математики — методология — была в центре нашего внимания, чтобы каждый отдельный математик, удаляясь в лес специальных изысканий, видел спасательные огни»<sup>12</sup>.

24—30 июня 1934 г. состоялся в Ленинграде Второй всесоюзный математический съезд. Он был еще более представительным, чем первый. В его работе приняли участие 732 представителя от научных и учебных учреждений 50 городов: от Ленинграда — 208, Москвы — 192, Харькова — 51, Казани — 26, Днепропетровска — 20, Киева — 20, Ташкента — 19, Минска — 18, Ростова-на-Дону — 16, Новочеркасска — 15, Одессы — 14, Саратова — 12, Свердловска — 11, Тбилиси — 11, Воронежа — 10, Томска — 9, Иванова — 8, Перми — 6, Горького — 5, Омска — 5, Баку — 4, Владивостока — 4, Луганска — 4, Куйбышева — 3, Рыбинска — 3; по два представителя прислали Иркутск, Мелитополь, Саранск, Полтава, Симферополь, Смоленск; по одному — Ереван, Самарканд, Краснодар, Вятка, Кривой Рог, Калинин, Новосибирск, Чернигов, Ленинск, Астрахань, Орджоникидзе, Энгельс, Житомир, Тирасполь, Бежица, Пулково, Рязань, Николаев, Ростов.

На съезде работало девять секций: алгебры и теории чисел, геометрии, топологии, анализа I (теория функций), анализа II (дифференциальные, интегральные и функциональные уравнения, вариационное исчисление), механики и математической физики, теории вероятностей и математической статистики, приближенных вычислений, истории и философии математики.

Всего было сделано 235 докладов, в том числе обзорные: П. С. Александров — «Алгебра и топология в их взаимоотношениях», И. М. Виноградов — «Проблема Варинга», А. О. Гельфонд — «Трансцендентные числа», Н. М. Гюнтер — «Интегралы Стильтьеса в математической физике и в теории интегральных уравнений», И. А. Кибель — «Гидродинамика сжимаемой жидкости», А. Н. Колмогоров — «О некоторых новых течениях в теории вероятностей», М. А. Лаврентьев — «Геометрические вопросы теории функций комплексного переменного», С. А. Лефшец (США) — «Проблемы алгебраической геометрии», Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман — «Топологические методы в применении к экстремальным задачам в анализе», Г. М. Мюнтц — «Функциональные методы в краевых задачах», Л. С. Понтрягин — «Структура непрерывных групп», В. И. Смирнов — «Некоторые ленинградские работы в области анализа и его приложений», В. В. Степанов — «Качественные методы в теории дифференциальных уравнений», Н. Г. Чеботарев — «Некоторые проблемы современной теории Галуа».

На этом съезде увеличилось, по сравнению с первым, число докладов прикладного характера. Многие докладчики отмечали практическую применимость таких разделов математики, которые до этого времени

<sup>12</sup> О. Ю. Шмидт. Роль математики в строительстве социализма, стр. 33—34.

считались чисто теоретическими, например качественная теория дифференциальных уравнений, многие вопросы функционального анализа. Работа съезда свидетельствовала о наметившихся тенденциях синтеза отдельных математических дисциплин. «Рассматривая сейчас... высказывания начала 30-х годов, мы видим, что советская математика преодолела указанные противоречия. Расширение научной тематики вело не только к усилению дифференциации, оно усиливало обратный процесс синтеза в математике. Уже на Харьковском съезде мы видели ряд докладов, в которых находил себе место синтез различных дисциплин, перенесение методов одной математической науки в другую. Само большое число совместных заседаний секций говорит об усилении более широких интересов. На II съезде это нашло отражение в постановке большого числа общесъездовских докладов. В 30-х годах синтетические работы приобретают большой размах, возникают и развиваются такие новые дисциплины, как топологическая алгебра, топологические методы анализа, аналитические методы теории вероятностей и т. д., получают широкое распространение синтетические идеи функционального анализа, оказавшие большое влияние особенно в последнее десятилетие на развитие математики в целом»<sup>13</sup>.

Особое внимание было уделено научно-организационным вопросам развития математики. В своем решении съезд отметил «значительный рост научно-исследовательских институтов по математике, образование новых математических центров, успешную подготовку новых кадров молодых научных работников, поднятие уровня и качества научно-исследовательской работы по математике, внедрение плановости в работе, изживание разобщенности между отдельными математическими школами и научное обслуживание конкретных запросов социалистического строительства и обороны страны»<sup>14</sup>.

Съезд констатировал также сближение между двумя основными направлениями в советской математике — развитием математической теории и разработкой прикладных проблем. «В этом сближении,— говорится в резолюции съезда,— несомненно сыграло большую роль господствующее в нашей стране мировоззрение диалектического материализма.

Первое из указанных направлений, богатое общими идеями и руководящими принципами, начинает с большим успехом применять их к конкретным проблемам. Что же касается второго направления, то, в силу исключительно благоприятных условий, сложившихся в СССР в результате политики индустриализации и создания самостоятельной передовой техники, оно еще более сблизилось с задачами научного естествознания и техники и, на основе накопленного богатого конкретного материала, обогатилось новыми идеями, направленными к установлению общих принципов.

<sup>13</sup> А. Ф. Лапко и Л. А. Люстерник. Математические съезды и конференции в СССР.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 68—69.

<sup>14</sup> Резолюция 2-го Всесоюзного математического съезда. — В кн.: Труды Второго всесоюзного математического съезда. Т. 1. Изд-во АН СССР, Л. — М., 1925, стр. 78.

Съезд считает необходимым обеспечить и в дальнейшем развитие советской математики по указанным двум магистралям, способствуя еще большему их взаимному сближению»<sup>15</sup>.

Съезд принял ряд решений об издании математической периодики, о выпуске математической литературы и учебников, а также о состоянии преподавания математики в университетах и высших технических учебных заведениях. Были приняты также решения о специализированных конференциях, о развитии математических обществ, о расширении исследований в области истории и философии математики, о пропаганде математики в средней школе.

Советские математики принимали участие также в специальных и региональных конференциях и совещаниях.

С 16 по 21 мая 1931 г. в Москве происходила Первая всесоюзная конференция по аэродинамике, в которой приняли участие многие математики.

С 12 по 19 ноября 1932 г. в Ленинграде состоялись заседания юбилейной сессии Академии наук, посвященной 15-й годовщине великого Октября. На сессии выступили с докладами также математики, в частности С. Н. Бернштейн («О зависимости между случайными величинами»), И. М. Виноградов («О проблеме аналитической теории чисел»).

С 21 по 27 декабря 1933 г. отмечался юбилей ЦАГИ: состоялись три всесоюзные конференции — III Всесоюзная конференция по аэродинамике, I Всесоюзная конференция по гидродинамике и I Всесоюзная конференция по прочности авиационных конструкций. На совместном пленарном заседании этих конференций выступали С. А. Чаплыгин и А. И. Некрасов.

В Ленинграде со 2 по 4 марта 1935 г. работала сессия по вопросам регулирования, созданная Всесоюзной теплотехнической ассоциацией. В своем постановлении сессия указала на необходимость развития математического аппарата в области регулирования и проведения экспериментальных работ, тесно связанных с математическими исследованиями.

Начиная с 1935 г., вплоть до начала Великой Отечественной войны, в Свердловске ежегодно проводилась региональная Уральская научно-методическая конференция математических кафедр педагогических вузов и университетов.

С середины 30-х годов в разных математических центрах проходили региональные конференции молодых ученых. Одной из первых таких конференций была конференция молодых ученых Татарии (1935 г.). В 1936 г. состоялась первая конференция молодых ученых Украины.

В Москве 21—25 декабря 1935 г. проходила Всесоюзная конференция по скоростной авиации, на которой были сделаны сообщения также математического характера.

В июне 1936 г. состоялась конференция по математике в Воронеже. В работе ее приняли участие математики из разных научных центров страны.

---

<sup>15</sup> Резолюция 2-го Всесоюзного математического съезда, стр. 78—79.

С 21 по 23 марта 1936 г. в Москве проводилась сессия математической группы Академии наук, посвященная вопросам прикладной математики.

ЦАГИ организовал в мае 1936 г. конференцию по волновому сопротивлению. На ней выступали с докладами, в частности, Н. В. Кочин, М. А. Лаврентьев, М. В. Келдыш, Л. И. Седов.

Математическая группа Академии наук созвала в декабре 1936 г. сессию по вопросам преподавания математики в средних школах, педагогических и технических институтах. На сессии были приняты по этим вопросам важные решения.

22—23 февраля 1937 г. состоялась сессия математической группы Академии наук, на которой были заслушаны отчетные доклады представителей математических научно-исследовательских учреждений Москвы, Ленинграда, Тбилиси и Минска за 1936 г. и утверждены планы этих учреждений на 1937 г. Состоявшаяся 27—29 марта этого же года сессия математической группы Академии наук была посвящена вопросам анализа, в основном теории интерполирования. 27—28 мая 1937 г. состоялась сессия математической группы Академии наук по теории потенциала, на которой был также заслушан доклад И. М. Виноградова «О проблеме Гольдбаха».

В сентябре 1937 г. математическая группа Академии наук СССР организовала Всесоюзную конференцию по функциональному анализу. На конференции были подведены итоги первого этапа формирования школы функционального анализа.

10 ноября 1937 г. Московское математическое общество, Академия наук СССР и Московский университет провели торжественное заседание, посвященное 20-летию Великой Октябрьской социалистической революции. Были заслушаны доклады П. С. Александрова — «Теоретико-множественное направление в советской математике за 20 лет», А. О. Гельфонда — «Достижения советской математики в области теории чисел» и А. Н. Колмогорова — «Развитие в СССР математических методов познания природы (дифференциальные и интегральные уравнения и теория вероятностей)».

27 декабря 1937 г. была созвана сессия математической группы Академии наук СССР по вопросам издания математической литературы. В работе сессии приняли участие представители издательств, публикующих математическую литературу. Был рассмотрен также вопрос о математических журналах.

С 16 по 20 апреля 1939 г. в Ленинграде проходила научная сессия, посвященная 120-й годовщине со дня основания университета. Это была первая научная сессия Ленинградского университета. На сессии было сделано также несколько докладов по вопросам современной математики, в частности, обзорный доклад прочел С. Н. Бернштейн — «Ленинградская (Петербургская) школа теории вероятностей и ее значение».

В ноябре 1939 г. Отделение физико-математических наук АН СССР совместно с Математическим институтом им. В. А. Стеклова АН СССР созвало Всесоюзное совещание по алгебре. В работе совещания приняли



участие алгебраисты многих научных центров. Совещание отметило значительное развитие исследований в области алгебры по сравнению с результатами, доложенными на втором съезде математиков, т. е. за пять с небольшим лет.

Тбилисский математический институт им. А. М. Размадзе организовал в Тбилиси в феврале 1940 г. конференцию по математической теории упругости, в работе которой приняли участие многие математики и механики Советского Союза, в частности Н. И. Мусхелишвили (организатор конференции), И. Н. Векуа, А. Ю. Ишлинский, В. М. Майзель, А. К. Рухадзе, Н. А. Кильчевский, И. Я. Штаерман.

В 1940 г. состоялось I Всесоюзное совещание по теории автоматического регулирования, на котором были подведены итоги исследовательской работы в этой области и намечены новые задачи.

С 20 по 25 июня 1940 г. в Киеве проходило совещание по теории аналитических функций и функционального анализа. В работе совещания приняли участие также львовские и польские математики. Были выявлены характерные особенности советской школы функционального анализа, широкий диапазон научных интересов и связи с другими областями математики.

В 30-е годы образовалось объединение математиков всесоюзного масштаба — Всесоюзная математическая ассоциация. Окончательно она была оформлена на I Всесоюзном математическом съезде: в ее состав вошли Московское и Харьковское математические общества, Казанское и Ленинградское физико-математические общества, Физико-математическое общество при Кубанском педагогическом институте, Математическое общество при Томском университете, Математическая конференция при Дальневосточном университете, Математическая секция Днепропетровского физико-математического общества, Математический отдел общества естествоиспытателей (Ростов-на-Дону), Тульский математический кружок, Секция математики и механики Научно-исследовательского института математики и естествознания при Северо-Кавказском университете, Физико-математическое общество при Пермском университете, Математическая секция при Пермском педагогическом институте. Однако из этих организаций эффективно действующими оказались лишь три старейших общества — Московское, Харьковское и Казанское. На этом же съезде был избран совет ассоциации и ее президиум — С. А. Чаплыгин (председатель), Н. А. Глаголев, В. Ф. Каган, В. В. Степанов (секретарь), О. Ю. Шмидт. На II Всесоюзном математическом съезде Президиум ассоциации был избран в следующем составе: О. Ю. Шмидт (председатель), М. Я. Выгодский, А. Н. Колмогоров, Б. И. Сегал (секретарь), В. И. Смирнов.

Всесоюзная математическая ассоциация мыслилась как межсъездовская организация математиков. Однако, поскольку, кроме трех старейших математических обществ, математикам не удалось создать на местах устойчивые организации, а в конце 30-х годов не удалось собрать и III Математический съезд, с началом Великой Отечественной войны Всесоюзная математическая ассоциация фактически прекратила свою деятельность.

Одним из результатов работы ассоциации было создание центрального математического журнала «Успехи математических наук», который в довоенные годы и в годы войны (1936—1944) выходил как неперiodическое издание. До 1941 г. выходило один-два выпуска журнала в год (1936 — вып. 1, 2, 1937 — вып. 3, 1938 — вып. 4, 5, 1939 — вып. 6, 1940 — вып. 7, 8).

Наибольшим по объему и авторитетности из всей математической периодики Советского Союза продолжал оставаться журнал Московского математического общества «Математический сборник». Статьи математического содержания печатались также в сборниках «Прикладная математика и механика», «Математическое просвещение», в журналах АН СССР, республиканских академий и филиалов Академии наук СССР, в «Трудах» университетов и педагогических институтов, в многочисленных периодических и неперiodических журналах и сборниках трудов высших технических учебных заведений. Весьма интересные статьи, главным образом обзорного содержания, печатались в издававшихся в 30-е годы общенаучных журналах «Социалистическая реконструкция и наука», «Фронт науки и техники» и др.

Математическую литературу издавало в 30-х годах в основном Государственное издательство технической литературы, вошедшее во второй половине 30-х годов в состав Объединения научно-технических издательств (ОНТИ). Кроме того, математические книги издавались республиканскими издательствами (например, Гостехиздатом Украины), издательствами АН СССР и АН УССР и др.

Во второй половине 30-х годов, в связи с необходимостью быстрой подготовки кадров в стране, значительное развитие приобрело заочное обучение. Сначала заочные институты были выделены в самостоятельные единицы, затем начали появляться заочные факультеты и отделения в стационарных высших учебных заведениях, и число студентов-заочников возрастало. В связи с этим возросла и потребность в учебниках и учебных пособиях. Учебники, издававшиеся центральными и республиканскими издательствами, очень быстро расходились и не доходили до заочников. Кроме того, не все они были приемлемы для заочного обучения. Поэтому начала развиваться издательская деятельность в самих высших учебных заведениях, издавших в итоге большое количество учебников и учебных пособий.

Из учебников по высшей математике в 30-е годы наибольшее распространение получили курсы Н. Н. Лузина «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление». В 30-х годах начал перерабатывать свой двухтомный курс и создавать многотомный «Курс высшей математики» В. И. Смирнов. Тогда же вышел «Курс дифференциального и интегрального исчисления» Г. М. Фихтенгольца в двух томах (третий том вышел значительно позднее). Были изданы также переводы ряда иностранных руководств — Гурса, Куранта, Де ла Валле-Пуссена и др.

По специальным вопросам математики в 30-е годы были опубликованы курсы теории вероятностей С. Н. Бернштейна (переиздание), теории функций действительного переменного П. С. Александрова

и А. Н. Колмогорова, вариационного исчисления М. А. Лаврентьева и Л. А. Люстерника, приближенного решения уравнений в частных производных Л. В. Канторовича и В. И. Крылова, теории функций комплексного переменного И. И. Привалова, математической статистики В. И. Романовского и др. На украинском языке вышли учебники Д. М. Синцова — по аналитической и дифференциальной геометрии, М. Ф. Кравчука — по теории дифференциальных уравнений, А. К. Сушкевича — по высшей алгебре и теории чисел, Н. И. Ахиезера — по теории функций комплексного переменного, Д. А. Граве — по аналитической геометрии, а также др. Впервые были изданы учебники по различным разделам математики на белорусском, узбекском, азербайджанском языках. В связи с этим в республиканских академических терминологических комиссиях оживилась работа по созданию общенаучной и, в частности, математической терминологии.

## 11

### Международные научные связи

Росту связей советских ученых с зарубежными способствовало взаимное участие в совещаниях и конференциях. Выше отмечалось, что в работе Первого всесоюзного математического съезда приняло участие 14 иностранных математиков, в том числе 5 из Франции, 4 из Польши, 3 из Германии.

С 17 по 23 мая 1934 г. в Москве проходила Первая международная конференция по тензорной дифференциальной геометрии и ее приложениям, организованная Научно-исследовательским институтом математики и механики при Московском университете по предложению В. Ф. Кагана. В работе конференции приняли участие 22 иностранных ученых, в частности Э. Картан (Франция), В. Бляшке и Э. Келер (Германия), Э. Бортолотти и П. Бургатти (Италия), Д. Я. Стройк (США), И. Скоутен (Нидерланды), В. Хловати (Чехословакия), А. Душек (Австрия), А. Гоборский, С. Голомб, А. Вундгейлер (Польша).

В сентябре 1935 г. в Москве была созвана Первая международная топологическая конференция. На конференции было заслушано 45 докладов, в том числе 13 докладов советских ученых. Конференция была весьма представительной. В ней участвовали почти все ученые мира, занимающиеся разработкой вопросов топологии.

Советские ученые принимали участие в международных математических конгрессах в Цюрихе (1932 г.) и Осло (1936 г. — VII конгресс). Цюрихский конгресс совпал со столетием со дня смерти Галуа. Доклад о развитии идей Галуа был прочитан на пленарном заседании конгресса Н. Г. Чеботаревым.

В 30-е годы советские ученые читали в иностранных университетах по их приглашению лекции или отдельные доклады. Например, И. А. Лаппо-Данилевский посетил Германию, Н. М. Крылов — Португалию, где прочел в старейшем Коимбрском университете курс лекций, Н. Н. Боголюбов — Францию и Бельгию.

В годы захвата власти в Германии фашистами из Германии эмигрировали многие крупные ученые. Некоторые из них нашли убежище в Советском Союзе и работали в советских университетах.

За границей переиздавались крупные труды советских ученых, в частности монографии Н. Н. Лузина, С. Н. Бернштейна, А. Н. Колмогорова. Это способствовало ознакомлению иностранных математиков с проблемами, разрабатываемыми в Советском Союзе.

## 12

### **Математика в западных областях Украины, Белоруссии и в Прибалтике в 1939 — 1941 гг.**

В 1939 г. гитлеровская Германия развязала вторую мировую войну. В течение нескольких дней была оккупирована Польша и немецко-фашистские войска подошли к украинским и белорусским землям, входившим, по Версальскому договору, в состав Польши. Как известно, при заключении Версальского договора не учитывалась воля коренного украинского и белорусского населения этих земель. В связи с угрозой оккупации фашистской Германией западноукраинских и западнобелорусских земель Советское правительство 17 сентября 1939 г. отдало приказ Красной Армии перейти границу и взять под защиту жизнь и имущество населения Западной Украины и Западной Белоруссии.

По инициативе населения освобожденных областей Народные Собрания Западной Украины и Западной Белоруссии в октябре 1939 г. обратились в Верховный Совет СССР с просьбой о воссоединении их в едином Советском государстве. 5-я сессия Верховного Совета СССР (1—2 ноября 1939 г.) удовлетворила эти ходатайства, и Западная Украина была воссоединена с Украинской Советской Социалистической Республикой, а Западная Белоруссия — с Белорусской Советской Социалистической Республикой.

В сентябре-октябре 1939 г. Советский Союз заключил договоры о взаимопомощи с Эстонией, Латвией и Литвой. Однако буржуазные правительства этих стран, рассчитывая на помощь со стороны гитлеровской Германии, саботировали выполнение договоров, вследствие чего были свергнуты народом в июне 1940 г. Народные Сеймы Эстонии, Латвии и Литвы, избранные в июле 1940 г., восстановили в республиках Советскую власть. В августе этого же года Эстонская, Латвийская и Литовская социалистические советские республики вошли в состав Союза Советских Социалистических Республик.

Несколько раньше, 26 июня 1940 г., были воссоединены с Советским Союзом Бессарабия и Северная Буковина, населенная украинцами. Часть Бессарабии, населенная украинцами, была воссоединена с УССР, а часть, населенная молдаванами, вместе с Молдавской АССР, входившей в состав Украинской ССР, была воссоединена в союзную советскую социалистическую республику — Молдавскую ССР.



Г. А. Ряго.

Таким образом, к концу 1940 г. в составе СССР появились пять новых союзных республик (в марте 1940 г. была образована Карело-Финская ССР, впоследствии преобразованная в Карельскую АССР) и значительные новые области, населенные белоруссами и украинцами. При этом семья советских научно-исследовательских учреждений и учебных заведений пополнилась Львовским, Черновицким, Вильнюсским, Каунасским, Латвийским и Тартуским университетами, Львовским и Таллинским политехническими институтами и другими научными и учебными учреждениями.

Во Львове после воссоединения западноукраинских земель в УССР была в корне изменена вся существовавшая ранее система образования. Коренное население получило полную возможность учиться в на-

чальной, средней и высшей школе на родном языке. Естественно, что в связи с этим резко увеличилось число студентов-украинцев в университете и политехническом институте. Были организованы здесь и другие высшие учебные заведения. Всего к 1940/41 учебному году во Львове насчитывалось 7 вузов, в которых обучалось 9550 студентов. Появились научно-исследовательские институты и большая научная библиотека, вошедшие в состав Академии наук УССР.

Во Львовском университете открылся физико-математический факультет, первым его деканом был С. Банах. Из профессоров-математиков в университете остались С. Рузевич, Е. Жилинский, Ауэрбах, Шаудер (профессор С. Качмаж погиб в сентябре 1939 г.). Коллектив математиков университета пополнился профессорами В. Левицким (1872—1955) и М. Зарицким (1889—1961).

Математику во Львовском политехническом институте в 1939—1941 гг. преподавали А. Ломницкий, К. Бартель, В. Стожек. Здесь, как и в университете, было ликвидировано национальное неравенство. Впервые в этом учебном заведении учились сыновья и дочери украинских крестьян и рабочих.

В Черновицком университете в начале рассматриваемого периода не было квалифицированных математиков, поэтому их пришлось пригласить из других украинских высших учебных заведений. В частности, для организации педагогической и научной работы в университете был командирован профессор Киевского университета Н. Н. Боголюбов.

В Каунасском университете математику преподавали Э. Жемайтис, П. Катилюс, П. Шернас, Р. Лаковскас (в 1941 г. расстрелян немецко-фашистскими оккупантами). В 1939 г. некоторые факультеты Каунасского университета, в том числе математико-естественный, были переведены в Вильнюсский университет. Математические дисциплины в

Вильнюсском университете преподавали С. Кемписты, Ю. Марцинкевич (1910—1940), А. Зигмунд, В. Станевич, Ю. Рудницкий.

Латвийский государственный университет в годы господства буржуазно-националистического режима работал в исключительно трудных условиях. Свыше 50% всех доходов университета составляла оплата за учебу, поэтому она систематически увеличивалась, и за 1923—1939 гг. возросла с 50 до 125 лат. Естественно, что высшее образование для трудящихся слоев населения стало недоступным. Лишь около четверти студентов, поступавших в университет, оканчивали его.

Кафедрой (семинаром) математиков в Латвийском университете с 1919 по 1935 г. руководил геометр Э. Ю. Лейниекс, с 1935 г. — А. Я. Лусис. На кафедре работал А. Р. Медер, специалист в области математического анализа и теории вероятностей. После реорганизации университета в 1940 г. А. Я. Лусис руководил кафедрой математики и механики. Он исследовал вопросы интегральных уравнений и теории функций. На кафедре работали Н. А. Бразма (теория функций), Э. Я. Гринберг (геометрия), Э. К. Фогелс (теория чисел) и др.

Тартуский университет, как известно, имел наиболее мощную в Прибалтике математическую научную школу. Однако в трудных условиях буржуазной Эстонии не было возможностей для воспитания научных кадров. Старейшие эстонские профессора Я. Сарв, Г. Ряго, Х. Яаксон, Ю. Нуут, Р. Асваниви, А. Хумал, Г. Кангро уже в Советской Эстонии воспитали себе смену.

Я. Х. Сарв в 30-е годы исследовал различные вопросы геометрии. В 1931 г. была издана на эстонском языке его монография «Основания геометрии». Она послужила толчком для Ю. Ю. Нуута и А. К. Хумала к исследованию по аксиоматике геометрии.

В Таллинском техническом институте работал Г. Ф. Кангро. Его исследования относятся к теории суммирования рядов.

Математическая деятельность в Молдавии перед Великой Отечественной войной была малозаметной. Молдавский педагогический институт в 1941 г. был переведен в Кишинев. Математика в нем в рассматриваемое нами время являлась лишь предметом преподавания.

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

### РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В СССР В ГОДЫ ВЕЛИКОЙ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЫ И ПОСЛЕВОЕННЫЙ ПЕРИОД (1941 — 1958 гг.)

#### 1

#### Эвакуация академических учреждений и высших учебных заведений в начале Великой Отечественной войны

Третий пятилетний план, принятый на XVIII съезде Коммунистической партии Советского Союза, был рассчитан на 1938—1942 гг. За эти годы промышленность Советского Союза должна была увеличить выпуск продукции на 92%. Исключительно важные задачи ставились перед советским машиностроением — производство средств производства должно было возрасти более чем в два раза. Советский народ вплотную подошел к решению ленинской задачи — основной экономической задачи СССР — догнать и перегнать наиболее развитые капиталистические страны по производству продукции на душу населения.

Особенное значение приобрело в третьей пятилетке развитие промышленности восточных районов страны. Уже за годы первых пятилеток было сделано многое в этом отношении — созданы новые крупные индустриальные центры. Теперь предполагалось на базе этих центров развить обширное промышленное строительство, необходимое как для более правильного размещения производительных сил и ввода в эксплуатацию огромных богатств восточных районов, так и для укрепления обороноспособности страны. Почти  $\frac{1}{3}$  всех плановых капиталовложений в третьей пятилетке предназначалась на промышленное развитие восточных районов. Значительная часть этих капиталовложений была освоена в течение первых трех лет пятилетки, в результате чего производство промышленной продукции Урала, Поволжья, Сибири, Средней Азии и Казахстана выросло в полтора раза.

XVIII партийная конференция, состоявшаяся в феврале 1941 г., отметила, что промышленность Советского Союза значительно продвинулась вперед в деле выполнения третьего пятилетнего плана, а также указала на некоторые недостатки и на необходимость постоянно совершенствовать технику и повышать культуру производства.

Однако мирная передышка кончилась. 22 июня 1941 г. гитлеровская Германия вероломно напала на Советский Союз. Все народное хозяйство нашей страны было переведено на военные рельсы.

Первым пришлось испытать на себе тяжесть фашистского разбоя западным областям Украины и Белоруссии. 30 июня 1941 г. немецко-фашистские полчища оккупировали Львов. Начались массовые раз-

стрелы населения. В первые же дни были расстреляны 35 крупнейших деятелей науки и культуры, в том числе виднейшие львовские математики профессора К. Бартель, А. Ломницкий, С. Рузевич, В. Стожек, ученые младшего поколения Ауэрбах, Сакс, Шаудер. Всего во Львове за время оккупации было уничтожено более 150 тыс. мирных жителей, вывезены из города в Германию огромные материальные ценности, в том числе из Львовского филиала Библиотеки АН УССР 5113 рукописей, 3139 старопечатных книг, 2346 редких гравюр. Оккупанты уничтожили лаборатории и кабинеты Львовского политехнического института, нанесли большой урон коллекциям университета. Высшая школа и наука во Львове, как затем и в других оккупированных районах, фактически перестала существовать. Громадный урон был нанесен науке и культуре Белоруссии: почти все материальные ценности уничтожены, здания и лаборатории университета и научно-исследовательских учреждений взорваны.

Для социалистической промышленности годы Великой Отечественной войны были трудным экзаменом и этот экзамен она с честью выдержала. 1523 промышленных предприятия, в том числе 1360 предприятий важнейшего оборонного значения, было эвакуировано во второй половине 1941 г. в восточные районы страны. Летом 1942 г. эти предприятия уже начали давать промышленную продукцию. Были освоены новые виды продукции, значительное число заводов переведено на массово-поточное производство.

В восточные районы страны были эвакуированы также высшие учебные заведения и научно-исследовательские институты. Несмотря на трудности, связанные с нехваткой научных и преподавательских кадров, помещений и оборудования, советские вузы и научно-исследовательские учреждения быстро восстановили свою работу на новых местах. «В 1942 г. в Свердловске собралась очередная сессия Академии наук СССР. Происходила она в новом здании окружного дома офицеров. В зале собрались виднейшие ученые страны. Так же внимательно и глубоко, как это было в мирное время, они обсуждали важнейшие вопросы развития советской науки.

И, пожалуй, самое замечательное, чем отличалась эта сессия, это то, что собравшиеся на ней ученые обсуждали и будущее нашей науки. Шли бои на тысячекилометровом фронте Великой Отечественной войны, враг топтал землю Украины, Белоруссии, Прибалтики, а здесь, на Урале, ученые говорили о восстановлении этих районов. Речь шла о составлении научно-обоснованного плана возрождения разрушенных врагом районов, и ученые приступили к составлению этого плана с большой верой в могущество своей державы, в неминуемый разгром врага. Это было замечательное событие и в нем проявилась особенность социалистического строя, великая вера советского народа в свои богатырские неиссякаемые силы...

Сессия Академии наук СССР показала, какую огромную созидательную работу провели уже советские ученые в центральных и восточных районах страны, какую большую практическую помощь оказывают они фронту и военной промышленности...



Но важно было не только то, что ученые успешно помогали разрешать важнейшие практические вопросы освоения природных богатств, увеличения выпуска танков, самолетов, автоматов и другой продукции, в которой так нуждался фронт. Знаменательно, что в это время, несмотря на трудности, в которых протекала научная работа, не снижался и теоретический уровень исследований советских ученых. И во время войны наука двигалась вперед, успешно развивалась, и в этом еще раз проявилась неодолимая жизненная сила советского строя»<sup>1</sup>.

Научно-исследовательские учреждения Академии наук СССР, за исключением некоторых, оставшихся в Москве и Ленинграде, были эвакуированы в Свердловск, Казань, Ташкент, Алма-Ату, Фрунзе, Сталинабад, Самарканд, Ашхабад, Тбилиси и другие города. Президиум Академии наук СССР находился в Казани, а затем в Свердловске.

Количество институтов и отделений Академии наук в военное время не только не уменьшилось, но даже возросло. В 1941 г. была открыта Академия наук Грузинской ССР, в августе 1943 г. — Киргизский филиал АН СССР (в г. Фрунзе), в ноябре этого же года — Академии наук Армянской ССР и Узбекской ССР, в феврале 1944 г. — Западно-Сибирский филиал АН СССР (в Иркутске), в сентябре этого же года — Научно-исследовательская база в Сыктывкаре (Коми АССР), в марте 1945 г. — Академия наук Азербайджанской ССР.

В мае 1942 г. и сентябре 1943 г. значительно пополнился состав Академии наук СССР. На первом общем собрании, состоявшемся в Свердловске, было избрано 5 академиков, на втором, в Москве, — 36 академиков и 5 членов-корреспондентов, в том числе математики В. И. Смирнов, С. А. Христианович (академиками), М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, И. Г. Петровский (членами-корреспондентами).

Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР и его Ленинградское отделение были эвакуированы в Казань.

Московский университет в 1941 г. в основном был эвакуирован в Ашхабад, однако значительная часть преподавателей и студентов оставалась в Москве. Несмотря на то что во время бомбежки в октябре 1941 г. пострадали здания лекционного корпуса и Библиотеки им. А. М. Горького, 2 февраля 1942 г. в университете были возобновлены учебные занятия, а в следующем учебном году он уже в полном составе работал в Москве.

В марте 1942 г. Ленинградский университет эвакуировался частично в Елабугу, а частично в Саратов, где был размещен в помещениях Саратовского университета. Руководство обоими университетами было объединено, совместно зачастую проводилась и научная работа. В июне 1944 г. в Ленинград были реэвакуированы все курсы университета, кроме первых. Первые курсы всех факультетов оставались в Саратове до января 1945 г.

Президиум Академии наук УССР и ее институты в основном были эвакуированы в Уфу. В Уфе Академия наук работала до осени 1943 г., затем некоторое время она находилась в Москве.

---

<sup>1</sup> М. М. Терпигорев. Воспоминания горного инженера. Изд-во АН СССР, М., 1956, стр. 228—229.

Ценнейшее оборудование Киевского университета было перевезено частично в Уфу, а частично в Кзыл-Орду. Преподаватели и студенты университета сначала эвакуировались в Харьков. Однако в сентябре 1941 г. Харьковский университет также эвакуировался в Кзыл-Орду, где из двух университетов был создан Объединенный украинский государственный университет, разместившийся в помещении Кзыл-Ординского педагогического института.

Университет начал работать в составе шести факультетов. На физико-математическом факультете, а также других естественных факультетах работали в основном преподаватели Харьковского университета. Сотрудники астрономической обсерватории и часть преподавателей естественных факультетов Киевского университета эвакуировались на Урал, в Среднюю Азию и другие районы востока страны, где работали в местных научно-исследовательских учреждениях и учебных заведениях.

Черновицкий, Львовский, Минский, Вильнюсский университеты и прибалтийские высшие учебные заведения эвакуироваться не успели. Оккупанты провели в университетских центрах регистрацию имущества, материальных ценностей и преподавателей и объявили о том, что вузы будут продолжать работу. Однако фактически почти все высшие учебные заведения на оккупированной врагом территории вскоре были закрыты, а имущество и ценности вывезены. При отступлении фашистские войска, как правило, взрывали здания научно-учебных заведений и сжигали имущество, которое не успели вывезти. Этим был нанесен культуре и науке народов Советского Союза колоссальный урон, зачастую невозобновимый, так как уничтожены были уникальные ценности. Только в Киевском университете оккупанты взорвали главный учебный корпус, сожгли университетский архив, уничтожили архив древних актов, разграбили 10 музеев, 23 лаборатории с оборудованием, 18 кабинетов, часть библиотеки и вывезли много других ценностей.

В связи с эвакуацией научных и учебных учреждений в восточные районы страны перестраивалась работа и местных учреждений в этих районах. Некоторые из них временно объединялись с эвакуированными, в результате чего расширялась тематика научных исследований и повышался их уровень в местных коллективах, многие из которых, развивая свои исследования военного времени, добились уже после войны блестящих результатов. Кроме того, частично за счет преподавательского состава эвакуированных вузов были открыты новые заведения, например, в 1943 г. — Пензенский политехнический, в 1942 г. — Омский машиностроительный и Куйбышевский авиационный институты.



С. А. Христианович.

## Математические исследования в период Великой Отечественной войны

В годы войны тематика научных исследований по математике значительно пополнилась прикладными вопросами, непосредственно связанными с оборонными задачами или с более широкими запросами производства. Разрабатывались вопросы аэродинамики в связи с увеличением скоростей боевых самолетов и их маневренности, вопросы внешней баллистики, особенно применительно к теории полета реактивных снарядов, теория колебаний и теория устойчивости, велись дальнейшие исследования в области нелинейной механики, теории автоматического регулирования и в других направлениях, требовавших создания соответствующего математического аппарата.

Так, А. Н. Колмогоров выполнил ряд исследований по проблемам теории вероятностей, связанным с принципами оценок эффективности стрельбы. В. В. Голубев начал свой цикл работ по теории машущего крыла. Им была поставлена задача конечных колебаний крыла в плоско-параллельном потоке при общих предположениях относительно геометрических параметров профиля и углов атаки. М. В. Келдыш выполнил важные работы в области аэродинамики, связанные с оборонными проблемами. Над вопросами оборонной тематики работали также М. А. Лаврентьев, Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, В. И. Смирнов, С. Л. Соболев и многие другие математики. Весьма часто полученные ими результаты сразу же, еще задолго до их публикации, начинали применять на производстве.

Многие математики в первые дни войны ушли добровольцами на фронт и с оружием в руках защищали Родину. Ю. В. Линник служил в частях тяжелой артиллерии, оборонял Ленинград на Пулковских высотах. Н. П. Еругин во время решающих боев на Ленинградском фронте командовал взводом противотанковой артиллерии. Б. М. Левитан защищал Сталинград. В первые дни войны ушел на фронт и в августе 1944 г. пал смертью храбрых в боях за Варшаву лейтенант-артиллерист В. Л. Шмультян, докторант Математического института им. В. А. Стеклова. В 1941—1942 гг. на фронте был С. М. Лозинский.

Московское математическое общество во время войны разделилось на два отделения: Ташкентское, руководство которым принял на себя вице-президент общества В. В. Степанов (позднее оно переехало в Ашхабад, а затем в Свердловск), и Казанское, которое возглавил П. С. Александров.

В августе 1941 г. состоялось первое совместное заседание Казанского физико-математического и Московского математического обществ, в котором приняли участие П. С. Александров, И. М. Виноградов, Б. Н. Делоне, А. Н. Колмогоров, Л. С. Понтрягин, А. Н. Тихонов, А. Я. Хинчин, Н. Г. Чеботарев, П. А. Широков. Председательствовал на заседании Н. Н. Парфентьев. Казанское отделение Московского математического общества работало до 17 апреля 1943 г. Осенью

1942 г. часть членов Московского математического общества вернулась из Казани в Москву и образовала третье отделение общества — Московское. Осенью 1943 г. все три отделения снова объединились в Москве.

В Казани А. Д. Александров, П. С. Александров, Б. Н. Делоне, А. И. Мальцев, Л. С. Понтрягин, С. Л. Соболев и другие ведущие математики читали специальные курсы научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов университета. В эти годы в университете велись значительные научные исследования в области математики. П. А. Широков, декан физико-математического факультета, занимался конформными отображениями и геометрией Лобачевского. Н. Г. Чеботарев исследовал проблему Рауса — Гурвица, связанную с вопросами



А. Н. Тихонов.

устойчивости движения и поэтому имеющую важное практическое, в частности оборонное, значение. Его ученик В. В. Морозов в 1942 г. получил перечисление всех неполупростых максимальных подгрупп простых групп Ли. По этой проблеме он защитил докторскую диссертацию (1943 г.). В области алгебры вели исследования ученики Н. Г. Чеботарева И. Д. Адо (теория конечных групп, нильпотентные алгебры) и Н. Н. Мейман (продолжаемые полиномы, распределение нулей целой функции).

В ноябре 1943 г. Казанский университет совместно с Отделением физико-математических наук АН СССР организовал научную конференцию, посвященную 150-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского. В этой конференции приняли участие, в частности, А. П. Котельников и Д. М. Синцов.

Важные исследования выполнены в военные годы саратовскими математиками. В. В. Вагнер в 1941 г. начал цикл исследований в области оснований дифференциальной геометрии. Им получен ряд результатов, относящихся к классификации дифференциально-геометрических объектов. Н. Г. Чудаков работал над монографией по теории функций Дирихле, издать которую удалось лишь по окончании войны. Г. П. Боев перенес понятие почти периодичности в область автоморфных функций и установил понятие почти автоморфности.

Значительная научно-исследовательская работа была проведена математиками-ленинградцами. В. И. Смирнов возглавил в Елабуге, куда была эвакуирована большая часть университета, группу математиков, занимавшихся аэродинамикой и гидродинамикой. В эти годы он продолжал также работать над пятым томом своего «Курса высшей математики» (издан в 1947 г.). Л. В. Канторович исследовал некоторые вопросы вариационного исчисления и дифференциальных уравнений.



Л. В. Канторович.

Он выполнил работы прикладного значения, в частности о методах рационального раскроя металла и применения теории вероятностей к некоторым задачам оборонного значения. Н. П. Еругин, эвакуированный после тяжелого ранения в Елабугу, а затем в Саратов, написал и защитил докторскую диссертацию.

Много важных задач было решено в военные годы математиками Московского университета. И. Г. Петровский, декан механико-математического факультета, получил ряд результатов в области общей теории дифференциальных уравнений в частных производных. П. С. Александров разработал теорию полных и бикompактных пространств. В. В. Степанов выполнил математический расчет динамики взвешенных частиц, позволивший определять наиболее поражаемые места лопастей вентиляторов турбин.

Д. Е. Меньшов построил для любой измеримой функции тригонометрический ряд, сходящийся к ней почти всюду, решив, таким образом, задачу, поставленную Н. Н. Лузиным в его докторской диссертации. И. М. Гельфанд разрабатывал вопросы теории топологических групп. Было выполнено также много других работ теоретического и прикладного характера.

Учреждения Академии наук СССР, как отмечалось, в том числе Институт математики, были эвакуированы в Уфу. Руководил Институтом математики АН СССР в военные годы (с 1941 по 1944 г.) Г. В. Пфейффер. В 1942—1943 гг. он исследовал ряд вопросов, связанных с символическими формами в системах линейных уравнений многих функций.

В работах Института математики принимал деятельное участие М. А. Лаврентьев, избранный в феврале 1939 г. академиком АН СССР. В Уфе он продолжал свои исследования по проблемам гидроаэродинамики, результаты которых нашли непосредственное применение в оборонной технике.

Н. Н. Боголюбов проводил исследования, относящиеся к нелинейной механике, и начал цикл работ по статической механике. К военному времени относится также начало его работ в области теоретической физики.

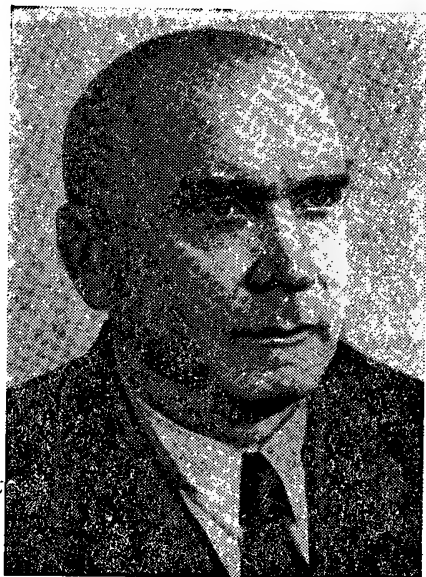
И. З. Штокало продолжал свои исследования в области теории дифференциальных уравнений с почти периодическими и квазипериодическими коэффициентами, а также выполнил работы по развитию и обобщению операционных методов. Все эти его исследования были завершены докторской диссертацией, защищенной в Москве в декабре 1943 г.

Е. Я. Ремез выполнил некоторые работы по вопросам построения среднестепенных приближений в комплексной области.

В Институте математики АН УССР в военные годы работал Д. М. Синцов. Его последние работы (он умер в 1946 г., вскоре по возвращении в Харьков) относятся к теории пфаффовых многообразий и общей теории коннексов.

М. Г. Крейн, работавший до 1941 г. в Одесском университете и Институте математики АН УССР, в 1941 г. эвакуировался в Куйбышев и по 1944 г. преподавал в Куйбышевском индустриальном институте. Исследования его относились к теории почти периодических функций, проблеме моментов, вопросам, связанным с эрмитовыми операторами.

Весьма интенсивная научная работа велась в военные годы в Закавказских республиках. В 1941 г. на базе Грузинского филиала АН СССР была создана Грузинская академия наук. Первым ее президентом был Н. И. Мухелишвили. Коллектив грузинских ученых-математиков начал большую работу по развитию теории интегральных уравнений. Руководил ею Н. И. Мухелишвили. Основой работы послужили доклады, прочитанные им на семинаре в Математическом институте им. А. М. Размадзе в 1940—1942 гг. В связи с результатами, полученными участниками семинара, в частности благодаря исследованиям И. Н. Векуа, проведенным в этом же направлении, круг рассматриваемых вопросов существенно расширился. Результаты, полученные Н. И. Мухелишвили и его учениками



И. З. Штокало.

и сотрудниками, принимавшими участие в семинаре, обобщены им в монографии «Сингулярные интегральные уравнения», опубликованной в 1944 г.

Таким образом, теория уравнений математической физики и интегральных уравнений оформилась в Тбилиси в сильное направление. Кроме Н. И. Мухелишвили в этой области работали В. Д. Купрадзе, И. Н. Векуа, Н. П. Векуа, В. Г. Гоголадзе, Д. Е. Долидзе, Д. А. Квеселав, Б. В. Хведелидзе, Д. Ф. Харазов и другие ученые, значительная часть которых окончила университет в предвоенные годы. Исследования этого (третьего) поколения грузинских математиков способствовали расширению тематики научных работ и определили ее направления в последующие годы.



М. Г. Крейн.



З. И. Халилов.

Продолжались также исследования, начатые еще задолго до войны. Вопросы алгебры разрабатывал А. К. Харадзе. Л. П. Гокиели занимался математической логикой. А. З. Вальфиш продолжал свои работы в области теории чисел. Численное интегрирование дифференциальных уравнений было предметом исследований Ш. Е. Микеладзе. Задачами теории функций занимался В. Г. Челидзе. Г. С. Чогошвили в эти годы начал разрабатывать основы гомологической теории некомпактных пространств.

В 1942 г. из кафедры геометрии и механики Тбилисского университета была выделена самостоятельная кафедра геометрии, которой до 1945 г. руководил И. Н. Векуа.

Математические исследования в Азербайджане развивались в четырех направлениях: функциональный анализ и его применения (линейные и нелинейные операторы), теория дифференциальных и интегральных уравнений, теория функций (интерполирование и приближение функций), неевклидова геометрия.

До 1946 г. в Баку работал Я. Б. Лопатинский. С 1942 по 1944 г. здесь преподавал А. А. Бухштаб (в 1944 г. он перешел в Московский педагогический институт). Его исследования относятся к теории чисел.

С 1942 г. в Азербайджанском филиале АН СССР работал ученик Н. И. Мухелишвили З. И. Халилов. Первые его работы относятся к теории функций комплексного переменного и некоторым ее применениям. Он, а затем его ученики исследовали краевые задачи при изучении систем полигармонических уравнений в двумерной плоскости. В 1944 г. Халилов начал преподавать в Азербайджанском университете.

В 1939 г. окончил аспирантуру при Московском университете И. И. Ибрагимов. Первые его работы относятся к вопросам теории аналитических функций.

В военные годы начал исследования по проблемам дифференциальной геометрии М. А. Джавадов.

Значительным событием для азербайджанской науки было открытие в марте 1945 г. Азербайджанской академии наук. Создание Академии наук АзССР в определенной степени явилось завершением организационного периода в развитии науки в Советском Азербайджане.

В ноябре 1943 г., как отмечалось выше, была открыта Академия наук Армянской ССР. Тем самым был создан руководящий научный центр республики, в институтах которого воспитывалась молодая научная смена Армении. Одним из таких институтов является Институт математики и механики (организован в 1944 г., вначале как сектор математики Академии наук).



Первые 16 лет Институтом математики и механики руководил А. Л. Шагинян. Основной тематикой исследований Шагиняна в военные годы оставались вопросы теории приближений и общей теории функций. В 1944 г. он защитил докторскую диссертацию. К этому же времени относится начало научной деятельности его ученика М. М. Джрбашяна, окончившего университет в 1941 г.

В связи с ростом числа математиков в Армении и расширением тематики научных исследований в 1944 г. математическая кафедра Ереванского университета была разделена на три кафедры: кафедру теории функций и дифференциальных уравнений, которую возглавил А. Л. Шагинян, кафедру математического анализа, руководителем которой стал В. В. Сагателян, и кафедру высшей геометрии и алгебры во главе с Н. Г. Гаспаряном. В. В. Сагателян, ученик И. И. Привалова, окончил аспирантуру в Московском университете, преподает в Ереванском университете с 1940 г., занимается вопросами математической физики. Н. Г. Гаспарян также окончил аспирантуру в Московском университете (у Я. С. Дубнова, 1941 г.), ведет исследования в области геометрии.



К. П. Персидский.

Совершенно особые условия сложились для развития науки в военные годы в Средней Азии и Казахстане. В результате эвакуации в эти районы во время Великой Отечественной войны учебных и научных учреждений из западных и южных областей страны здесь начали развиваться новые научно-исследовательские направления, в том числе и в области физико-математических наук. С самого начала 40-х годов математические исследования ведутся в Казахстане, несколько позже — в Туркменистане, Киргизии и Таджикистане.

Ряд работ по проблемам математической статистики в военные годы выполнил В. И. Романовский. Исследования Т. А. Сарымсакова были сосредоточены в некоторых областях теории вероятностей и приложения ее к вопросам математического анализа. Историей математики занимался Т. Н. Кары-Ниязов. Исследования в области математического анализа, механики и математической физики проводил Н. Н. Назаров. Дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями занимался И. С. Аржаных.

Вопросам приближения функций при помощи полиномов посвящены работы Д. Г. Гребенюка, преподававшего в Среднеазиатском университете (до 1942 г.) и Ташкентском текстильном институте.

4 ноября 1943 г. открылась Академия наук Узбекской ССР. Президентом академии был избран Т. Н. Кары-Ниязов. В первом ее составе было три академика по математике: В. И. Романовский, Т. Н. Ка-





О. А. Жаутыков.

ры-Ниязов и Т. А. Сарымсаков. Институтом математики и механики (организован в 1944 г.) руководил Н. Н. Назаров.

Математические исследования в Алма-Ате начинаются с работ К. П. Персидского. К. П. Персидский окончил в 1927 г. Казанский университет и начал заниматься теорией аналитических функций и интегральными уравнениями. С 1929 г. его научные интересы сосредоточиваются на вопросах теории вероятностей, примыкая к исследованиям А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова. Далее он переходит к вопросам устойчивости движения, которые в Казани развивал Н. Г. Четаев. С 1939 по 1940 г. Персидский руководил в Казанском университете кафедрой дифференциальных уравнений. В 1940 г. переехал в Алма-Ату.

Казахский государственный университет был основан в 1934 г. Однако в первые годы существования университета в нем не проводилась какая-либо значительная научно-исследовательская работа в области математики. Математику в 1937—1940 гг. в университете преподавал М. В. Пентковский, занимавшийся вопросами проективного преобразования номограмм (в 1940 г. переехал в Москву).

С 1941 по 1943 г. в Алма-Ате, в университете и других высших учебных заведениях, работал Н. И. Ахиезер. Он продолжал заниматься проблемами теории функций.

В 1944 г. начал работать в Секторе математики и механики Казахского филиала АН СССР О. А. Жаутыков. Его первые исследования относятся к области устойчивости движения и примыкают к работам К. П. Персидского.

Как уже упоминалось выше, Объединенный украинский государственный университет в годы войны находился в Кзыл-Орде. Коллектив университета оказал большую помощь ученым Казахстана, многие из которых защитили свои диссертации в этом университете. В мае 1942 г. Украинский университет совместно с Кзыл-Ординским педагогическим институтом и Московским институтом механизации и электрификации сельского хозяйства провел первую в Кзыл-Орде научную конференцию. Тематика конференции имела народнохозяйственное значение: она охватывала изучение и использование природных богатств Казахстана, а также некоторые вопросы оборонного значения.

В Туркменской ССР первые математические исследования связаны с военными годами, когда в Ашхабаде находилась значительная часть Московского университета.

Несмотря на тяжелые условия военного времени, в годы войны

состоялось несколько встреч советских математиков. Выше отмечалось совместное заседание Казанского физико-математического общества с Московским математическим обществом (1942 г.). В 1943 г. Академия наук СССР провела торжественные заседания, посвященные 300-й годовщине со дня рождения Исаака Ньютона. Торжественные заседания, посвященные этой дате, были проведены также Московским университетом и Казанским авиационным институтом. В этом же году в Московском и Казанском университетах и в других высших учебных заведениях состоялись научные заседания, посвященные 150-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского.

5—12 июня 1944 г. в Московском университете была проведена конференция на тему «Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры». Механико-математический факультет университета представил на конференцию следующие доклады: П. С. Александрова — «Русская и советская математика и ее влияние на мировую науку», И. И. Артоболевского — «Русская школа теории механизмов и машин», С. Н. Бернштейна — «П. Л. Чебышев и его влияние на развитие математики», С. Н. Блажко — «Астрономия в Московском университете», В. В. Голубева — «Роль русской механики в развитии мировой науки», А. Н. Колмогорова — «Роль русской науки в теории вероятностей», А. А. Космодемьянского — «Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин — основоположники современной аэромеханики», С. В. Орлова — «Работы Ф. А. Бредихина в области астрофизики», Л. С. Понтрягина — «Топология в Советском Союзе», В. В. Степанова — «Московская школа теории функций».

### **3**

#### **Задачи советской науки в первые послевоенные годы**

9 мая 1945 г. Великая Отечественная война закончилась исторической победой советского народа. Победа имела не только военно-политический, но и экономический аспект: социалистическая экономика доказала свои преимущества перед капиталистической. Несмотря на то что враг временно оккупировал огромные территории, разрушил и вывел из строя громадное количество производственных предприятий и других хозяйственных единиц, все же валовая продукция промышленности Советского Союза в 1945 г. была лишь на 8% меньше валовой продукции 1940 г. Это стало возможным потому, что еще в довоенные годы была изменена география советской промышленности и были заложены новые мощные промышленные центры на Урале, в Сибири, Средней Азии, Казахстане, Закавказье. Такое распределение промышленности в стране оказалось наиболее жизненным и отвечающим интересам всего народного хозяйства.

Война нанесла колоссальный урон стране. После войны надо было прежде всего восстановить хозяйство в районах, подвергшихся оккупации.

Знаменательным событием в истории народного хозяйства Советского Союза явилась первая сессия Верховного Совета СССР второго созыва, принявшая Закон о четвертом пятилетнем плане восстановления и развития народного хозяйства СССР на 1946—1950 гг. *«Восстановить пострадавшие районы страны, восстановить довоенный уровень промышленности и сельского хозяйства и затем превзойти этот уровень в значительных размерах»*<sup>2</sup>, — такие задачи стояли перед советским народом после окончания Великой Отечественной войны. Промышленность Советского Союза в результате выполнения плана должна была к 1950 г. превзойти уровень 1940 г. на 48%.

Послевоенная перестройка промышленности была завершена приблизительно в 1946 г. Как правило, предприятия не только возвращались к выработке гражданской продукции, а производили ее на новой, более совершенной технической основе. В результате этого уже в 1948 г. уровень 1940 г. был превзойден на 18%. В начале 1950 г. запланированный уровень производства был перевыполнен, а выполнение плана за 1950 г. показало превышение по сравнению с уровнем 1940 г. на 73%, в том числе по производству средств производства — на 105%, а по производству средств потребления — на 23%.

XIX съезд КПСС, состоявшийся в Москве 5—14 октября 1952 г., принял Директивы по пятому пятилетнему плану развития СССР на 1951—1955 гг., в соответствии с которыми уровень промышленного производства на протяжении пятилетки должен был возрасти на 70%.

В борьбе за развитие производительных сил в четвертой и пятой пятилетках важная роль отводилась науке. Для того чтобы превзойти уровень развития передовых капиталистических стран, надо было превзойти его не только в области промышленного производства, но и в области науки. А это требовало роста кадров и в количественном и в качественном отношении. За годы четвертой и пятой пятилеток были созданы новые высшие учебные заведения, новые филиалы и базы Академии наук СССР. Бюджет научных учреждений увеличивался с каждым годом. Казахский, Таджикский, Туркменский и Киргизский филиалы АН СССР были реорганизованы в Академии наук соответствующих союзных республик.

XIX съезд КПСС в своих решениях так сформулировал задачи, поставленные перед советской наукой: «Улучшить работу научно-исследовательских институтов и научную работу высших учебных заведений, полнее использовать научные силы для решения важнейших вопросов развития народного хозяйства, обобщения передового опыта, обеспечивая широкое практическое применение научных открытий. Всемерно содействовать ученым в разработке ими теоретических проблем во всех областях знания и укреплять связь науки с производством»<sup>3</sup>.

Советский народ успешно выполнил план пятой пятилетки. Были повышены не только количественные, но и качественные показатели

<sup>2</sup> Директивы КПСС и Советского правительства по хозяйственным вопросам. Т. 3. Госполитиздат, М., 1958, стр. 11.

<sup>3</sup> КПСС в резолюциях. Ч. 3, стр. 575.

ли: улучшено использование оборудования, значительно повышены производительность труда, качество выпускаемой продукции.

В течение пятой пятилетки выпускаемая продукция в значительной степени обновилась. За 1951—1955 гг. было создано более 2000 новых машин и механизмов, новые типы всех транспортных машин, включая самолеты, значительное развитие получили некоторые отрасли новой техники, в которой особенно велика была доля науки, в частности ядерной техники. В 1954 г. вступила в строй первая в мире атомная электростанция мощностью в 5000 *квт.*

XX съезд партии, состоявшийся 14—25 февраля 1956 г., выработал директивы по шестому пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1956—1960 гг., в которых уделил развитию науки еще большее внимание. Отмечая огромные достижения советской науки в ряде областей, в том числе в ядерной физике, математике, механике и некоторых областях технических наук, съезд в то же время указал на недостатки в деятельности многих научных учреждений: на слабую связь научных учреждений с практикой, разобщенность в работе учреждений АН СССР, отраслевых институтов и высших учебных заведений, несоответствие сети научных и учебных заведений экономическим и природным условиям. Съезд «считает необходимым всемерно укрепить связь научных учреждений страны с производством, с конкретными запросами народного хозяйства, сосредоточить их творческие усилия на решении наиболее важных научно-технических проблем, неуклонно поднимать роль науки в решении практических задач коммунистического строительства»<sup>4</sup>.

#### **4**

### **Деятельность Академии наук СССР и московских математиков в послевоенные годы**

Первые послевоенные выборы в Академии наук СССР состоялись в ноябре 1946 г. Состав академии дополнили 43 академика и 112 членов-корреспондентов. На следующих выборах, в октябре 1953 г., были выбраны 51 академик и 148 членов-корреспондентов.

В 1946 г. академиками в числе других были избраны И. И. Артоболевский и И. Г. Петровский, членами-корреспондентами АН СССР — Н. Н. Боголюбов, А. Д. Александров, И. Н. Векуа, Р. О. Кузьмин, Л. А. Люстерник, В. В. Степанов.

И. И. Артоболевский разрабатывал вопросы синтеза механизмов, динамики механических систем, исследовал многие вопросы кинематической геометрии, в частности теорию воспроизведения математических зависимостей с помощью механических средств.

---

<sup>4</sup> КПСС в резолюциях. Ч. 4, стр. 137.



Л. И. Селов.

клова АН СССР и кафедру теоретической физики в Московском университете. Во второй половине 40-х годов Боголюбов развил цикл исследований в области статистической физики и квантовой теории поля, а также разработал специальный математический аппарат для исследования этих областей теоретической физики.

А. Д. Александров, ученик Б. Н. Делоне, — профессор, а с 1950 по 1954 г. ректор Ленинградского университета. Он создал новое направление в геометрии, объектом изучения которого являются нерегулярные поверхности, применив при этом к геометрии новые методы исследования. Кроме того, Александрову принадлежат работы в области теории дифференциальных уравнений в частных производных, связанной с его геометрическими исследованиями, а также в области топологии и теории функций множеств.

И. Н. Векуа до 1952 г. был профессором и ректором Тбилисского университета, в 1952 г. перешел в Московский университет, с 1953 г. работал также в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР. Работы И. Н. Векуа относятся к теории уравнений в частных производных эллиптического типа при двух независимых переменных и их приложениям, дифференциальной геометрии и одномерным сингулярным интегральным уравнениям. Ему же принадлежат иссле-

И. Г. Петровский в 40—50-х годах продолжал свои исследования в области обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Несколько позже перешел к исследованиям в области алгебраической геометрии, которые проводил частично совместно с О. А. Олейник. В 1949—1951 гг. он исполнял обязанности академика-секретаря Отделения физико-математических наук АН СССР. С 1951 г. Петровский — ректор Московского университета.

Н. Н. Боголюбов с 1946 по 1949 г. был профессором и деканом механико-математического факультета в Киевском университете и заведовал отделом в Институте математики АН УССР. В 1950 г. переехал в Москву, где возглавил отдел в Математическом институте им. В. А. Сте-



А. А. Дородницын.

дования по теории функций комплексного переменного и их применениям к геометрии и механике, а также по теории оболочек.

Основные работы Р. О. Кузьмина посвящены вопросам теории чисел. Кроме того, он занимался теорией функций, теорией рядов Дирихле, некоторыми вопросами дифференциальной геометрии и др.

Л. А. Люстерник с 1931 г. профессор Московского университета. Его исследования относятся к различным направлениям математики. Основные из них — работы в области вариационного исчисления и его приложений. Люстерник руководит семинаром по топологическим методам вариационного исчисления. Им выполнен также ряд работ по функциональному анализу, вычислительным методам и др.

В. В. Степанов продолжал свои исследования в области качественной теории дифференциальных уравнений.

В 1953 г. академиками были избраны математики Н. Н. Боголюбов, П. С. Александров, А. А. Дородницын, С. А. Лебедев, Л. И. Седов, членами-корреспондентами — С. Н. Мергелян, А. А. Марков, П. С. Новиков, И. М. Гельфанд, Д. Е. Меньшов.

П. С. Александров, профессор Московского университета, в 40—50-х годах был бессменным президентом Московского математического общества. В это время он продолжает и углубляет свои топологические исследования, публикует ряд статей и сообщений по истории математики, значительная часть которых имеет значение первоисточника.

А. Д. Дородницын с 1941 г. работал в Центральном аэрогидродинамическом институте, с 1953 г. он директор вычислительного центра АН СССР. Работы его посвящены, в основном, вопросам динамической метеорологии, газовой динамики, обыкновенным дифференциальным уравнениям и вопросам вычислительной математики.

С. А. Лебедев занимался исследовательской деятельностью в области счетных устройств. С 1953 г. он директор Института точной механики и вычислительной техники АН СССР. Им создана первая советская быстродействующая вычислительная машина.

Л. И. Седов с 1937 г. профессор Московского университета. Его исследования относятся к аэро-, гидро- и газовой динамике. Им развита теория подобия и размерности в механике.

С. Н. Мергелян работал в Институте математики АН АрмССР и Ереванском университете. С 1953 г. он профессор Московского университета. Его основные работы относятся к конструктивной теории функций комплексного переменного.

А. А. Марков с 1942 по 1950 г. был директором Ленинградского отделения Математического института АН СССР и читал лекции в Ленин-



С. А. Лебедев.



С. Н. Мергелян

градском университете. С 1953 г. он заведует отделом Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Его работы 40—50-х годов относятся к топологии, теории динамических систем, основаниям математики и математической логике.

П. С. Новиков в рассматриваемый период продолжал свои исследования в области дескриптивной теории множеств, затем перешел к исследованиям в области алгебры и математической логики. С 1934 г. он работает в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР.

Исследования Д. Е. Меньшова в области тригонометрических рядов и теории ортогональных функций непосредственно примыкают к работам Н. Н. Лузина. Его работы 40—50-х годов посвящены теории рядов Фурье. Вместе с Н. К. Бари, а впо-

следствии с П. Л. Ульяновым он руководит в Московском университете семинаром по теории функций действительного переменного.

И. М. Гельфанд с 1939 г. работает в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР и преподает в Московском университете. Его работы относятся к алгебраическим вопросам функционального анализа. Часть из них, посвященная представлениям унитарных групп, групп Лоренца, групп Ли, выполнена им совместно с Н. А. Наймарком, Б. М. Левитаном, А. М. Ягломом, М. И. Граевым, Г. Е. Шиловым и др. Исследованиями Гельфанда в области теории нормированных колец установлены связи между идеями функционального анализа и абстрактной топологии.

Ю. В. Линник продолжал свои исследования в области теории чисел. В 1947 г. он занялся также исследованиями в области теории вероятностей и математической статистики, которые проводил не только в теоретическом, но и в прикладном аспекте. До 1965 г. Линник был бессменным президентом Ленинградского математического общества. С 1944 г. он профессор Ленинградского университета.

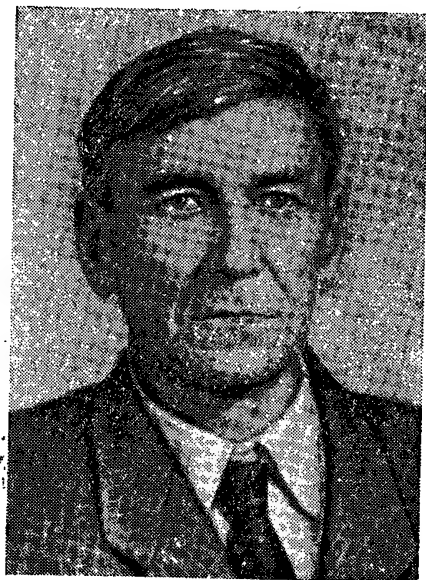
Объединяющим центром для московских математиков в 40—50-х годах продолжало оставаться Московское математическое общество.



А. А. Марков.



Наибольшие математические коллективы концентрировались вокруг Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР и Московского университета. Кроме того, значительные коллективы математиков работали в других академических институтах и на кафедрах высших учебных заведений. В 30-х годах еще не все кафедры вузов имели в своем составе достаточно квалифицированные кадры, в 40-е же годы это положение в корне изменилось: многие кафедры математики московских вузов включились в активную научно-исследовательскую работу. В большинстве случаев направление исследований определялось научными интересами руководителя и профессоров кафедры. Поэтому учесть все направления исследований, в которых работали московские математики, весьма затруднительно, мы назовем лишь некоторые из них.



П. С. Новиков.

Коллектив математиков Московского университета был очень многочислен. Так, алгебру в университете развивали О. Ю. Шмидт (до 1956 г.), Б. Н. Делоне, А. Г. Курош, Е. Б. Дынкин, И. Р. Шафаревич, Л. А. Скорняков, М. М. Постников. А. Г. Курош работал в области теории алгебр, теории групп, руководил семинаром по общей алгебре. Исследования Е. Б. Дынкина относились к алгебрам и группам Ли, им были изучены также марковские случайные процессы. И. Р. Шафаревич изучал поля алгебраических чисел и нильпотентные алгебры. Работы Л. А. Скорнякова и М. М. Постникова включали пограничные вопросы топологии и алгебры. Б. Н. Делоне занимался не только алгеброй, но и рядом вопросов геометрии и теории чисел. Ему принадлежит также монография по теории математических машин и приборов и ряд статей по истории математики.

Таким образом, в Московском университете представлены все основные направления классической и современной алгебры, ведущие свое начало от Д. А. Граве (через его учеников О. Ю. Шмидта и Б. Н. Делоне), П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова, Л. С. Понтрягина, А. Г. Куроша.

Геометрия была представлена в Московском университете также большим коллективом ученых. Многомерную дифференциальную геометрию и тензорный анализ развивали здесь В. Ф. Каган и его ученики П. К. Рашевский и Н. В. Ефимов.

В. Ф. Каган руководил семинаром по векторному и тензорному анализу. Проводя исследования в области неевклидовой геометрии, он одновременно занимался вопросами истории геометрии, редактировал собрание сочинений Н. И. Лобачевского, издал его биографию.

Исследования П. К. Рашевского относятся к дифференциальной геометрии, различным вопросам современной алгебры и пограничным





Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова.

проблемам алгебры и геометрии. Он занимался также геометрической теорией уравнений с частными производными.

Н. В. Ефимов в 40—50-х годах работал в области теории поверхностей и примыкающих к ней вопросов дифференциальной геометрии. В Московском университете он руководил кафедрой математического анализа.

Второе традиционно московское направление в области дифференциальной геометрии представляли в Московском университете С. П. Фиников, С. С. Бюшгенс, С. В. Бахвалов, С. Д. Россинский.

С. П. Фиников с 1953 г. руководил кафедрой геометрии и семинаром по дифференциальной геометрии. Кроме работ в области проективно-дифференциальной геометрии и теории изгибаний он издал в 50-х годах несколько руководств по геометрии. В этой же области работал С. С. Бюшгенс. Исследования С. В. Бахвалова относились к теории геодезиче-

ских линий, теории конгруэнций и некоторым вопросам номографии. С. Д. Россинский изучал изгибания конгруэнций.

Виднейшим участником семинара по векторному и тензорному анализу был Я. С. Дубнов (1887—1957), ученик С. О. Шатуновского и В. Ф. Кагана по Новороссийскому университету. Он работал в МГУ с 1928 до 1952 г. Его исследования относятся к дифференциальной геометрии, а также к вопросам преподавания математики в средней и высшей школе.

В области топологии кроме П. С. Александрова и Л. С. Понтрягина работали Л. А. Тумаркин, М. М. Постников, Ю. М. Смирнов, Л. А. Скорняков. Теорию топологических пространств исследовали Л. А. Тумаркин и Ю. М. Смирнов; Л. А. Скорняков изучал вопросы, связанные с топологической проективной плоскостью. Развитие топологических идей в 40—50-е годы оказалось направленным не только в сторону дальнейшего совершенствования топологических методов, но и в сторону проникновения их во многие отрасли математики, первоначально далеко стоявшие от топологии: в функциональный анализ (у И. М. Гельфанда), в вариационное исчисление (у Л. А. Люстерника), в геометрию, алгебру, анализ.

Топология, зародившаяся в Советском Союзе в стенах Московского университета, в 40—50-х годах развилась в мощную школу, занимающую в настоящее время одно из первых мест в мировой науке. Советской топологической школой бессменно руководит П. С. Александров. Основными направлениями исследований школы являются теория непрерывных отображений наиболее классических геометрических образов (Л. С. Понтрягин, М. М. Постников) и теория размерности и законов двойственности для незамкнутых множеств (П. С. Александров, К. А. Ситников и др.). Кроме основных направлений школа развивает исследования и в области некоторых других топологических проблем. Например, Ю. М. Смирнов исследовал проблему метризуемого топологического пространства и предложил весьма простое ее решение.

Существенные результаты в области топологии и топологических методов получены А. Н. Тихоновым, Л. А. Тумаркиным, В. Г. Болтянским, В. А. Ефремовичем, В. А. Рохлиным и другими учеными.

Во второй половине 40-х годов значительно возросли связи математиков по различным проблемам. Семинары, совещания и симпозиумы по отдельным специальным вопросам, секции на более широких совещаниях и конференциях сыграли весьма важную роль в деле объединения ученых и ознакомления их с новейшими результатами по комплексу проблем. Благодаря таким связям, поддерживаемым и зачастую организуемым активно действующим Московским математическим обществом, коллектив московских математиков и московские специальные математические школы получили более широкие возможности для творческих контактов и взаимовлияний в процессе своей научной деятельности. В течение рассматриваемого периода нередко одни и те же ученые работали в разных учреждениях и входили в состав различных коллек-

тивов, а поэтому и полученные ими результаты являлись достижением всей московской математической школы.

Крупнейший математический коллектив сосредоточен в стенах Математического института им. В. А. Стеклова. Здесь в 40—50-х годах работали И. М. Виноградов, М. В. Келдыш, А. Н. Колмогоров, Н. Н. Боголюбов, М. А. Лаврентьев, С. Л. Соболев, П. С. Новиков, И. М. Гельфанд, А. О. Гельфонд, И. Р. Шафаревич, А. А. Ляпунов, С. М. Никольский, В. Г. Болтянский, М. А. Евграфов, Л. В. Келдыш, Н. М. Коробов, О. А. Олейник, А. Г. Постников, М. М. Постников, К. А. Ситников, С. Б. Стечкин, Н. В. Смирнов и другие ученые.

Теория аналитических функций отражена в работах М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева, С. М. Никольского, В. В. Голубева, А. И. Маркушевича, А. О. Гельфонда, С. Н. Мергеляна, Д. Е. Меньшова, Н. К. Бари, П. Л. Ульянова и др. Труды одного из главных организаторов московской математической школы Н. Н. Лузина были посвящены инвариантности в теории дифференциальных уравнений и вопросам теории функций действительного переменного.

Исследования в области теории функций комплексного переменного характеризуются практической направленностью и тесной связью с различными прикладными проблемами, относящимися к задачам гидро- и аэродинамики, теории упругого тела и др. Число подобных практических задач, в которых находят свое применение методы теории функций комплексного переменного, непрерывно растет.

Глубокое теоретическое и вместе с тем исключительно важное практическое значение имеют исследования М. В. Келдыша. Его основные работы посвящены вопросам теории функций комплексного переменного, теории несамосопряженных операторов, теории потенциала, а также различным вопросам, относящимся к области неустановившихся движений тел в жидкости, теории обтекания тел, теории упругих колебаний и др. М. В. Келдыш внес фундаментальный вклад в дело создания теории движения самолета.

М. А. Лаврентьев переехал в Москву (из Киева) в 1950 г., с 1951 г. он член Президиума АН СССР. В 40—50-х годах исследования Лаврентьева относились к теории функций комплексного переменного, в частности к конформным и квазиконформным отображениям и приложениям этих теорий к вопросам устойчивости и механики сплошных сред, где им получены фундаментальные результаты.

Существенные результаты в области граничных свойств аналитических функций, после работ в этой области Н. Н. Лузина, М. А. Лаврентьева и М. В. Келдыша, получены С. Н. Мергеляном.

В области метрической теории функций действительного переменного исследования московских математиков были распространены на функции нескольких переменных (Г. П. Толстов). В трудах С. М. Никольского и его учеников получили дальнейшее развитие в различных направлениях методы теории функций действительного переменного, особенно по проблемам приближения функций.

А. И. Маркушевич в начале 40-х годов изучал общие подходы к теории аппроксимации, интерполяции и разложения функций в ряды.

Одним из первых он применил к изучению семейств аналитических функций методы теории линейных топологических пространств. Затем перешел к исследованию граничных свойств аналитических функций. В 40-е годы Маркушевич руководит семинаром Московского университета по теории функций комплексного переменного.



А. И. Маркушевич.

Исследования в области теории вероятностей в Москве проводились в 40—50-х годах в нескольких направлениях. Московская школа А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина, развивая свои идеи, вступает во взаимосвязь с классическим и функциональным анализом, теорией дифференциальных уравнений, математической статистикой и другими направлениями. Это — обоснованные А. Я. Хинчиным методы классической и квантовой статистики, предложенные А. Н. Колмогоровым методы производственного контроля продукции, а также его теория «ветвящихся случайных процессов», разработанная им совместно с Б. А. Севастьяновым и Н. И. Дмитриевым, исследования Е. Б. Дынкина в области «достаточных статистик», работы Ю. В. Прохорова и Р. Л. Добрушина по усиленному закону больших чисел и уточнению предельных теорем.

Классическую «чебышевскую» теорию вероятностей в Москве развивали С. Н. Бернштейн и его ученики.

Несколько обособленными были исследования в области теории вероятностей и математической статистики Е. Е. Слуцкого и учеников В. И. Романовского, связанных в своих работах с ташкентской школой теории вероятностей.

Одним из наиболее значительных математических направлений, получившим широкое развитие в Москве, является теория дифференциальных уравнений. В этой области глубокие результаты принадлежат И. Г. Петровскому, С. Л. Соболеву, А. Н. Тихонову, В. В. Степанову, Л. А. Люстернику, В. В. Немыцкому, О. А. Олейник, Б. П. Демидовичу и др.

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, развиваемая И. Г. Петровским и его учениками, нашла свое отражение также в трудах В. В. Немыцкого (исследования качественного топологического характера), А. Н. Тихонова и его учеников (исследования поведения решений дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных).

Ряд вопросов теории дифференциальных уравнений в частных производных изучался О. А. Олейник и ее учениками. Часть из решенных ею задач относится к краевым задачам уравнений в частных производ-

ных смешанного типа, возникающим в связи с тем, что при переходе от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым уравнения эллиптического типа переходят в уравнения гиперболического типа.

Вопросы, связанные с исследованием дискретных вычислительных процессов, а также скорости сходимости и устойчивости уравнений в конечных разностях, изучались С. Л. Соболевым, Л. А. Люстерником и др.

В 40-х годах в Московском университете сформировалась новая школа функционального анализа. Связана она была с исследованиями И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова и др. На стыке между алгеброй, топологией и функциональным анализом выполнялись исследования в области теории непрерывных групп. В 1954 г. была вторично издана монография Л. С. Понтрягина «Непрерывные группы», занимающая ведущее место в этой области. Дальнейшие исследования в области теории групп были выполнены И. М. Гельфандом, Е. Б. Дынкиным и др.

Существенное значение для развития московской школы функционального анализа имел семинар по функциональному анализу и математической физике при Московском университете, руководимый И. М. Гельфандом. В первой половине 40-х годов тематика научно-исследовательской работы семинара была значительно связана с вопросами теории дифференциальных уравнений и высшей алгеброй. Во второй половине 40-х годов повысился интерес к задачам теоретической физики, в первую очередь квантовой механики. Позже были включены вопросы теории обобщенных функций, теории информации, теории случайных процессов и др. В работе семинара принимали участие Г. Е. Шилов, М. А. Наймарк, Е. Б. Дынкин, Н. Я. Виленкин, Б. М. Левитан, М. И. Граев и другие ученые.

Проблемы теории чисел продолжали занимать одно из ведущих мест в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР. Это направление возглавлял (возглавляет и ныне) И. М. Виноградов. В 40—50-х годах Виноградов исследовал аддитивные проблемы теории чисел, вопросы оценки тригонометрических сумм и ряд проблем аналитической теории чисел. В 1952—1953 гг. он дал замечательную оценку суммы характеров, когда аргумент пробегает последовательность простых чисел, сдвинутых на фиксированное целое число. В 1955 г. разработал новые приемы асимптотической геометрии.

Теорией алгебраических и трансцендентных чисел занимался А. О. Гельфонд, руководивший научно-исследовательским семинаром по теории чисел при Московском университете. Ряд исследований по теории чисел выполнил Б. Н. Делоне. Ему принадлежат также работы большого обзорного характера по истории исследований в области теории чисел.

Истории математики в Московском университете серьезные исследования посвятили С. А. Яновская, И. Г. Башмакова и К. А. Рыбников. Они продолжали изучение и исследование математических рукописей Карла Маркса, начатое Яновской еще в начале 30-х годов. Разрабатывали ряд тем по истории отечественной математики. Активно действовал семинар по истории математики и математических знаний, которым

руководили в 1944 г. С. А. Яновская и А. П. Юшкевич, а позже и К. А. Рыбников. Вопросами истории математики, философии и обоснования математики занимались также ведущие математики московской школы (П. С. Александров, А. Я. Хинчин, А. Н. Колмогоров, Б. Н. Делоне и др.).

Кроме двух основных математических коллективов — Московского университета и Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР — в Москве, как отмечалось выше, научные исследования проводили коллективы математиков в академических и учебных институтах: Институте автоматизации и телемеханики, Институте механики, Вычислительном центре, Институте истории естествознания и техники, МВТУ, педагогических, физико-техническом, энергетическом, инженерно-строительном и других институтах. К московскому коллективу историков математики и механики принадлежат А. П. Юшкевич, А. Т. Григорьян, В. П. Зубов, Э. Кольман, М. Я. Выгодский, И. Г. Башмакова, Б. А. Розенфельд, Г. Ф. Рыбкин и др.



А. П. Юшкевич.

А. П. Юшкевич в 1941—1952 гг. руководил кафедрой математики в МВТУ. С 1945 г. он работает в Институте истории естествознания и техники АН СССР. Им изучены вопросы возникновения и развития отдельных математических проблем, разработаны многие вопросы истории отечественной математики XVIII и XIX вв., средневековой математики стран Ближнего Востока, в том числе Средней Азии, Ирана и Азербайджана (часть этих работ выполнена Юшкевичем совместно с Б. А. Розенфельдом).

Б. А. Розенфельд в 1943—1950 гг. работал в МВТУ и научно-исследовательских институтах. Его научные интересы в эти годы относились к геометрии (неевклидова геометрия, геометрия более общих однородных пространств, дифференциальная геометрия в этих пространствах). В 50-х годах он начал свои исследования в области истории математики стран Ближнего Востока.

В. П. Зубов (1899—1954) занимался историей и теорией искусства и историей науки. В области истории математики В. П. Зубов исследовал вопросы древнерусской математики, а также истории математики и механики раннего западноевропейского средневековья.

А. Т. Григорьяну принадлежат исследования по истории механики и некоторым смежным вопросам истории науки.

Работы Э. Кольмана относятся ко многим вопросам истории и философии математики. Им особенно исследованы те периоды, когда история перемежается с современностью.

Один из старейших московских историков математики М. Я. Выгодский написал в 50-е годы ряд работ по истории математики XVIII и XIX вв., а также по античной математике. Многие проблемы истории античной математики разрешены в трудах И. Г. Башмаковой, занимавшейся, кроме того, вопросами истории отечественной математики.

Г. Ф. Рыбкин работает в области истории отечественной математики XIX в. Вместе с А. П. Юшкевичем он издает сборник по истории математики «Историко-математические исследования».

И. Н. Веселовский исследовал ряд вопросов античной и древней математики. В. Е. Прудников изучал историю отечественной математики XVIII и XIX вв., особенно преподавания математики. Исследованием истории геометрии (теории многогранников) и некоторых других вопросов истории математики занимается И. К. Андронов.

В 40—50-х годах в московских вузах работали С. М. Никольский, Л. Д. Кудрявцев, Ф. Р. Гантмахер, М. Р. Шура-Бура (Московский физико-технический институт), А. Ф. Бермант (Московский инженерно-строительный институт), М. Г. Слободянский (Московский энергетический институт), И. Н. Веселовский, А. Н. Обморшев, А. П. Юшкевич (МВТУ), Б. М. Левитан, Г. П. Толстов, Ф. И. Франкль (артиллерийская академия), Н. Я. Виленкин (военно-инженерная академия), В. С. Пугачев (военно-воздушная академия), М. М. Вайнберг, П. И. Романовский, А. А. Темляков (Московский областной педагогический институт), Г. Б. Гуревич, Д. И. Перепелкин, В. Н. Молодший (Московский педагогический институт им. В. И. Ленина), И. Е. Базилевич (Московский институт стали и сплавов) и другие математики.

Исследования Л. Д. Кудрявцева относятся к проблемам теории функций действительного переменного, функционального анализа и некоторым вопросам вычислительной математики. Ф. Р. Гантмахер занимался проблемами внешней баллистики, теории матриц, теории устойчивости, решений систем дифференциальных уравнений.

Работы М. Р. Шуры-Буры охватывают вопросы оценки погрешности и другие задачи вычислительной математики, а также теории счетных машин. А. Ф. Бермант (1904—1959) занимался различными вопросами теории функций. Значительное распространение получил его «Курс математического анализа» (в двух частях), многократно переиздававшийся.

Исследования М. Г. Слободянского относятся к области приближенных вычислений и некоторым другим вопросам прикладной математики. Б. М. Левитан продолжал свою работу в области теории функций и функционального анализа. Г. П. Толстов занимался исследованиями метрической теории функций и разных вопросов математического анализа, написал «Курс математического анализа» (в двух книгах). Ф. И. Франкль изучал ряд вопросов топологии и уравнений математической физики, а также некоторые вопросы прикладного значения. Н. Я. Виленкин исследовал топологические группы и интегральные уравнения, В. С. Пугачев — теорию вероятностей и ее приложения, М. М. Вайнберг, — в основном, теорию нелинейных интегральных уравнений, П. И. Романовский — проблемы анализа, А. А. Темляков —



теорию функций многих комплексных переменных и некоторые вопросы нелинейных интегральных уравнений. Г. Б. Гуревич работает в области алгебры, векторного и тензорного исчисления. Д. И. Перепелкин (1900—1954), член-корреспондент Академии педагогических наук РСФСР, занимался вопросами геометрии, И. Е. Базилевич — проблемой однолистных функций.

## Б

### **Исследования ленинградских математиков в послевоенные годы**

Основные математические коллективы в Ленинграде в 40—50-х годах объединялись вокруг Ленинградского отделения Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, Ленинградского университета и Ленинградского политехнического института. Кроме того, значительная научно-исследовательская работа в области математики велась на кафедрах многих высших учебных заведений.

В Ленинградском университете на математических кафедрах работали А. Д. Александров, Ю. В. Линник, В. И. Смирнов, Л. В. Канторович, Н. П. Еругин, Д. К. Фаддеев, А. А. Марков, Б. А. Венков, Г. М. Голузин, В. И. Крылов, О. А. Ладыженская, С. М. Лозинский, С. Г. Михлин, И. П. Натансон, В. А. Тартаковский, Г. М. Фихтенгольц, Г. И. Петрашень, В. А. Плисс.

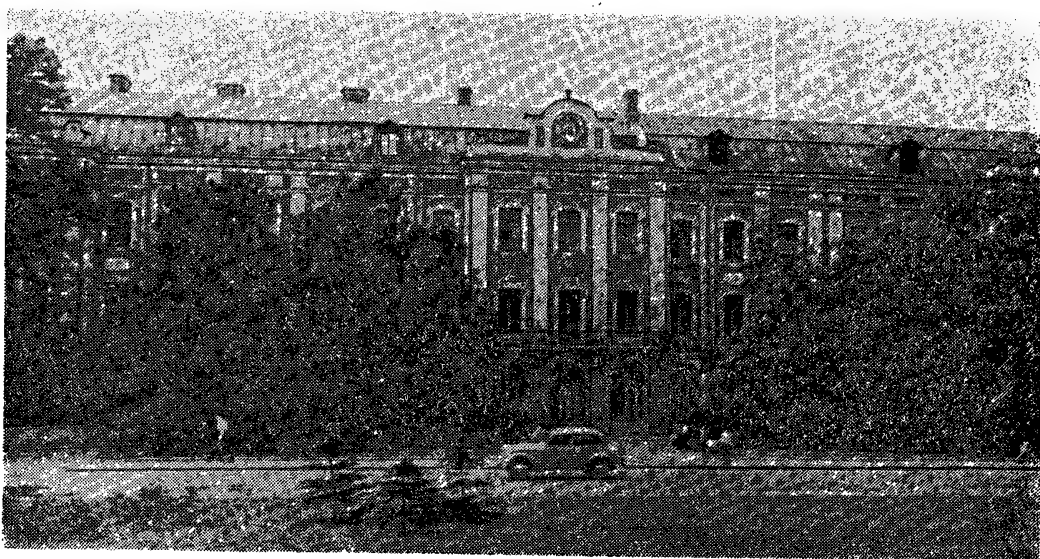
Выше отмечались направления исследований Ю. В. Линника. В. И. Смирнов работал над теорией сопряженных функций, занимался переизданием и совершенствованием своего пятитомного курса высшей математики — единственного в мировой литературе руководства по математике учебно-энциклопедического характера, а также исследовал различные вопросы истории отечественной математики. Он возглавлял академическую комиссию по истории физико-математических наук, принимал деятельное участие в издании трудов М. В. Остроградского, А. М. Ляпунова, А. Н. Крылова, Н. М. Гюнтера, возглавлял ученый совет Архива АН СССР. В университете В. И. Смирнов руководил в разное время шестью математическими кафедрами.

Н. П. Еругин продолжал свои исследования в области качественной и аналитической теории дифференциальных уравнений. Работал в университете до 1956 г. С 1949 по 1951 г. был деканом математикомеханического факультета. С 1956 г. — академик Академии наук Белорусской ССР, работает в Минске.

Основные исследования Б. А. Венкова относятся к области теории чисел и алгебры. Ряд работ выполнен им по истории математики. В частности, он принимал участие в издании собрания сочинений Г. Ф. Вороного (комментарии к томам 1—3).

Л. В. Канторович работал в Ленинградском университете (с 1932 г.) и Ленинградском отделении Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (с 1939 г.). Его исследования 40—50-х годов относятся





Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова.

к теории вероятностей и математической статистике, функциональному анализу, приближенным методам вычислений и некоторым другим вопросам вычислительной и машинной математики.

В. И. Крылов работал в Ленинградском университете с 1930 по 1957 г. В 1957 г. был избран академиком Академии наук Белорусской ССР и переехал в Минск. Его исследования относятся к уравнениям математической физики, приближенным методам математического анализа и вариационному исчислению.

О. А. Ладыженская (в университете с 1949 г.) занимается исследованиями в области дифференциальных уравнений в частных производных, в направлении трудов И. Г. Петровского и С. Л. Соболева.

С. М. Лозинский вел научные работы в области конструктивной и метрической теории функций действительного переменного, а также по вопросам численных методов в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. С. Г. Михлин занимается теорией сингулярных интегральных уравнений и некоторыми задачами математической физики.

И. П. Натансон (1906—1964) работал в Ленинградском университете с 1932 г., занимался исследованиями по метрической и конструктивной теории функций. Опубликовал учебники «Конструктивная теория функций» (1949 г.), «Теория функций вещественного переменного» (1950 г.), а также «Краткий курс высшей математики» (1963 г.).

В. А. Тартаковский преподавал в университете до 1941 г. С 1944 г., по возвращении из эвакуации, он работает в Ленинградском институте точной механики и оптики. Его научные интересы сосредоточены на вопросах теории групп и теории чисел.

Г. М. Фихтенгольдц занимался функциональным анализом, теорией функций действительного переменного и некоторыми вопросами математического анализа. Переиздал два первых тома своего учебника

для механико-математических факультетов университетов «Курс дифференциального и интегрального исчисления» и написал третий том учебника (опубликован в 1949 г.), а также курс «Основы математического анализа» (в двух томах).

Д. К. Фаддеев в 40—50-х годах вел исследования в области геометрии теории Галуа, теории гомологий в группах, теории простых центральных алгебр, теории полей и некоторых других алгебраических вопросов.

Исследования Г. И. Петрашеня относятся к ряду вопросов прикладной математики. Им, в частности, разработаны вопросы теории цилиндрических функций и теории акустических и электромагнитных волн.

В коллективе Ленинградского отделения Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (ЛОМИ) в рассматриваемый период работали в основном те же математики, что и в Ленинградском университете, — Ю. В. Линник, Г. М. Голузин, Л. В. Канторович, Е. П. Еругин, Д. К. Фаддеев, А. А. Марков, В. И. Крылов, О. И. Ладыженская, Н. А. Шанин, Г. И. Петрашень и др. Директором ЛОМИ с 1942 по 1951 г. был А. А. Марков, с 1952 по 1957 г. — Н. П. Еругин, с 1958 г. — Г. И. Петрашень.

В других высших учебных заведениях Ленинграда преподавали и вели научно-исследовательскую работу А. И. Лурье, М. Л. Франк (политехнический институт), Б. З. Вулих, Е. С. Ляпин (педагогический институт), А. К. Митропольский (лесотехническая академия), Б. А. Рымаренко (механический институт), А. Г. Пинскер (инженерно-экономический институт), Н. А. Сапогов (институт инженеров железнодорожного транспорта), И. Я. Депман (педагогический институт) и другие математики.

Н. А. Шанин занимался исследованиями в области теории топологических пространств и математической логики.

А. И. Лурье вел исследования в области механики и прикладной математики, в частности, занимался вопросами устойчивости регулируемых систем и операционного исчисления. Предметом исследований Б. З. Вулиха была теория нормированных пространств. В 40—50-е годы им выполнен цикл работ по вопросам линейных полуупорядоченных пространств и полуупорядоченных множеств.

Е. С. Ляпин с 1946 г. заведует кафедрой алгебры и геометрии в Ленинградском педагогическом институте им. А. И. Герцена. Его научные исследования относятся к области абстрактных полугрупп. Опубликован его «Курс высшей алгебры» (два издания).

Б. А. Рымаренко работал в ленинградских вузах с 1944 г., с 1945 г. — в Ленинградском механическом институте. Его исследования относятся к области монотонных полиномов (примыкают к работам С. Н. Бернштейна).

Н. А. Сапогов занимается теорией неоднородных цепей Маркова, а также конструктивной теорией функций.

И. Я. Депман исследует вопросы истории математики.

### **Развитие математики в послевоенные годы в других научных и вузовских центрах РСФСР**

В 40—50-х годах значительно выросла сеть высших учебных заведений. Так, в РСФСР были открыты в 1946 г. Казанский инженерно-строительный институт, в 1950 г. — Кемеровский горный институт, в 1952 г. — Сталинградский институт инженеров городского хозяйства, Ижевский механический институт, Таганрогский и Рязанский радиотехнический институты, в 1948 г. — Уфинский нефтяной институт, в 1953 г. — Тульский горный и Новосибирский электротехнический институты, в 1951 г. — Челябинский, в 1955 г. — Комсомольский-на-Амуре, в 1957 г. — Ульяновский политехнические институты.

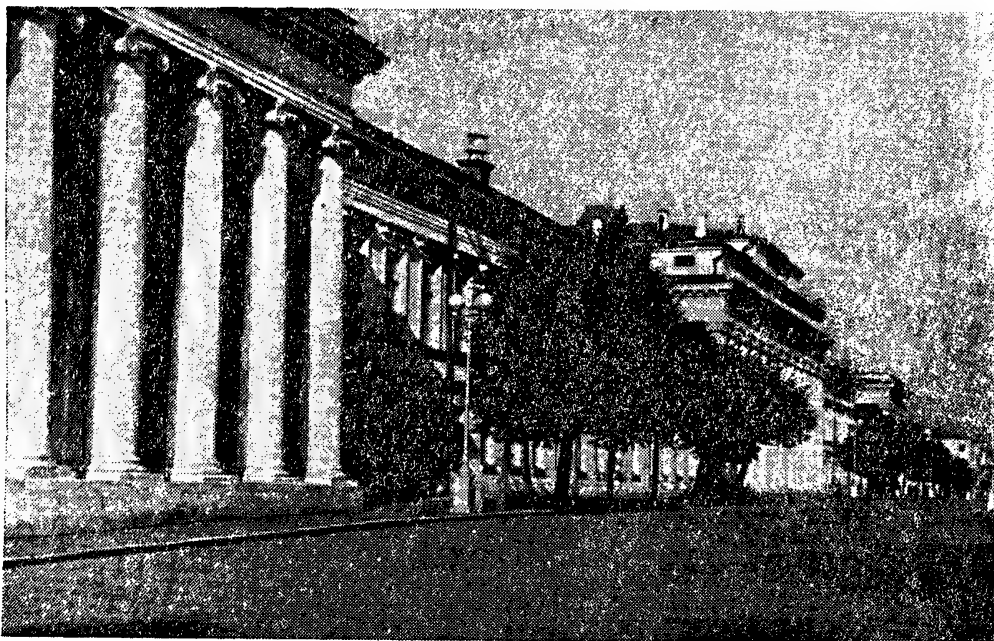
Со второй половины 50-х годов начинается преобразование ряда педагогических институтов в университеты. Это преобразование проводилось в основном в центрах союзных и автономных республик с целью подготовки национальных педагогических кадров, а также создания базы для подготовки научных кадров. В РСФСР были организованы Дальневосточный и Якутский (1956 г.), Башкирский, Мордовский, Дагестанский и Кабардино-Балкарский университеты (1957 г.). Таким образом, был сделан очень важный и существенный задел в части подготовки кадров для науки.

Рассмотрим вкратце развитие исследований в области математики в послевоенные годы в университетах РСФСР.

В Казанском университете возобновилась деятельность физико-математического общества, которым руководил (до 1947 г.) Н. Г. Чеботарев. В 1945 г. на кафедру геометрии перешел из Новосибирского института инженеров железнодорожного транспорта А. П. Норден. В 1947 г. на кафедру дифференциальных уравнений был избран Ф. Д. Гахов. Его исследования относятся к области краевой задачи Римана, а также сингулярных интегральных уравнений и теории функций комплексного переменного.

После смерти Н. Г. Чеботарева (2 июля 1947 г.) кафедру алгебры в Казанском университете занял В. В. Морозов. Кафедру дифференциальных уравнений после Ф. Д. Гахова (в 1953 г. он переехал в Ростов-на-Дону) возглавил его ученик С. Н. Андрианов, окончивший Казанский университет в 1939 г. Его научные интересы сосредоточиваются в области анализа.

С 1944 г. кафедрой механики в Казанском университете заведовал Г. Т. Тумашев, окончивший в 1937 г. Казанский авиационный институт. Его работы охватывают ряд вопросов гидроаэромеханики, а также уравнений математической физики (обратные краевые задачи). С 1954 г. Тумашев был директором Научно-исследовательского института математики и механики им. Н. Г. Чеботарева. Теорией обратных краевых задач занимается также М. Т. Нужин, окончивший



Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова (Ленина).

Казанский университет в 1938 г. С 1954 г. он ректор Казанского университета, а также заведует кафедрой теоретической механики.

История математики и геометрии в Казанском университете представлена трудами Б. Л. Лаптева, окончившего Казанский университет в 1930 г.

В ноябре 1954 г. Казанский университет праздновал свое 150-летие. К этой дате были приурочены две научные конференции, физико-математическая и специально геометрическая, в работе которых приняли участие многие математики страны.

В 50-х годах начало развиваться значительное направление в области функционального анализа в Воронежском университете. Возникновение его связано с приездом в Воронеж двух киевских математиков — М. А. Красносельского и С. Г. Крейна.

М. А. Красносельский окончил в Кзыл-Орде в 1942 г. Объединенный украинский университет. С 1947 по 1952 г. работал в Институте математики АН УССР и некоторых вузах Киева. С 1952 г. преподает в Воронежском университете. Несколько работ М. А. Красносельский выполнил вместе с С. Г. Крейном.

С. Г. Крейн окончил в 1940 г. Киевский университет. С 1941 по 1951 г. работал в Институте математики АН УССР, с 1952 по 1954 г. — в Криворожском горнорудном институте. С 1954 г. его деятельность сосредоточена в Воронежском лесотехническом институте и Воронежском университете.

М. А. Красносельский и С. Г. Крейн руководили в Воронежском университете семинаром по функциональному анализу. К концу 50-х годов они создали здесь научное направление в этой области.

В Саратовском университете в послевоенные годы произошло некоторое обновление научной тематики, разрабатывавшейся математическими кафедрами. Кафедра алгебры и теории чисел, которой руководил Н. Г. Чудаков, развивая исследования в области теории функций Дирихле, перешла к теории обобщенных характеров. Эта теория была оформлена в 1951 г. в трудах Н. Г. Чудакова, который впервые тогда сформулировал понятие «обобщенного» характера и указал условия его существования в поле рациональных чисел.

Вопросы теории дзета-функций рассматривал К. А. Родосский. Он окончил в 1940 г. Саратовский университет и с 1948 г. работал на кафедре алгебры и теории чисел.

Коллектив кафедры геометрии, которой руководил В. В. Вагнер, продолжал работу над теорией геометрических объектов и их приложением к вариационному исчислению. Со временем тематика этой кафедры расширилась: в нее была включена теория составного многообразия с заданной связностью, а с 50-х годов В. В. Вагнер и Ю. Е. Пензов проводят серию исследований по алгебраическим и логическим основаниям дифференциальной геометрии. Вагнер разработал теорию локальных поверхностей, построил аксиоматическую теорию обобщенных групп и обобщенных групп. Исследованиями теории поверхностей произвольной размерности в пространстве Клейна занимался А. Е. Либер.

Кафедра математического анализа продолжала исследования в области теории краевых задач, теории почти периодических функций, теории конформных отображений. Кроме того, в эти годы на кафедре начали развиваться новые для Саратовского университета направления — теория вероятностей, теория ортогональных функций, вычислительная математика. Здесь работали Г. П. Боев, Г. Н. Положий (до 1949 г.), Н. П. Купцов и др.

В Ростовском-на-Дону университете математику преподавали и вели научную работу Д. Д. Мордухай-Болтовской (до 1950 г.), Ф. Д. Гахов, М. П. Черняев и др.

Д. Д. Мордухай-Болтовской работал в университете до 1950 г. (затем он перешел в Пятигорский педагогический институт). Кроме геометрических исследований пространства Лобачевского он продолжал также свои работы по истории математики. С 1945 г. Мордухай-Болтовской возглавлял общегородской математический семинар.

Ф. Д. Гахов занимал в университете кафедру математического анализа. Он организовал в университете семинар по краевым задачам теории аналитических функций.

М. П. Черняев (1891—1962) окончил в 1913 г. Московский университет. С 1922 г. работал в Ростовском-на-Дону университете. После ухода Д. Д. Мордухай-Болтовского он руководил, с некоторыми перерывами, кафедрой геометрии.

Кафедрой общей математики заведовал Н. М. Несторович (1891—1955), окончивший университет в 1916 г. и работавший в нем с 1918 по 1955 г. Исследования его относились к теории геометрических образов на плоскости и в пространстве Лобачевского.

Вопросам теории функций посвящены исследования М. Г. Хапланова. Он окончил Ростовский университет в 1925 г. и работал в нем с 1931 г.

В 1953 г. при Ростовском-на-Дону университете был организован семинар по функциональному анализу и установлены связи с воронежскими математиками, работающими в этой области. В 1956 г. семинар был преобразован в семинар по нелинейным задачам механики сплошных сред, которым руководил И. И. Ворович.

Горьковский университет в 40-х годах становится одним из крупнейших университетов республики. Значительное развитие в нем получили прикладные вопросы математики и смежные вопросы математики и механики. До 1952 г. в университете работал А. А. Андронов, создавший здесь исследовательское направление. Его последние работы относятся к теории дифференциальных уравнений, нелинейной механике и некоторым вопросам истории отечественной математики. К направлению А. А. Андропова в определенной степени примыкают исследования А. Г. Майера, работавшего в университете до 1951 г. В 40—50-х годах математику в Горьковском университете преподавали А. Ф. Леонтьев, Я. Л. Шапиро, Ю. И. Неймарк, Н. Н. Баутин, И. П. Егоров.

А. Ф. Леонтьев работал в университете с 1943 по 1954 г. (в 1954 г. он перешел в Московский энергетический институт). Исследования его относятся к теории аналитических функций, в частности к теории полиномов Дирихле.

Я. Л. Шапиро окончил в 1930 г. Днепропетровский университет. Работает в Горьком с 1938 г. Его научные работы относятся к геометрии, в частности к тензорной дифференциальной геометрии.

Ю. И. Неймарк — воспитанник Горьковского университета (окончил в 1944 г.), работает в нем с 1946 г. Занимается теорией устойчивости периодических режимов. С 1946 г. работает в Горьковском университете также А. Г. Сигалов. Он исследует различные вопросы вариационного исчисления.

В Горьковском институте инженеров водного транспорта и Научно-исследовательском физико-техническом институте Горьковского университета работает Н. Н. Баутин (с 1935 г.). Исследования его примыкают к направлению А. А. Андропова. Вместе с Андроновым Баутин выполнил несколько работ.

Сильная группа математиков работала в Ивановском политехническом институте и тех высших технических учебных заведениях, на которые он разделился в начале 30-х годов. Так, в Ивановском тек-



Ф. Д. Гахов.

стильном институте с 1938 по 1945 г. преподавал математику А. С. Кованько, в Ивановском педагогическом институте с 1932 г. работал А. И. Мальцев, в 1955—1957 гг. — В. А. Рохлин. Научная деятельность В. А. Рохлина была связана с Математическим институтом им. В. А. Стеклова АН СССР. Затем он работал в Архангельском лесотехническом и Ивановском педагогическом институтах. Из последнего в 1957 г. перешел в Коломенский педагогический институт. Занимается различными вопросами топологии. Один из старейших математиков Ивановского политехнического института В. С. Федоров работает в Иванове с 1918 г., с 1930 г. — в Ивановском энергетическом институте. Его труды относятся к области теории функций комплексного переменного и к общей теории аналитических функций.

В Калининском педагогическом институте в 40—50-х годах работали В. М. Брадис и П. П. Коровкин. Член-корреспондент Академии педагогических наук РСФСР В. М. Брадис связан с Калининским педагогическим институтом с 1920 г. Предметом его исследований являются приближенные вычисления и вопросы методики математики. П. П. Коровкин работал в Калининском педагогическом институте с 1939 по 1955 г. (затем перешел в Московский городской педагогический институт). Исследования его относятся к области теории приближения функций.

Большой коллектив математиков в начале 40-х годов работал в Уральском университете и Уральском политехническом институте. Большинство из них составляли воспитанники математических кафедр университета и института. В первой половине 40-х годов в Свердловске вырисовалось три научных направления, развившиеся затем в школы: алгебра (С. Н. Черников и П. Г. Конторович), теоретическая номография (П. В. Николаев) и качественная теория дифференциальных уравнений (Е. А. Барбашин и Н. И. Красовский).

Уральские алгебраисты объединялись семинаром, которым продолжали руководить С. Н. Черников и П. Г. Конторович. С. Н. Черников еще в 1940 г. положил начало исследованиям в области обобщенных нильпотентных и обобщенных разрешимых бесконечных групп с различными условиями конечности.

Е. А. Барбашин работает в Уральском политехническом институте (с 1943 г.). Его труды относятся к теории динамических систем и качественной теории дифференциальных уравнений. Кроме своей основной работы в политехническом институте Барбашин читал лекции в университете и руководил семинаром по качественным методам теории дифференциальных уравнений. Основной темой семинара в 50-е годы стала проблема устойчивости движения. Он привлек большинство молодых математиков Свердловска. В Уральском университете по устойчивости движения работал И. Г. Малкин, развивавший идеи Ляпунова, в политехническом институте — Н. И. Красовский, также посвятивший свои исследования по устойчивости и неустойчивости движения для систем уравнений развитию идей А. М. Ляпунова.

В 1951 г. в Уральском политехническом институте при кафедре математики была организована лаборатория вычислительной

математики, оборудованная к середине 50-х годов счетными машинами.

С Уральским университетом связана деятельность В. С. Чарина. Здесь он работал с 1951 до 1965 г. (в 1965 г. перешел в Киевский университет). Его исследования относятся, в основном, к вопросам топологической алгебры.

В Свердловском горном институте (с 1938 по 1947 г.) и Уральском университете (с 1947 г.) работает В. К. Иванов. Его научные интересы сосредоточены на вопросах математической физики.

Во втором уральском университете — Пермском в 50-х годах из физико-математического факультета выделился механико-математический факультет. На последнем развиваются следующие направления: геометрия, алгебра, теория функций, математическая физика. С 1951 по 1965 г. здесь работал С. Н. Черников.

Наиболее сильным из сибирских университетов в рассматриваемый период продолжал оставаться Томский университет. В 1948 г. в Томском университете был организован механико-математический факультет с кафедрами математического анализа, общей математики, алгебры и теории чисел, геометрии, теоретической механики и астрономии. До 1955 г. деканом факультета был П. П. Куфарев.

Основные направления исследований томских математиков составляли: теория однолистных функций, дифференциальная геометрия и теория поверхностей, теория групп и ее приложения.

Теорию однолистных функций развивали П. П. Куфарев, его ученик Г. Д. Суворов и др. К середине 50-х годов в этом направлении работала уже целая группа ученых.

Вторым направлением руководил Н. Г. Туганов (1901—1956), работавший в Томском университете с 1939 г.

Теорией групп и ее приложениями занимались С. А. Чунихин и П. И. Трофимов. Чунихин работал в 1929—1941 гг. в Московском университете и Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР, а с 1941 по 1953 г. — в Томском университете.

Кроме основных направлений в 40—50-х годах в Томском университете велись исследования по теории функций многих комплексных переменных, теории аналитических функций и ее приложениям, а также в других направлениях.

В Иркутском университете развивались геометрия, вычислительная математика, математическая физика. Геометрию вел один из старейших профессоров университета И. Н. Рукавицын (работал с 1919 по 1957 г.). Математической физикой (интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями) занимался В. В. Васильев.

В 1956 г. число сибирских университетов увеличилось: на базе педагогических институтов были организованы Дальневосточный и Якутский университеты.



## Развитие математических исследований в Украинской ССР

Украина одна из наиболее пострадавших во время Великой Отечественной войны союзных республик. Почти все более или менее крупные промышленные предприятия, университеты и институты были сожжены или взорваны, библиотеки разграблены оккупантами.

Восстановление научно-исследовательских учреждений и учебных заведений началось сразу после освобождения подвергшихся оккупации районов. В марте 1944 г. на Украину начали возвращаться из эвакуации институты и учреждения Академии наук УССР. Работая в исключительно тяжелых условиях, институты Академии наук восстанавливали свои лаборатории, комплектовали библиотеки и готовили кадры для научно-исследовательской работы. В 1946 г., после смерти А. А. Богомольца, президентом Академии наук УССР был избран А. В. Палладин. В 1948 г. состоялись выборы в Академию наук УССР, академиками были избраны Н. Н. Боголюбов, Б. В. Гнеденко, А. Ю. Ишлинский (прикладная механика), членом-корреспондентом — И. З. Штокало.

Институтом математики АН УССР после смерти Г. В. Пфейффера (1946 г.) руководил М. А. Лаврентьев. Работая в Академии наук УССР, Лаврентьев выполнил исследования по теории функций комплексного переменного и механике сплошных сред. Полученные им результаты были удостоены Государственной премии (дважды).

С 1947 г. в Институте математики работал А. Ю. Ишлинский, преподававший в это же время в Киевском университете. С 1948 по 1955 г. Ишлинский был директором института. В 1955 г. он перешел в Московский университет. Исследования А. Ю. Ишлинского относятся к различным разделам прикладной математики и механики. Так, он занимался уравнениями математической физики, теорией трения, задачами теоретической механики, теории упругости и теории прочности, теорией гироскопов, теорией механизмов и машин.

Б. В. Гнеденко с 1945 по 1950 г. был профессором Львовского университета и заведовал Львовским отделом Института математики АН УССР. С 1950 г. он профессор Киевского университета, а также заведующий отделом теории вероятностей и математической статистики в Институте математики АН УССР, а затем, с 1955 по 1958 г., — директор этого института. Основные его исследования относятся к проблемам теории вероятностей и математической статистики, а также к области истории математики, главным образом отечественной.

И. З. Штокало опубликовал в 40-х годах цикл работ по теории линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими и квазипериодическими коэффициентами, а также по обобщению операционных методов. В эти же годы он выполнил ряд исследований по истории отечественной математики. В 1952—1953 гг. под его редакцией

вышло в свет первое полное собрание сочинений Г. Ф. Вороного в трех томах, а несколько позже — также первое полное собрание трудов М. В. Остроградского в трех томах. С 1945 г. (с перерывом во время пребывания его во Львове) Штокало возглавляет кафедру дифференциальных уравнений в Киевском университете. В мае 1951 г. он был избран академиком АН УССР.

Е. Я. Ремез продолжал свои исследования в области чебышевских приближений, завершив их монографией «Общие вычислительные методы чебышевского приближения» (1957 г.). Он также работал в области истории математики. Его научная деятельность была сосредоточена в Институте математики АН УССР, а педагогическая — в Киевском педагогическом институте.

В. Е. Дьяченко в 40-х годах занимался главным образом решением задач математической физики, в том числе электронной оптики, и исследовал ряд вопросов прикладной математики. Он первым в Киеве начал работы, связанные с созданием вычислительных устройств.

В 40—50-х годах в Институте математики АН УССР работали также М. Г. Крейн, Ю. А. Митропольский, С. Ф. Фещенко, М. А. Красносельский, К. А. Бреус, С. Г. Крейн, Б. И. Коренблюм, И. Б. Погребынский, Ю. М. Березанский, К. В. Задирака, П. Ф. Фильчаков и др.

Ю. А. Митропольский окончил в 1942 г. Казахский университет, с 1946 по 1950 г. работал в Институте строительной механики АН УССР, а с 1950 г. работает в Институте математики АН УССР. Его исследования относятся к области нелинейной механики. Он развил асимптотические методы, разработанные Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, и применил их при решении прикладных задач, связанных с нелинейными колебаниями. Им получены существенные результаты по вопросам исследования интегральных многообразий и развития и обоснования метода усреднения.

Научные исследования Ю. Д. Соколова относятся к небесной механике и связанной с ней теории дифференциальных уравнений. Им



А. Ю. Ишлинский



Б. В. Гнеденко.



В. Е. Дьяченко.

получены также результаты в области фильтрации грунтовых вод и разработан метод осреднения функциональных поправок.

М. Г. Крейн занимался различными проблемами математики — функциональным анализом, теорией функций, теорией дифференциальных и интегральных уравнений и др. Он работал в Институте математики АН УССР и одесских высших учебных заведениях.

Ю. М. Березанский с 1951 г. работает в Институте математики АН УССР. Исследования Березанского относятся к области функционального анализа и его приложений к краевым задачам уравнений в частных производных и частных разностях.

С. Ф. Фещенко работает в Институте математики АН УССР (с 1934 г.) и Киевском педагогическом институте. Предмет его исследований составляет проблема нахождения асимптотических решений линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами.

Исследования П. Ф. Фильчакова относятся к области приложений теории функций комплексного переменного к различным производственным задачам.

Предметом исследований К. В. Задираки в основном являются системы дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Некоторые его результаты в области дифференциальных уравнений связаны с применением метода Чаплыгина.

Б. И. Коренблюм, работая в Институте математики под руководством Е. Я. Ремеза, получил результаты, связанные с тауберовыми теоремами. В последующие годы его исследования относятся к теории функций и функционального анализа.

И. Б. Погребысский в 40—50-е годы начал заниматься вопросами истории отечественной математики и механики, принимал участие в издании трудов Г. Ф. Вороного и М. В. Остроградского.

В Институте математики АН УССР кроме исследований по основным вопросам тематики института были организованы научные семинары. В 1956 г. начал работать Украинский республиканский семинар по истории математических наук, которым руководит И. З. Штокало.

Сразу после освобождения Киева от фашистской оккупации началась подготовка к занятиям в Киевском университете. Учебные помещения, лаборатории, здание библиотеки были разграблены и взорваны. Все надо было создавать заново. 15 января 1944 г. Киевский университет начал свою учебную работу в Киеве в составе шести факультетов (в том числе физико-математический). В это время в университете

работали около 30 преподавателей и профессоров, учились 670 студентов, в том числе 275 студентов старших курсов (II—V). К осени 1944 г. возвратились из Кзыл-Орды студенты и преподаватели киевской группы Объединенного украинского университета. Тогда же вернулась и харьковская группа в Харьков. Уже к концу 1945/46 учебного года в Киевском университете преподавательский коллектив составляли 62 доктора наук, 16 академиков и 14 членов-корреспондентов АН УССР, 115 кандидатов наук и свыше 200 преподавателей и ассистентов.

На физико-математическом, а впоследствии механико-математическом, факультете в 40—50-х годах преподавали Н. Н. Боголюбов, Б. Я. Букреев, Б. В. Гнеденко, И. З. Штокало, Ю. А. Митропольский, К. Я. Латышева, Л. А. Калужнин, Г. М. Положий, В. Е. Дьяченко. Несколько лет заведовал кафедрой математического анализа и читал лекции в университете М. А. Лаврентьев. С 1944 по 1949 г. кафедрой механики заведовал Ю. Д. Соколов. Ряд курсов читал А. Ю. Ишлинский.

Кафедру дифференциальных уравнений возглавлял Г. В. Пфейфер (до 1945 г.), а с 1945 г. — И. З. Штокало. В 1949 г. И. З. Штокало был назначен председателем Президиума Львовского филиала АН УССР, и кафедрой дифференциальных уравнений с 1951 по 1953 г. руководил Ю. А. Митропольский. На этой кафедре работала К. Я. Латышева.

Кафедрой геометрии университета заведовал Б. Я. Букреев, старейший математик Киевского университета, преподававший в университете свыше 75 лет. Его научные исследования последних лет относятся к геометрии Лобачевского. На кафедре работали А. С. Сморгоржевский, также занимавшийся вопросами геометрии Лобачевского (геометрическими построениями в пространстве Лобачевского) и В. П. Белоусова, предметом исследований которой являются вопросы дифференциальной геометрии.

Вопросы теории вероятностей и математической статистики в университете исследовал (с 1947 г.) ученик Н. Н. Боголюбова И. И. Гихман.

На кафедре алгебры до 1954 г. работал Г. Е. Шилов. Здесь он провел серию исследований о нормированных кольцах. С 1955 г. в Киевском университете работает Л. А. Калужнин, научные интересы которого сосредоточены в области теории групп, а также математической логики. Им предложено обобщение понятия групп Галуа и обобщена основная теорема теории Галуа.

Вопросами вычислительной техники в университете начали заниматься с 1945 г., когда В. Е. Дьяченко предложил идею применения электро моделирования для решения задач математической физики. В 1948—1951 гг. под руководством Дьяченко был построен электроинтегратор для решения дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа.

Теорию приближенных вычислений разрабатывает Г. Н. Положий. Он работает в университете с 1949 г. Его исследования относятся к проблемам теории функций комплексного переменного, уравнений математической физики и их приложений к задачам теории упругости и фильтрации.



Ю. А. Митропольский.

Важные результаты получены на кафедре теоретической механики, где работали А. Л. Наумов и Н. А. Кильчевский. Предметом исследований Н. А. Кильчевского являются вопросы теории интегральных уравнений и их применения к решению задач теории упругости.

Одновременно с Киевским был эвакуирован и Харьковский университет.

Харьков был освобожден 23 августа 1943 г. За время оккупации здания многих институтов и университета были разрушены, библиотеки и лаборатории разграблены и сожжены. Например, корпус университета, в котором помещалась кафедра геометрии, кабинет механики университета, здания технологического и авиационного институтов были совершенно разрушены. Разрушена и в значительной мере разграблена была библиотека

им. В. Г. Короленко, одна из лучших в Советском Союзе.

Сразу же после освобождения города начались восстановительные работы. Занятия в университете начались в старых зданиях университета, приспособленных под аудиторные. Математику преподавали Д. М. Синцов, А. В. Погорелов, Н. И. Ахиезер, Я. П. Бланк, А. К. Сушкевич, В. А. Марченко, Г. И. Дринфельд, Д. З. Горdevский, М. Н. Марчевский и др.

Д. М. Синцов одним из первых приступил к работе по восстановлению университета. 1 июня 1944 г. он был назначен директором Научно-исследовательского института математики и механики при университете. В это время Синцов продолжал свои исследования по геометрической теории дифференциальных уравнений. Однако ему не пришлось долго работать в освобожденном Харькове: 28 января 1946 г. он умер.

А. В. Погорелов работает в Харьковском университете с 1947 г. В 1951 г. он был избран членом-корреспондентом АН УССР. Его работы посвящены главным образом геометрии «в целом». Ему принадлежат исследования по многим проблемам теории поверхностей, в частности по теории поверхностей в римановом пространстве. Они частично примыкают к исследованиям его учителя А. Д. Александрова.

Н. И. Ахиезер работал, как отмечалось выше, с 1941 по 1943 г. в Алма-Атинском горном, а с 1943 по 1947 г. — Московском энергетическом институтах. В 1947 г. он возвратился в Харьковский университет и здесь продолжил свои исследования по проблемам теории функций. Известно его деятельное участие в редактировании и комментировании изданий трудов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова, а также в издании трудов С. Н. Бернштейна. Им написано несколько учеб-

ников и монографий («Лекции по теории аппроксимации», 1947 г.; «Элементы теории эллиптических функций», 1948 г.; «Лекции по вариационному исчислению», 1955 г., и др.), а также статей по истории математики.

Я. П. Бланк, возглавивший после смерти своего учителя Д. М. Синцова кафедру геометрии, продолжал исследования в области теории поверхностей. Д. З. Горdevский, также ученик Д. М. Синцова, работает в Харьковском университете с 1935 г. Его исследования относятся к аффинной, дифференциальной и проективной геометрии. Работы В. А. Марченко посвящены функциональному анализу, теории функций, теории дифференциальных операторов и другим областям математики. А. К. Сушкевич в последние годы своей жизни занимался исследованиями бесконечных алгебр. Кроме того, он написал работы по истории отечественной математики, в том числе большую работу по истории развития алгебры в России (опубликована в «Историко-математических исследованиях», 1951, вып. 4). В области теории интегральных инвариантов проводил исследования Г. И. Дринфельд. М. Н. Марчевский написал несколько работ по истории математики и математических кафедр в Харькове.

Значительная научная работа в области математики проводилась также на кафедрах математики технических и педагогического институтов. В частности, в Харькове за эти годы начали исследования по истории математики, главным образом отечественной, Э. Я. Бахмутская, И. Н. Наумов, Ю. М. Гайдук.

В Днепропетровске, где оккупанты уничтожили почти все промышленные предприятия, большинство учреждений культуры и институтских зданий, в первые годы после освобождения условия для учебы и научно-исследовательской работы были тяжелыми. Одновременно с учебой студентам приходилось восстанавливать свои институты, лаборатории, библиотеки.

С 1946 г. в Днепропетровском университете работал А. Ф. Тиман. Его исследования относятся к теории функций действительного переменного и функциональному анализу. До 1956 г. здесь работал И. Е. Огиевецкий. Последние его труды посвящены вопросам сходимости рядов. В результате научной деятельности С. М. Никольского еще в довоенное время в Днепропетровском университете были поставлены серьезные исследования в области теории функций действительного переменного (теории приближений), продолжающиеся и в настоящее время.

Одесский университет был эвакуирован в Майкоп, а затем в Байрам-Али (Туркменская ССР). Математические предметы в нем читали М. Н. Бобынин (1907—1948) и М. С. Лившиц. После войны М. С. Лившиц работал (до 1957 г.) в Одесском гидрометеорологическом, а затем в Харьковском горном институтах.

В 1944 г. деканом физико-математического факультета Одесского университета стал Н. Н. Васильев. На факультете были организованы две математические кафедры: математического анализа и геометрии и алгебры. Кафедру математического анализа в 1945 г. возглавил



Г. Н. Савин.

Г. М. Миракьян (1907—1964), работавший до войны в Харьковском университете, кафедрой геометрии и алгебры руководил В. И. Костин (1910—1953), занимавшийся неевклидовыми геометриями.

С 1951 г. в Одесском университете работает Н. И. Гаврилов, исследования которого относятся к области теории дифференциальных уравнений.

В Одесском институте инженеров морского флота, а с 1954 г. — в Одесском инженерно-строительном институте работал М. Г. Крейн. Как и в предыдущие годы, его исследования охватывают многие вопросы функционального анализа, теории функций и теории дифференциальных уравнений.

Положение Львовского университета и Львовского политехнического института после освобождения от фашистской оккупации

было не менее тяжелым, чем других украинских высших учебных заведений. Правда, благодаря быстрому наступлению советских войск удалось сохранить здания и частично материальное имущество этих вузов. Но они оказались почти полностью лишенными педагогических и научных кадров. Оккупанты зверски расстреляли львовских преподавателей. Были убиты почти все львовские математики. 31 августа 1941 г. скончался С. Банах, измученный нечеловеческими условиями фашистской неволи. Педагогический коллектив пришлось создавать заново, за счет профессорско-преподавательского состава других советских высших учебных заведений. Для организации научно-исследовательской работы во Львове Президиум Академии наук УССР направил группу ученых во главе с уполномоченным АН УССР. С 1948 по 1952 г. ректором Львовского университета был Г. Н. Савин.

В послевоенные годы во Львовском университете был создан сильный математический коллектив. Здесь работали Я. Б. Лопатинский, Л. И. Волковынский, А. С. Кованько, В. И. Левицкий, М. О. Зарицкий, О. С. Парасюк, Б. В. Гнеденко, М. Я. Леонов, М. П. Шереметьев.

С 1949 г., как уже упоминалось выше, во Львове работал И. З. Штокало. Возглавляя Львовский филиал АН УССР, он проводил здесь большую научную и научно-организационную работу вплоть до 1956 г.

О. С. Парасюк приступил к работе в университете в 1949 г., после окончания аспирантуры. Исследования свои он начал с некоторых вопросов теории вероятностей и теории упругости, а затем перешел к области математической и теоретической физики.

Л. И. Волковынский переехал во Львов в 1948 г. и работал здесь до 1955 г. (затем перешел в Пермский университет). Он занимался вопросами теории римановых поверхностей.

Я. Б. Лопатинский вел исследования в области теории аналитических функций и теории линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. В 1954 г. во Львове вышла его работа «Основы линейной алгебры».

Ряд математических предметов во Львовском университете читали В. И. Левицкий и М. О. Зарицкий. М. О. Зарицкий вел исследования главным образом в области математического анализа и алгебры. В. И. Левицкий читал курс дифференциальных уравнений и историю математики.

Восстановление Черновицкого университета началось в 1945 г. На физико-математическом факультете университета работал Н. И. Смирнов. Он заведовал кафедрой дифференциальных уравнений и был деканом факультета. Его работы относятся к области краевых задач для линейных систем уравнений, а также к теории дифференциальных уравнений в трудах Эйлера.

Седьмой из украинских университетов по времени своего возникновения — Ужгородский — был основан в 1945 г. после воссоединения Закарпатской Украины с СССР. В составе университета был организован и физико-математический факультет.

Важные научные исследования в области математики велись в педагогических институтах: Киевском, Харьковском, Луцком, Черниговском, Симферопольском и др. В Киевском педагогическом институте в послевоенные годы работали С. Ф. Фещенко, Е. Я. Ремез, В. Е. Шаманский, в Луцком — С. И. Зуховицкий и В. К. Дзядык. Научные работы последних относятся к теории функций.

## 8

### Развитие математики в Белорусской ССР

Белорусский университет был эвакуирован в г. Сходню (недалеко от Москвы). Деканом физико-математического факультета был физик Ф. И. Федоров, математику преподавали Н. В. Ламбин и А. Х. Турецкий. В октябре 1944 г. университет вернулся в Минск.

В 1945 г. в Академии наук Белорусской ССР был организован физико-технический сектор, преобразованный в 1947 г. в физико-технический институт. Однако исследования в этом институте велись почти исключительно в направлении изучения пластических деформаций и других вопросов практического металловедения. Поэтому основная исследовательская работа по точным наукам проводилась вначале на физико-математическом факультете университета. Из математиков здесь работали Д. А. Супруненко (с 1945 г.), А. Х. Турецкий, Л. К. Тутаев (с 1945 г.), Н. В. Ламбин, М. А. Лукомская, А. М. Родов. Д. А. Супруненко продолжал свои исследования в области алгебры. Они относились к группе подстановок (разрешимых и нильпотентных), разрешимым и нильпотентным группам, а также коммутативным подалгебрам полной матричной алгебры. Предметом исследований Л. К. Тутаева были вопросы





В. И. Крылов.

дифференциальной геометрии в неевклидовом пространстве.

В 1953 г. состав Академии наук БССР пополнился несколькими крупными физиками, в том числе А. Н. Севченко и Б. И. Степановым. В Физико-техническом институте был организован сектор физики и математики, на базе которого в январе 1955 г. был создан Институт физики и математики АН БССР. В 1956 г. академиками Академии наук БССР были избраны профессор Ленинградского университета В. И. Крылов и Н. П. Еругин, членом-корреспондентом ее — профессор Томского университета С. А. Чунихин. Таким образом, математический коллектив Минска пополнился крупными математиками и научно-исследовательская работа значительно улучшилась. В Институте физики и математики были организованы ма-

тематические отделы, начавшие разработку ряда основных проблем в области дифференциальных уравнений (Н. П. Еругин и его ученики) и в области приближенных вычислений (В. И. Крылов и его ученики).

Кроме Академии наук и университета исследовательская работа в области математики в Белоруссии проводилась также на математических кафедрах в Минском политехническом, Минском педагогическом, Гродненском педагогическом институтах и других вузах республики.

## 9

### Математика в Прибалтийских республиках

Литовские университеты — Вильнюсский и Каунасский — восстановили учебную и научную работу также сразу после освобождения республики от фашистских захватчиков. В 1950 г. Каунасский университет был преобразован в самостоятельные политехнический и медицинский институты. В Вильнюсском университете было три математические кафедры: общей математики (Г. Жилинскас), геометрии (П. Катилюс), математического анализа (З. Жемайтис). В Академии наук Литовской ССР математические исследования велись в Институте физики и техники, а затем, с 1956 г., в Институте физики и математики. Сектором математики в последнем руководил Й. П. Кубилюс. В 1958 г. он был избран ректором Вильнюсского университета. Исследования Кубилюса и его учеников относятся к вопросам теории вероятностей и математической статистики, в том числе к применению вероятностных методов в теории чисел.

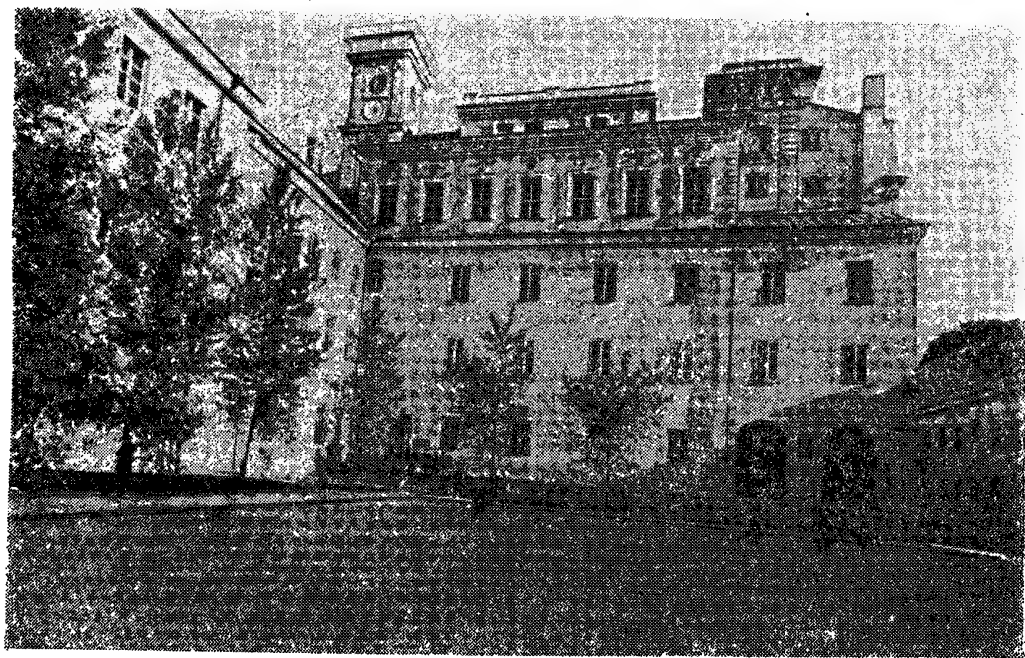
Интенсифицируются исследования в этот период и в других областях математики. Так, различные вопросы дифференциальной геометрии исследует К. Гринцявичюс. Вопросам теории функций посвящены работы В. Паулаускаса, Щ. Стрелица, А. Нафтаевича.

Математические исследования в Латвии проводились как в Академии наук, так и на математических кафедрах Латвийского университета, Рижского политехнического института, Латвийской сельскохозяйственной академии (в Елгаве) и других вузов. В связи с тем что в рижских вузах не хватало местных преподавательских кадров, в 1945—1948 гг. в Ригу были приглашены преподаватели из других городов Советского Союза. Кроме того, на преподавательскую работу пошла часть выпускников первого послевоенного выпуска Латвийского университета.

В 1945 г. в Латвийском университете были организованы две кафедры математики: математического анализа и высшей математики. Первой руководил (руководит и ныне) А. Я. Лусис, второй до 1950 г. — Н. А. Бразма, с 1950 по 1953 г. — А. Д. Мышкис, с 1953 г. — Э. Я. Риекстыньш.

А. Д. Мышкис пришел в Латвийский университет в 1948 г. С 1953 по 1956 г. он работал в Белорусском университете, а с 1956 г. и поныне — в Харьковском авиационном институте. Его исследования относятся к области дифференциальных уравнений и уравнений математической физики.

Исследования в области математики в Латвийской ССР проводятся в различных направлениях, но своей школы в каком-либо из этих направлений здесь еще не создано.



Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса.

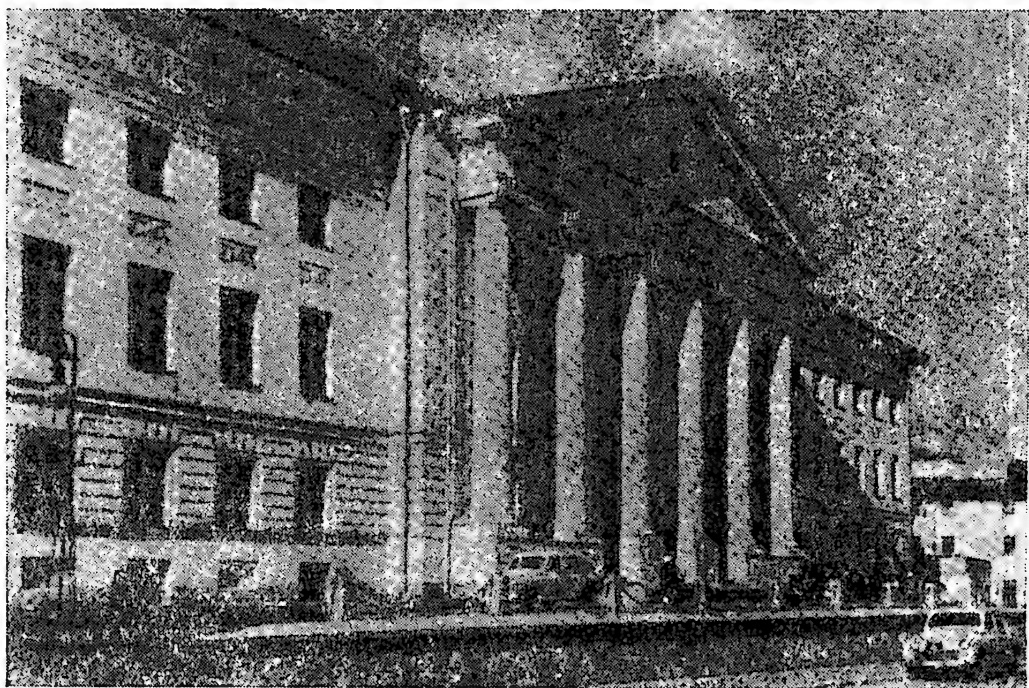


Ю. Ю. Нуут.

В Эстонской ССР некоторые научные исследования в области математики велись в Тарту и, несколько позже, в Таллине. Однако оккупация нанесла высшим учебным заведениям Эстонии большой урон, особенно в области кадров. В первые послевоенные годы вопрос о научных и педагогических кадрах стал одним из существеннейших в работе высших учебных заведений.

В 1946 г. была создана Академия наук Эстонской ССР и в ее составе Институт физики, математики и механики. Первым академиком по математике был Ю. Ю. Нуут. В 1951 г. академиком Академии наук Эстонской ССР был избран А. К. Хумал, в 1961 г. ее членом-корреспондентом — Г. Ф. Кангро.

Деятельность Тартуского университета была восстановлена в 1944 г. На отделении математики было учреждено три кафедры: геометрии (Я. Х. Сарв), математического анализа (Х. Я. Яаксон) и теоретической механики (Г. А. Ряго). С 1951 г. кафедрой геометрии в университете заведовал Г. Ф. Кангро. До войны он работал в Таллинском политехническом институте, затем перешел в Тарту, где в



Тартуский университет.

1946 г. защитил докторскую диссертацию по теории рядов. Кангро руководит большим коллективом молодых эстонских математиков. Им и его учениками создан ряд научных направлений в области алгебры, математического анализа и приближенных методов функционального анализа.

Исследованиями в области дифференциальной геометрии и истории математики в Тартуском университете занимается Ю. Г. Лумисте.

В Таллинском политехническом институте кафедрой математики с 1944 г. руководил А. К. Хумал. В 1947 г. от кафедры математики отделилась кафедра графики, а в 1953 г. — кафедра теоретической механики.

С 1936 по 1952 г. в Таллинском политехническом институте работал А. А. Борквель (1890—1963) — автор ряда учебников по аналитической геометрии и математическому анализу на эстонском языке. В 1947 г. он начал работать также в Таллинском педагогическом институте.

В 1951 г. в Тарту была основана Эстонская сельскохозяйственная академия. Кафедрой высшей математики в ней с 1952 г. руководил профессор Г. А. Ряго.

## 10

### Математика в Грузинской ССР

Для 40—50-х годов характерно быстрое развитие научных исследований. Расширилась тематика этих исследований. По многим направлениям были созданы крупные научные школы, в том числе в области математики, завоевавшие признание в мировой науке.

В Академию наук ГрССР были избраны академиками И. Н. Векуа и В. Д. Купрадзе (1946 г.), членами-корреспондентами — Ш. Е. Микеладзе (1950 г.), Г. С. Чогошвили и Н. П. Векуа (1955 г.).

И. Н. Векуа работал в Тбилисском университете и Математическом институте им. А. М. Размадзе. В 1952 г. он перешел в Московский университет и одновременно сотрудничал в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР. Его работы посвящены исследованию дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, теории сингулярных интегральных уравнений, теории функций комплексного переменного, геометрии и механике.

В. Д. Купрадзе преподавал в Тбилисском университете, в течение ряда лет был министром просвещения ГрССР, в конце 50-х годов — ректором университета.



Ш. Е. Микеладзе.



Н. П. Векуа.

В 1955 г. его избрали Председателем Верховного Совета Грузинской ССР. Научные исследования Купрадзе относятся к области интегральных уравнений, граничных задач теории колебаний и граничных задач теории упругости.

Ш. Е. Микеладзе ряд лет возглавлял кафедру приближенного анализа в Тбилисском университете. Он занимался численным интегрированием дифференциальных уравнений, построением интерполяционных формул и другими вопросами вычислительной математики.

Г. С. Чогошвили продолжал свои исследования в области теории гомологии и в области применений топологии к анализу. Совместно с Л. Г. Магнарадзе он написал обобщающую работу по истории советской грузинской математической школы.

Н. П. Векуа занимался теорией сингулярных интегральных уравнений, граничными задачами теории функций комплексного переменного, интегро-дифференциальными уравнениями.

С 1942 г. Математическим институтом им. А. М. Размадзе руководит Н. И. Мусхелишвили. В этот период здесь работали также А. Я. Горгидзе и Г. Ф. Манджавидзе. В Институте было четыре отдела: отдел алгебры и геометрии, в котором работали А. З. Вальфиш и Г. С. Чогошвили, отдел теории функций, который возглавлял В. Г. Челидзе, отдел уравнений математической физики и функционального анализа, которым руководил Н. И. Мусхелишвили и где работали Д. Е. Долидзе, А. К. Рухадзе и Э. С. Цитланидзе, и отдел вычислительной математики, которым руководил Ш. Е. Микеладзе.

Распределение кафедр в Тбилисском университете было, в основном, таким же, как и в первой половине 40-х годов. Небольшие изменения заключались в следующем. Геометрия была отнесена к кафедре алгебры. Новообразованную кафедру алгебры и геометрии возглавил Г. С. Чогошвили. Была образована также специальная кафедра математики для физиков, которой руководил (вплоть до переезда в Москву) И. Н. Векуа.

В Тбилисском институте инженеров железнодорожного транспорта кафедрой математики заведовал Э. С. Цитланидзе, научные интересы которого были сосредоточены на вопросах нелинейного функционального анализа. В дальнейшем он продолжал свои исследования в этой области в Математическом институте им. А. М. Размадзе и в университете.

## Математика в Азербайджанской ССР

Вторая половина 40-х и 50-е годы были периодом весьма бурного роста математических исследований в Азербайджане в количественном и качественном отношениях. Исследования в области математики в этот период проводились в Институте физики и математики Академии наук АзССР, на кафедрах Азербайджанского университета, а также на математических кафедрах других высших учебных заведений.

В нескольких направлениях работал З. И. Халилов. В 1955 г. его избрали академиком, а в 1957 г. вице-президентом АН АзССР. В 1946—1947 гг. он работал над созданием абстрактной теории линейных сингулярных операторов. Результатом этих исследований, а также исследований его учеников явилась монография «Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах» (1949 г.). Далее Халилов занялся исследованием более общих вопросов функционального анализа, а также его применением в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Ему принадлежат некоторые исследования по истории математики.

А. И. Гусейнов работал в Азербайджанском университете. Он занимался исследованиями в области краевых задач. Его научные интересы относятся также к нелинейным сингулярным уравнениям. Первые результаты им получены в 1947 г. Эту работу продолжили его ученики. Предметом его исследований были также вопросы теории функций (1955 г.).

И. И. Ибрагимов работает в Азербайджанском педагогическом институте (с 1947 г.). Занимается вопросами исследования систем аналитических функций. Цикл работ, выполненный им и его учениками в 1945—1955 гг., посвящен изучению наилучшего приближения функций.

С Азербайджанским университетом связана научная и педагогическая деятельность Б. А. Розенфельда. Здесь он работал в 1950—1955 гг. Свои исследования Б. А. Розенфельд развивал в двух направлениях: в области геометрии (неевклидовы геометрии) и в области истории математики, в частности, им был переведен на русский язык и снабжен комментариями ряд произведений классиков восточной математики.

М. А. Джавадов в 1951—1955 гг. вел исследования в области геометрии проективных и неевклидовых пространств, сочетая их с проблемами алгебр матриц и альтернионов. Он предложил геометрическую интерпретацию спинорных представлений групп движений в неевклидовых пространствах.

Весьма существенная работа была проведена азербайджанскими учеными по изданию учебной математической литературы на азербайджанском языке. В этот период вышли в свет «Обыкновенные дифференциальные уравнения» М. Р. Эфендиева, «Основы теории чисел» (1955 г.)



и «Основы теории рядов» (1957 г.) И. И. Ибрагимова, «Элементы теории групп» (1942 г.) Я. Б. Лопатинского и М. А. Джавадова, «Векторное исчисление» (1957 г.) М. А. Джавадова и ряд других учебников. З. И. Халилов опубликовал также первую книгу по функциональному анализу на русском языке — «Основы функционального анализа» (1949 г.).

## 12

### Математика в Армянской ССР

В послевоенные годы подверглись некоторым преобразованиям кафедры Ереванского университета. Так, в 1949 г. кафедра математического анализа была объединена с кафедрой теории функций и дифференциальных уравнений. Эта кафедра, которой руководит А. Л. Шагинян, является ведущей на факультете. В 1954 г. направление дифференциальных уравнений снова выделилось в самостоятельную кафедру, которую возглавил Р. А. Александрян. Были организованы кафедра высшей математики, обслуживавшая математические специальности (руководил ею В. Сагателян) и кафедра вычислительной математики (Р. Подловченко). В 1949—1956 гг. в составе механико-математического факультета университета работала также кафедра истории физико-математических наук, которой руководил Г. Б. Петросян.

Исследования в области математики в Армении в 40-е годы проводились в основном в направлениях теории приближений функций полиномами и общей теории функций. К этим направлениям относятся исследования А. Л. Шагиняна, М. М. Джрбашяна, С. Н. Мергеляна.

А. Л. Шагинян в 1947 г. был избран академиком АН АрмССР.

М. М. Джрбашян окончил в 1945 г. аспирантуру при Ереванском университете, в 1949 г. защитил докторскую диссертацию, в 1956 г. был избран академиком АН АрмССР.

С. Н. Мергелян в 1949 г. закончил аспирантуру в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР под руководством М. В. Келдыша. При защите кандидатской диссертации ему была присуждена степень доктора наук. В 1953 г. он избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1956 г. — академиком АН АрмССР.

В послевоенные годы А. Л. Шагиняном, М. М. Джрбашяном, С. Н. Мергеляном были получены весьма существенные результаты. В частности,



М. М. Джрбашян.

ими исследованы наилучшие приближения в неограниченных областях (А. Л. Шагинян, М. М. Джрбашян).

В 40—50-е годы в Армении появляются и первые работы по дифференциальным уравнениям и функциональному анализу. В этих областях работают Р. А. Александрян и Р. М. Мартиросян.

Р. А. Александрян окончил аспирантуру в Московском университете под руководством С. Л. Соболева (в 1948 г.). Его работы относятся к исследованию задачи Дирихле для волнового уравнения и связанных с этой задачей пространств с индефинитной метрикой.

Р. М. Мартиросян также окончил аспирантуру в Московском университете, под руководством И. М. Гельфанда. Его научные интересы связаны с исследованиями спектральных свойств некоторых дифференциальных операторов.

## 13

### **Развитие математики в республиках Средней Азии и в Казахской ССР**

Высшая школа и наука в Средней Азии в послевоенные годы развивались все повышающимися темпами. Значительную роль в этом сыграла помощь ученых, эвакуировавшихся во время войны в Среднюю Азию из других союзных республик. Так, только в одном Узбекистане во время войны находились Ленинградский политехнический институт, Киевский индустриальный институт, Харьковский институт инженеров железнодорожного транспорта и другие вузы, а также научно-исследовательские институты. В Ташкенте в военные годы находилось 375 научных работников Академии наук СССР. Все они сотрудничали с учеными Узбекистана и помогали им в решении ряда научных проблем.

В результате этого, а также напряженной работы всего советского народа в годы послевоенных пятилеток были преобразованы и развиты не только промышленность и вообще народное хозяйство среднеазиатских республик, но и их культурная жизнь. Значительно увеличилось количество высших учебных заведений и число студентов в них. Возрос также процент студентов из местного населения. Аналогичное явление произошло и в среде научно-педагогических кадров: в науку вошли представители коренного населения Средней Азии — узбеки, туркмены, казахи и др.

Институт математики и механики Академии наук УзССР оставался основной научно-исследовательской организацией в области математических наук. Исследования, проводившиеся в нем, относились главным образом к прикладной математике.

Руководил исследованиями узбекских математиков академик АН УзССР В. И. Романовский. Исследования его охватывали широкий круг вопросов теории вероятностей и математической статистики. В послевоенные годы вышло несколько монографий Романовского: «Применение математической статистики в опытном деле» (1947 г.),



«Основные задачи теории ошибок» (1947 г.), «Дискретные цепи Маркова» (1949 г.).

Т. А. Сарымсаков с 1946 по 1952 г. был президентом Академии наук УзССР. Он продолжал работать также в Средне-Азиатском университете, в 1942—1947 гг. и 1952—1958 гг. был ректором университета. Ему принадлежит цикл исследований в области теории марковских процессов и их приложений к синоптической метеорологии (за цикл этих работ В. И. Романовский, Т. А. Сарымсаков и их сотрудники были удостоены Государственной премии). В 1954 г. вышла его монография «Основы теории процессов Маркова».

В первой половине 50-х годов В. И. Романовский, вместе со своими учениками С. Х. Сираждиновым и другими, выполнил ряд работ по применению математической статистики к контролю качества промышленной продукции. На основе этих исследований отдел математической статистики Института математики и механики им. В. И. Романовского АН УзССР разработал проект Государственного стандарта приемочного статистического контроля.

С. Х. Сираждинов с 1954 по 1956 г. работал в Московском университете, с 1956 г. — в Средне-Азиатском университете, а с 1957 г. — в Институте математики и механики им. В. И. Романовского АН УзССР. В 1956 г. он избран членом-корреспондентом Академии наук УзССР. Сираждинов также занимался исследованиями цепей Маркова и опубликовал монографию «Предельные теоремы для цепей Маркова» (1955 г.).

В 1944 г. в Узбекский университет (в Самарканде) пришел Н. П. Романов, работавший ранее в Томском университете. С 1951 г. Романов работает в Средне-Азиатском университете. Вместе с группой учеников он выполнил ряд исследований в области теории чисел, в частности по вопросам распределения простых чисел.

В Узбекском университете работал также И. С. Куклес (с 1947 г.). Исследования его относятся к области качественной теории дифференциальных уравнений.

И. С. Аржанных проводил в Средне-Азиатском университете исследования по проблемам дифференциальных уравнений и механики.

В 40-х годах в Ташкенте были начаты исследования по истории математики. Т. Н. Кары-Ниязов в 1950 г. опубликовал монографию «Астрономическая школа Улугбека», подытоживающую его исследования в области истории среднеазиатской науки и культуры.

В 1946 г. в Алма-Ате была открыта Академия наук Казахской ССР. В Секторе математики и механики АН КазССР работал К. П. Персидский и в 1949 г. сотрудничал А. Д. Александров. Персидский в 1951 г. избран академиком АН КазССР. Как отмечалось выше, он организовал и развил в Алма-Ате исследования в области устойчивости движения. Эти исследования Персидский продолжал и в 50-е годы.

В 40—50-х годах в Казахстане вели научные исследования математики О. А. Жаутыков, Б. М. Уразбаев, В. Х. Харасахал, Ф. Д. Крамар, В. В. Стрельцов, С. И. Горшин и др.

О. А. Жаутыков занимался вопросами неустойчивости невозмущенного движения. Им изучена также задача Коши для рекуррентных бесконечных систем уравнений в частных производных высоких порядков и исследованы свойства решений счетных систем дифференциальных уравнений, содержащих параметры. Теории счетных систем дифференциальных уравнений посвящена его докторская диссертация. О. А. Жаутыков — автор учебника по курсу математического анализа на казахском языке.

Б. М. Уразбаев работает в Алма-Атинском педагогическом институте с 1937 г. Его исследования относятся к области алгебры, в частности к вопросам абелевых полей.

В. Х. Харасахал изучал вопросы устойчивости решений счетной системы нелинейных дифференциальных уравнений для некоторых специальных случаев. В его докторской диссертации рассмотрены решения дифференциальных уравнений с почти периодическими и квазипериодическими коэффициентами.

Ф. Д. Крамар занимается исследованиями в области истории математики (история векторного и тензорного исчисления).

В 1954 г. открылась Академия наук Киргизской ССР. В 1955 г. при Президиуме Академии наук КиргССР был организован отдел физики и математики, преобразованный позднее в Институт физики и математики. Несколько раньше, в 1951 г., на базе педагогического института в г. Фрунзе был основан Киргизский университет с физико-математическим факультетом. Таким образом, в Киргизии также начала создаваться база для планового развития исследований в области математики.

Первый коллектив математиков во Фрунзе был создан в Киргизском университете. С 1951 по 1957 г. здесь работал Ф. И. Франкль. Его исследования относятся к общей теории уравнений математической физики, некоторым вопросам топологии, прикладной математики. Франклю принадлежат также статьи историко-математического содержания.

С 1951 г. в Киргизском университете работал Я. В. Быков, перешедший затем в Институт физики и математики АН КиргССР. Исследования Быкова сосредоточены на вопросах теории линейных интегральных уравнений и некоторых вопросах теории интегро-дифференциальных уравнений.

В 1950 г. на базе Ашхабадского педагогического института был основан Туркменский университет с физико-математическим и механико-технологическим факультетами, а в следующем году в Ашхабаде от-



Т. А. Сарымсаков.

крылась Академия наук Туркменской ССР. Таким образом, и в Туркменской республике была создана основа для проведения исследований в области точных наук, хотя математика пока еще не входит в число тех из них, которые уже получили здесь систематическое развитие.

Подобное положение и в Таджикистане. Академия наук ТаджССР была создана в 1951 г. В составе отдела физико-технических и химических наук есть отдел физики и математики, но исследования в нем проводятся главным образом в области физики.

В 1948 г. открылся Таджикский университет. На физико-математическом факультете четыре математические кафедры: математического анализа, дифференциальных уравнений, прикладной и вычислительной математики, методики преподавания математики и физики.

Теорию дифференциальных уравнений эллиптического типа и интегральные уравнения в университете исследует Л. Г. Михайлов. Кафедрой математического анализа руководит М. А. Субханкулов. Группа сотрудников под его руководством занимается проблемой «Тауберовы теоремы с остаточным членом и их применение».

## 14

### Математические научные совещания, конференции и съезды

Рассмотрим наиболее важные совещания и конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики, проведенные с 1945 по 1958 г.

В 1945 г. с 15 июня по 3 июля проходила Юбилейная сессия АН СССР, посвященная 220-летию со дня ее основания. Сессия проводилась в Москве и Ленинграде (с 25 по 28 июня). В ее работе приняли участие более 1000 советских и иностранных ученых. Было прочитано много итоговых докладов, в частности по математике доклады Б. Н. Делоне — «Академик Пафнутий Львович Чебышев и русская школа математики», П. С. Александрова — «Развитие математики в нашей стране», С. Н. Бернштейна — «Конструктивная теория функций как развитие идей Чебышева», И. М. Виноградова — «Аналитическая теория чисел», В. В. Голубева — «Исследования русских ученых в области технической аэромеханики», М. В. Келдыша — «О приближении функций комплексного переменного полиномами», Н. Д. Папалекси — «Развитие учения о нелинейных колебаниях и их применении», И. Г. Петровского — «Развитие теории уравнений эллиптического и гиперболического типа».

Иностранными учеными были сделаны следующие доклады: Ж. Адамаром (Франция) — «Психология математического мышления», С. Стоиловым (Румыния) — «О функциях, определенных на римановой поверхности с нулевым контуром», М. Фреше (Франция) — «О некоторых новых исследованиях по теории вероятностей».

9—12 декабря 1946 г. в Горьком состоялось совещание по вопросам электрических колебаний и волн. В совещании приняли участие также математики.

С 24 по 26 декабря 1946 г. в Москве проводилось совещание по вопросам истории естествознания, созванное Институтом истории естествознания и техники АН СССР. Из математиков на совещании выступили с докладами Б. В. Гнеденко, М. Я. Выгодский, Д. Д. Мордухай-Болтовской, Л. Б. Модзалевский и А. П. Юшкевич.

10—20 февраля 1947 г. Ленинградское отделение Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР провело семинар по аналитической теории чисел, в котором приняли участие иногородние математики.

В апреле 1947 г. (с 8 по 24 апреля) Московский университет организовал «Ломоносовские чтения», в которые входила секция математики, механики и астрономии.

В 1947 г. в Горьком состоялась конференция по теории колебаний, созванная физиками школы А. А. Андропова.

В октябре — ноябре 1947 г. были проведены научные сессии, общие собрания и конференции, посвященные 30-й годовщине Великого Октября. Было подготовлено и прочитано много докладов, в том числе математического и историко-математического содержания. В частности, на общем собрании АН СССР три доклада прочитали И. М. Виноградов, А. Н. Колмогоров и М. А. Лаврентьев.

Цикл докладов читали математики на совместных заседаниях Московского математического общества и Московского университета. В них подытожены достижения советских математиков за 30 лет. Одновременно был подготовлен сборник «Математика в СССР за тридцать лет».

27 сентября — 2 октября 1948 г. в Ташкенте состоялось Второе всесоюзное совещание по математической статистике, созванное Институтом математики им. В. А. Стеклова АН СССР и Институтом математики и механики Академии наук УзССР. В совещании приняли участие представители Академии наук СССР, Академий наук УССР и УзССР, Академии артиллерийских наук, Московского, Ленинградского и Средне-Азиатского университетов и многих других вузов. Было прочитано 14 докладов. В решении совещания отмечается разрыв теории и практики, вследствие которого ряд теоретических результатов не был доведен до практического использования, а также недостаточность объема преподавания теории вероятностей и математической статистики в вузах, несмотря на их все возрастающее значение для техники, экономики и естествознания.

5—11 января 1949 г. в Ленинграде состоялось собрание Академии наук СССР, посвященное истории отечественной науки. Несколько докладов, прочитанных на собрании, посвящено истории математики.

26—29 января 1949 г. отдел теории вероятностей Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР совместно с кафедрой теории вероятностей МГУ провел научную сессию, в которой приняли участие также математики Ленинграда и Львова.

С 6 по 9 июня 1949 г. в Киеве проходила расширенная конференция по математической физике. На конференции работало четыре секции: теории упругости, гидродинамики, динамических задач теории упругости, теоретической физики.

26—28 января 1950 г. в Тбилиси состоялась расширенная сессия по математической физике, проводившаяся Математическим институтом им. А. М. Размадзе.

В мае 1950 г. Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР организовал Всесоюзную топологическую конференцию. В конференции приняли участие 58 ученых из десяти городов.

7—10 декабря 1950 г. в Москве проходило Всесоюзное совещание по теории упругости, теории пластичности и строительной механике. В совещании приняли участие также многие математики.

13 февраля 1951 г. Казанский университет, Институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева и Казанское физико-математическое общество отметили 125-ю годовщину открытия Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии.

7—12 сентября 1951 г. в Москве состоялось Всесоюзное совещание по алгебре и теории чисел. В работе совещания приняли участие 102 представителя из 20 городов. Было прочитано 54 доклада.

Приведем сравнительную характеристику алгебраической конференции 1939 г. и алгебраической части конференции 1951 г., данную И. Р. Шафаревичем. На конференции 1939 г. большинство докладов ( $\frac{2}{3}$  общего числа) было посвящено теории групп. Были представлены три основные школы, работавшие в то время у нас в этой области. Интересы школы О. Ю. Шмидта концентрировались вокруг проблемы Бернсайда и других вопросов теории конечных групп. Ленинградская школа (А. А. Марков, В. А. Тартаковский и его ученики) занималась вопросами задания групп соотношениями и связями с гомологией. Школа А. Г. Куроша занималась бесконечными абелевыми разрешимыми и локально свободными группами, теорией прямых и свободных произведений и т. д. Кроме результатов, доложенных представителями этих школ, следует упомянуть сообщения А. И. Мальцева о представлениях групп и вложениях полугрупп в группы.

Другой большой цикл составляли доклады Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева по геометрии теории Галуа.

Среди результатов, доложенных на конференции, было немало первоклассных достижений, вошедших впоследствии в монографии и учебники. Однако круг интересов наших алгебраистов тогда не был еще достаточно широким. Другая картина вырисовалась на конференции 1951 г. Здесь уже трудно указать область алгебры, которой не были бы посвящены доклады. В теории групп новым направлением, возникшим за прошедшее от предыдущей конференции время, является созданная Д. К. Фаддеевым теория гомологий в группах. Очень много докладов было посвящено теории колец, почти не представленной в 1939 г. Большая часть доложенных результатов связана с работами А. Г. Куроша и его учеников. Новыми направлениями являются теория унитарных представлений групп И. М. Гельфанда и теория ассо-

циативных систем, разрабатываемая Е. С. Ляпиным и его учениками, а также работы А. А. Маркова по теории алгоритмов. Большое количество доложенных работ посвящено связям алгебры с другими частями математики — анализом, проективной геометрией, топологией, теорией чисел, вычислительной техникой и т. д.<sup>5</sup>

27 мая — 2 июня 1952 г. в Москве состоялось Всесоюзное совещание по дифференциальным уравнениям, созванное Институтом математики им. В. А. Стеклова АН СССР. В нем приняло участие более 200 ученых из разных городов Советского Союза. Совещание открыл М. В. Келдыш. Заключительный доклад — «Развитие теории дифференциальных уравнений в Советском Союзе за последние годы» — сделал С. Л. Соболев. Совещание привлекло внимание многих математиков, так как интересы большинства молодых ученых, пришедших в науку в послевоенные годы, относятся именно к этой области математики.

В 1952 г. Институт механики АН СССР провел в Москве Всесоюзное совещание по гидроаэродинамике, на котором было прочитано 36 докладов по вопросам математических теорий, применяемых в прикладных задачах.

С 28 сентября по 2 октября 1953 г. в Киеве проходило III Всесоюзное совещание по теории вероятностей и математической статистике. Было заслушано 28 докладов. Совещание в своей резолюции указало на отставание количественного роста специалистов по теории вероятностей и математической статистике от потребностей в них.

23 ноября — 4 декабря 1953 г. в Москве состоялось II Всесоюзное совещание по теории автоматического регулирования, созванное Институтом автоматики и телемеханики АН СССР. Работало три секции: проблемы устойчивости, периодических режимов и задачи регулирования связанных величин; проблемы динамической точности и качества; моделирование и экспериментальные методы исследования систем регулирования. Было прочитано более 80 докладов. В ряде докладов освещен исторический ход развития идей автоматического регулирования в Советском Союзе.

С 20 по 25 апреля 1954 г. в Алма-Ате проходила первая научная конференция по математике и механике, организованная Сектором математики и механики АН КазССР. В работе конференции приняли участие математики Москвы, Ленинграда, Среднеазиатских республик и Казахстана. Всего было сделано 40 докладов.

25 февраля 1955 г. Московское математическое общество совместно с ученым советом механико-математического факультета Московского университета провело торжественное заседание, посвященное 100-летию со дня смерти Гаусса. С докладами выступили П. С. Александров, Б. Н. Делоне, А. И. Маркушевич, К. А. Рыбников.

Этой же дате было посвящено заседание, проведенное Всесоюзным обществом культурной связи с заграницей совместно с Отделением

---

<sup>5</sup> А. Ф. Лапко и Л. А. Люстерник. Математические съезды и конференции в СССР. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 105—106.

физико-математических наук АН СССР. На заседании выступили И. М. Виноградов, Б. В. Гнеденко, Б. Н. Делоне, А. И. Маркушевич, А. П. Норден.

31 марта — 7 апреля 1955 г. в Москве состоялось Всесоюзное совещание по квантовой электродинамике и теории элементарных частиц.

С 9 по 13 мая 1955 г. проходила Юбилейная сессия Московского университета, посвященная 200-летию со дня его основания. Заседание механико-математического факультета открыл А. Н. Колмогоров. На пяти заседаниях факультета было прочитано 12 докладов.

30 мая — 1 июня 1955 г. Московский университет (кафедра теории функций) проводил конференцию по теории функций комплексного переменного.

В июне 1955 г. в Киеве состоялась конференция по асимптотическим методам решения дифференциальных уравнений.

С 17 по 24 января 1956 г. в Москве проходило Всесоюзное совещание по функциональному анализу и его применениям. Инициаторами совещания были Отделение физико-математических наук АН СССР и Московский университет. В нем приняли участие до 600 чел., в том числе ученые из-за границы. На совещании работали следующие секции: нелинейный функциональный анализ; спектральная теория операторов; численные методы и теории возмущений; общая теория банаховых пространств; уравнения в частных производных; представление групп и колец; теория полуупорядоченных пространств, приближенные методы; обобщенные методы, линейные пространства; гидромеханика и другие вопросы. Совещание показало, как важна роль, которую играют во всей современной математике синтетические концепции функционального анализа.

«Развитие функционального анализа, с одной стороны, отражало запросы естествознания — современной физики, использующей аппарат разных разделов функционального анализа, иногда мало разработанных; с другой стороны, диктовалось внутренней логикой развития математики, его синтезирующими тенденциями. Интересно сопоставить тревожные голоса времен Харьковского съезда об опасности одностороннего процесса специализации, о том, что математики теряют общий язык, с самим фактом созыва такой объединительной конференции, на которой представители почти всех математических специальностей могли найти общий язык. Основы функционального анализа стали уже составной частью общего университетского математического образования. Есть основания согласиться с мнением, что история анализа за истекшие десятилетия прошла через создание этой синтезирующей дисциплины, подобно тому, как она в свое время проходила через создание дисциплин, ныне всеми признанных классическими (хотя они во время своего формирования и не везде встречали признание). Конференция подвела итоги этапа развития анализа у нас»<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup> А. Ф. Лапко и Л. А. Люстерник. Математические съезды и конференции в СССР. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 114.

С 12 по 17 марта 1956 г. в Москве проходила научная конференция «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения».

В 1956 г. в Москве состоялся III Всесоюзный математический съезд.

В работе съезда приняло участие более 2500 советских ученых из 100 городов Советского Союза и более 70 ученых из зарубежных стран. Наиболее многочисленными были делегации Москвы (1000 чел.), Ленинграда (300 чел.), Киева (70 чел.), Харькова (60 чел.), Тбилиси (60 чел.). Организационный комитет съезда работал под председательством И. М. Виноградова. В состав Президиума Оргкомитета входили П. С. Александров, И. Н. Векуа, М. А. Лаврентьев, Н. М. Коробов. На открытии съезда И. М. Виноградов прочел доклад «Некоторые проблемы аналитической теории чисел».

Работа съезда проходила по следующим секциям:

1. Теория чисел.
2. Алгебра.
3. Дифференциальные и интегральные уравнения; три подсекции: уравнения в частных производных, обыкновенные дифференциальные уравнения, интегральные уравнения.
4. Теория функций; три подсекции: теория приближений, теория функций действительного переменного, теория функций комплексного переменного.
5. Функциональный анализ.
6. Теория вероятностей.
7. Топология.
8. Геометрия; две геометрические подсекции и одна номографическая.
9. Математическая логика и основания математики.
10. Вычислительная математика.
11. Математические проблемы механики; подсекции: гидродинамика, теория упругости, фильтрация, пластичность, устойчивость упругих систем, общая механика, теория оболочек.
12. Математические проблемы физики; две подсекции.
13. История математики.

Увеличение числа секций на этом съезде, по сравнению с ленинградским, свидетельствует о появлении новых областей математики и росте числа самих математиков. Так, объединенная секция алгебры и теории чисел, организованная на II Всесоюзном математическом съезде, разделилась на III съезде на две самостоятельные секции. Секция философии и истории математики также разделилась на две секции: математической логики и оснований математики и истории математики. Секция механики и математической физики разделилась на секции математических проблем механики и математических проблем физики (в каждой из которых были еще подсекции). Появилась новая секция функционального анализа. В секции дифференциальных и интегральных уравнений пришлось создать три подсекции, а для одного заседания — даже четыре. Подсекции были выделены и в других больших секциях:



теории функций и геометрии. По существу новой была и секция вычислительной математики (вместо секции приближенных вычислений на ленинградском съезде), значительная часть тематики которой посвящалась современным вычислительным машинам<sup>7</sup>.

На съезде было прочитано 763 доклада, из них 63 — иностранными учеными. Значительное большинство докладов, почти половина, прочитано учеными Москвы (312) и Ленинграда (87). Характерно, что наиболее представительными были 3-, 4-, 8-, 11- и отчасти 13-я секции. Дифференциальные и интегральные уравнения и теория функций привлекли интерес большинства советских математиков. В значительно меньшей степени проявился интерес к геометрии и математическим проблемам механики, несмотря на их разносторонность. Беднее представлены были математические проблемы физики — 38 московских, 7 ленинградских, 4 киевских и два харьковских доклада. Наконец, математическая логика и основания математики были, в сущности, представлены лишь докладами московских и ленинградских ученых и одним докладом грузинского математика (Л. П. Гокиели — «О предмете математики»). На секции истории математики было прочитано 33 доклада, из них половина — московскими учеными.

15—20 октября 1956 г. в Москве состоялась сессия Академии наук СССР по научным проблемам автоматизации производства, в работе которой приняли участие также математики.

5—7 марта 1957 г. в Москве было проведено совещание по автоматическому управлению и вычислительной технике.

18—23 марта 1957 г. Воронежский семинар по функциональному анализу провел ряд заседаний по вопросам применения методов функционального анализа к дифференциальным уравнениям. В заседаниях приняли участие математики Воронежа, Москвы, Ленинграда, Киева, Минска, Харькова, Баку и Ростова-на-Дону.

15—18 апреля 1957 г. в Ленинграде состоялась юбилейная сессия АН СССР, посвященная празднованию 250-летия со дня рождения Леонарда Эйлера. На сессии присутствовало более 400 математиков из Советского Союза и зарубежных стран. 9 апреля 1957 г. такое совещание было организовано в Москве, по инициативе Московского математического общества и механико-математического факультета Московского университета. С докладами выступили П. С. Александров, А. П. Юшкевич, И. Г. Башмакова.

16—18 мая 1957 г. Институт математики АН УССР провел в Киеве первое совещание математиков Украины. В нем приняло участие более 300 чел.

С 28 по 31 мая 1957 г. в Московском университете проходила III Конференция по теории функций комплексного переменного. В ней приняло участие 200 чел., в том числе представители из-за рубежа. В эти же дни в Москве проводилось Научно-техническое совещание по комплексу вопросов, связанных с разработкой и построением инфор-

---

<sup>7</sup> А. Ф. Лапко и Л. А. Люстерник. Математические съезды и конференции в СССР. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 116.

мационных машин с большой долговременной памятью. Это совещание было организовано Лабораторией электромоделирования АН СССР. На нем были рассмотрены, в числе других, вопросы машинного перевода.

В 1957 г. состоялось объединенное заседание физико-математического и технического отделения АН СССР, механико-математического факультета МГУ и Московского математического общества, посвященное 100-летию со дня рождения А. М. Ляпунова.

С 16 октября по 2 ноября 1957 г. в Московском университете проходили «Ломоносовские чтения», посвященные 40-летию Великого Октября. Секция математики и механики была организована университетом совместно с Московским математическим обществом. Научная сессия, посвященная 40-летию Великой Октябрьской социалистической революции, была проведена в Ленинградском университете (в ноябре — декабре 1957 г.).



Л. П. Гокхели.

## 15

### **Связи советских ученых с зарубежными математиками.**

#### **Математическая литература и периодика**

Выше отмечалось, что на всех основных конференциях и совещаниях советских математиков принимали участие иностранные ученые. Особенно широко были представлены иностранные ученые на III Всесоюзном математическом съезде — более 70 ученых из ГДР, Чехословакии, Румынии, Венгрии, Польши, Болгарии, Югославии, Китая, ФРГ, Индии, Англии, Франции, Италии, Норвегии, Швеции и США. Советские математики в свою очередь принимали участие в конференциях и совещаниях зарубежных ученых.

С каждым годом растет количество делегаций советских ученых, выезжающих за границу, и делегаций зарубежных ученых, приезжающих в Советский Союз. Кроме того, много советских ученых бывает за рубежом и соответственно зарубежных ученых в СССР в порядке индивидуальных командировок различной продолжительности.

Выше также отмечалось, что по ряду направлений советские математики занимают ведущее место, а по некоторым — одно из первых мест в мировой науке. Многие работы советских ученых переводятся и издаются за границей, а еще большее количество работ реферируется.

Переводятся также некоторые учебники, например многотомный курс В. И. Смирнова.

Таким образом, все усиливающееся влияние советской математики на мировую математическую науку является неоспоримым фактом.

В 40—50-х годах наиболее распространенным учебником оставался «Курс высшей математики» В. И. Смирнова. Первый том его в 1956 г. вышел уже 16-м, второй — 14-м, а третий и четвертый — соответственно 5-м и 2-м изданиями. В 1955 г. были выпущены 5-м изданием «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление» Н. Н. Лузина — книги, также составившие эпоху в истории математического образования в советской высшей школе. Широкое распространение получили руководства Г. М. Фихтенгольца — трехтомный «Курс дифференциального и интегрального исчислений» и «Основы математического анализа» в двух томах.

Значительная работа в 40—50-е годы была проведена по составлению руководств по отдельным математическим дисциплинам, а также по новым отраслям математики, методика изложения которых в высшей школе только вырабатывалась. В эти годы вышли «Введение в общую теорию множеств и функций» (1947 г.) и «Введение в теорию групп» (1951 г.) П. С. Александрова, «Лекции по вариационному исчислению» (1955 г.) Н. И. Ахиезера, «Курс аналитической геометрии» С. С. Бюшгенса, «Курс дифференциальной геометрии (4-е изд., 1956 г.) и «Риманова геометрия и тензорный анализ» (1953 г.) П. К. Рашевского, «Непрерывные группы» (2-е изд., 1954 г.) Л. С. Понтрягина, «Лекции по дифференциальной геометрии» (1955 г.) и «Лекции по аналитической геометрии» (1957 г.) А. В. Погорелова, «Курс вариационного исчисления (2-е изд., 1950 г.) М. А. Лаврентьева и Л. А. Люстерника, «Элементы функционального анализа» (1951 г.) Л. А. Люстерника и В. И. Соболева, «Краткий курс теории аналитических функций» (1957 г.) А. И. Маркушевича, «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений», «Лекции по теории интегральных уравнений» и «Лекции об уравнениях с частными производными» И. Г. Петровского и много других.

Большое количество учебников по математике было издано на языках народов СССР: украинском, белорусском, грузинском, эстонском, узбекском, латышском, азербайджанском, армянском и других языках. Появление учебной математической литературы на национальных языках способствовало вовлечению еще большей массы советской молодежи в круг математических интересов и, таким образом, стимулировало расширение научных математических школ.

Было издано также большое количество научно-популярной литературы. Вышла в свет трехтомная книга «Математика, ее содержание, методы и значение», изданная под редакцией А. Д. Александрова, А. Н. Колмогорова и М. А. Лаврентьева Математическим институтом им. В. А. Стеклова АН СССР.

Стало традицией издание обобщенных сборников, подытоживающих развитие советской математики за определенный период. Так,

в 1932 г. вышел сборник «Математика в СССР за пятнадцать лет», в 1948 г. — «Математика в СССР за тридцать лет», в 1959 г. — «Математика в СССР за сорок лет» (в двух томах).

Одним из мероприятий, направленных на вовлечение в науку способной молодежи и выявление ее талантов, явились математические школьные олимпиады, начало организации которых относится еще к 30-м годам, а значительное развитие — к 40—50-м годам. Это мероприятие непосредственно связано с вопросом подготовки кадров. Если до Великой Октябрьской социалистической революции ограниченное количество математических кафедр России, не превышавшее нескольких десятков, оставляло «для подготовки к профессорскому званию» ежегодно по 1—2 чел. (причем не все кафедры), то начиная с первых после-революционных лет это положение изменилось в корне. Были созданы научно-исследовательские институты и кафедры с аспирантурой. Подготовка научных кадров в аспирантуре количественно выросла в значительных размерах: аспирантов по математическим дисциплинам готовили Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР и его Ленинградское отделение, математические и механико-математические институты республиканских Академий наук, научно-исследовательские институты математики и механики и математические кафедры университетов, математические кафедры педагогических институтов, технических и сельскохозяйственных учебных заведений и, наконец, математические группы институтов разного подчинения — физического, технических, военных и других профилей. Естественно, что такая сложная система подчинения отчасти отрицательно сказывалась на выпуске высококвалифицированных кадров: не было единых условий приема в аспирантуру, обеспечивающих отбор действительно талантливой молодежи. А это влекло за собой относительно большой процент отсева и не всегда высокое качество выполненных работ. С другой стороны, в такой системе была и положительная черта: пожалуй, невозможно назвать ни одного математического направления, в котором не была бы подготовлена смена.

Значительного развития в рассматриваемый период достигла математическая периодика. К журналам, выпускавшимся Академией наук СССР и республиканскими Академиями наук, а также к нескольким математическим журналам союзного значения («Успехи математических наук», «Математическое просвещение», «Наука в школе», «Историко-математические исследования» и др.) добавились «Труды» университетов, педагогических институтов и крупнейших высших технических учебных заведений. В прилагаемой к IV тому библиографии указаны важнейшие повременные издания и годы, в течение которых они выходили.

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В ПЕРИОД РАЗВЕРНУТОГО СТРОИТЕЛЬСТВА КОММУНИЗМА (1958—1967 гг.)

#### 1

#### Математика в Академии наук СССР

За немногие годы, отделяющие нас от 1958 г., весь мир стал свидетелем грандиозных достижений мирного творческого труда нашего народа. 4 октября 1957 г. запущен первый искусственный спутник Земли, 3 ноября 1957 г. вышел на орбиту второй спутник Земли, с первым космическим пассажиром — собакой Лайкой, 2 января 1959 г. запущена в сторону Луны космическая ракета «Луна-1», 12 апреля 1961 г. впервые в мире стартовал космический корабль «Восток-1» с человеком на борту — летчиком-космонавтом Ю. А. Гагариным. 11 и 12 августа 1962 г. выведены на близкие орбиты космические корабли «Восток-3» и «Восток-4», пилотируемые летчиками-космонавтами А. Г. Николаевым и П. Р. Поповичем. Это был первый групповой полет космических кораблей. 12 октября 1964 г. осуществлен запуск первого многоместного космического корабля «Восход», экипаж которого состоял из командира корабля летчика-космонавта В. М. Комарова, научного сотрудника канд. техн. наук К. П. Феоктистова и врача Б. Б. Егорова. 18 марта 1965 г. во время полета советского космического корабля «Восход-2» впервые в истории совершен выход человека в открытое космическое пространство. 31 января 1966 г. осуществлен запуск автоматической станции «Луна-9», впервые в истории совершившей мягкую посадку на Луну. В 1967 г. впервые в истории советская АМС «Венера-4» совершила мягкую посадку на планету Венера. В этом же году в канун 50-летия Великого Октября впервые была осуществлена автоматическая стыковка двух советских космических кораблей на орбите — «Космос-186» и «Космос-188». Это завоевание космоса стало возможным благодаря тому, что советская наука и советская техника сумели создать совершенно новые типы многоступенчатых ракет.

Одновременно происходило освоение атомной энергии в мирных целях. Еще 27 июня 1954 г. была введена в строй первая в мире атомная электростанция. В 1959 г. стал в строй действующих кораблей СССР атомный ледокол «Ленин». 26 апреля 1964 г. дала ток Белоярская атомная электростанция им. И. В. Курчатова.

Быстрыми темпами развиваются атомная физика и атомная техника, положено начало международному сотрудничеству в этой области,

инициатором которого является Советский Союз, оказавший странам социалистического лагеря и некоторым другим странам не только значительную материальную помощь, но и помощь в подготовке кадров и овладении новой техникой. Большую роль в подготовке кадров в области ядерной физики сыграл Объединенный институт ядерных исследований в Дубне, где ученые социалистических стран впервые получили возможность вести широкие исследования в области ядерной физики.

Решение задач, поставленных ракетной, ядерной и некоторыми другими областями новейшей науки и техники, потребовало создания новых математических направлений и принципиально нового подхода к исследованию ряда проблем современной математики. Необходимость доведения до числового результата задач весьма высокой сложности, причем в исключительно короткий срок, связь этих задач с вопросами управления, контроля и производства разнообразных технологических операций обусловили создание новой вычислительной техники — электронных и аналоговых счетно-вычислительных машин. В середине 50-х годов при академических математических институтах и в составе многих университетов появляются вычислительные центры, а со второй половины 50-х годов специалисты в области алгебры и математической логики развивают исследования математической кибернетики. Таким образом, новые области науки и техники получают свои, адекватные вычислительные и контрольно-управляющие методы.

Такое развитие советской науки не случайность: оно является результатом планомерного развития советского государства. С 27 января по 5 февраля 1959 г. в Москве проходил XXI внеочередной съезд КПСС, утвердивший контрольные цифры развития народного хозяйства СССР на 1959—1965 гг. Съезд поставил задачу достигнуть в течение семилетки значительного роста производства, который дал бы возможность сделать решительный шаг в создании материально-технической базы коммунизма, и подчеркнул важнейшую роль новых областей науки и техники, новых вычислительных методов и кибернетики в развитии всего народного хозяйства страны. Эти решения нашли свое выражение в новых достижениях советской ракетной и атомной техники.

Большое значение в развитии советского общества имели решения XXII съезда Коммунистической партии Советского Союза, в которых указано, в частности, что «партия будет всемерно содействовать дальнейшему усилению роли науки в строительстве коммунистического общества, поощрению исследований, открывающих новые возможности в развитии производительных сил, широкому и быстрому внедрению в практику новейших научно-технических достижений, решительному подъему экспериментальных работ, в том числе непосредственно на производстве, образцовой постановке научно-технической информации, всей системы изучения и распространения отечественного и зарубежного передового опыта. Наука станет в полной мере непосредственной производительной силой»<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Материалы XXII съезда КПСС. Госполитиздат, М., 1961, стр. 375.

В решениях XXIII съезда КПСС содержатся исчерпывающие указания относительно развития науки:

*«Ускорить научно-технический прогресс на основе широкого развития научных исследований и быстрого использования их результатов в производстве и внедрения изобретений.*

Предусмотреть в пятилетнем плане:

развитие исследований в области теоретической и прикладной математики, обеспечивающих широкое применение математических методов в различных отраслях науки и техники;

развитие исследований по ядерной физике и физике твердого тела в целях широкого использования методов ядерной физики в различных отраслях науки и техники, дальнейшей разработки проблемы управляемого термоядерного синтеза, создания новых приборов радиоэлектроники и автоматики, конструкционных и других материалов;

дальнейшее изучение космического пространства и использование полученных результатов для совершенствования радиосвязи, радионавигации и телевидения, метеорологической службы и других практических целей;...

существенное повышение эффективности научных исследований и ускорение внедрения их результатов в производство. В этих целях сосредоточить научные силы и материальные ресурсы на решении основных проблем науки и техники, дающих максимальный экономический эффект, укрепить опытно-производственную базу научно-исследовательских учреждений и высших учебных заведений, проектно-конструкторских организаций и предприятий, оснастить их новейшим научным и лабораторным оборудованием. Повысить роль высших учебных заведений в научно-исследовательской работе»<sup>2</sup>.

В связи с возросшим значением науки возникла необходимость в новых научных и учебных центрах. Были организованы новые научно-исследовательские институты и высшие учебные заведения, а также отделения Академий наук. Особенно большое значение приобрела организация научного центра на Востоке страны, в Новосибирске, — Сибирского отделения Академии наук СССР. Необходимо было создать не обычный академический филиал, институты и секторы которого заняты решением отдельных проблем, выдвинутых развитием соответствующих наук, а систему институтов, которая решала бы комплексные проблемы, учитывающие как дифференцирование наук, так и их взаимовлияние и взаимопроникновение. Кроме того, для подготовки кадров в системе Сибирского отделения Академии наук СССР предусматривалась организация университета.

10 мая 1957 г. Президиум Академии наук СССР создал Комитет по организации Сибирского отделения АН СССР во главе с академиком М. А. Лаврентьевым. 18 мая 1957 г. Совет Министров СССР издал постановление «О создании Сибирского отделения АН СССР». В состав отделения были включены все научные учреждения АН СССР,

---

<sup>2</sup> Материалы XXIII съезда КПСС. Политиздат, М., 1966, стр. 230—231.

расположенные за Уралом, в том числе Западно-Сибирский, Восточно-Сибирский, Якутский и Дальневосточный филиалы АН СССР.

28 марта 1958 г. состоялось общее собрание АН СССР, на котором были избраны академики и члены-корреспонденты АН СССР, в том числе для Сибирского отделения 8 академиков и 27 членов-корреспондентов АН СССР. Из математиков академиками были избраны Л. С. Понтрягин, по Сибирскому отделению — И. Н. Векуа и А. И. Мальцев, членами-корреспондентами АН СССР — И. Р. Шафаревич, по Сибирскому отделению — А. В. Бицадзе и Л. В. Канторович.

О работах Л. С. Понтрягина и И. Н. Векуа говорилось выше. А. И. Мальцев занимался в основном вопросами алгебры и математической логики. В частности, он разработал так называемую теорию моделей, охватывающую весьма общие алгебраические системы. Исследования И. Р. Шафаревича сосредоточены в области теории алгебраических чисел и алгебраической геометрии. Работы А. В. Бицадзе относятся к теории уравнений в частных производных, они примыкают к исследованиям М. А. Лаврентьева и И. Н. Векуа. Ему принадлежит также построение трехмерного интеграла типа Коши.

В 1960 г. академиком был избран П. С. Новиков, членами-корреспондентами АН СССР — А. В. Погорелов и Н. В. Смирнов. Работы П. С. Новикова относятся к дескриптивной теории множеств, математической логике, основаниям математики, алгебре и топологии. Исследования харьковского геометра А. В. Погорелова примыкают к трудам А. Д. Александрова по теории выпуклых поверхностей. Основные работы Н. В. Смирнова относятся к математической статистике.

В 1961 г. президентом АН СССР избран выдающийся математик и механик М. В. Келдыш.

На следующих выборах, которые состоялись в 1964 г., по математике были избраны академиками В. М. Глушков, Ю. В. Линник и по Сибирскому отделению — А. Д. Александров и Л. В. Канторович, членами-корреспондентами АН СССР — К. К. Марджанишвили, Д. К. Фаддеев и по Сибирскому отделению — А. А. Ляпунов и А. И. Ширшов.

Исследования В. М. Глушкова охватывают проблемы алгебры (теория групп) и различные вопросы математической кибернетики. Результаты его получили широкую известность. Ю. В. Линник продолжал свои исследования в области теории чисел. Деятельность его была связана с Ленинградским отделением Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР и Ленинградским университетом. А. Д. Александров до 1964 г. был ректором Ленинградского



Н. В. Смирнов.





А. В. Бицадзе.

университета. Л. В. Канторович до 1958 г. был профессором Ленинградского университета, а с 1958 г. работает в Сибирском отделении АН СССР. Областью его исследований являются теория функций и функциональный анализ.

Исследования К. И. Марджанишвили относятся к теории чисел. Работы Д. К. Фаддеева посвящены вопросам теории групп, теории полей и теории Галуа. Исследования А. А. Ляпунова охватывают теорию множеств, математическую лингвистику и ряд вопросов, связанных с математической кибернетикой. До переезда в Новосибирск он работал в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР и Московском университете. А. И. Ширшов занимается теорией колец.

В 1963 г. был принят новый устав Академии наук СССР, в котором особо отмечается роль академии в решении теоретических проблем науки. В связи с этим многие технические научно-исследовательские институты были переданы различным ведомствам и министерствам. В соответствии с этим уставом в Академии наук увеличивалось количество отделений, для руководства которыми создавались соответствующие секции. В частности, было образовано Отделение математики. 5 июля 1963 г. Президиум АН СССР утвердил бюро Отделения математики в следующем составе: академик-секретарь отделения Н. Н. Боголюбов, заместитель секретаря С. Н. Мергелян, члены бюро И. Н. Вексуа, И. М. Виноградов, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, А. И. Мальцев, И. Г. Петровский, А. Д. Александров, Ю. В. Линник, А. А. Марков, А. Н. Тихонов, И. Р. Шафаревич.

В 1965 г. в состав Отделения математики входило 23 академика и 17 членов-корреспондентов. Выборы 1966 г. явились свидетельством больших достижений советской науки. Академиком избран был А. Н. Тихонов, членами-корреспондентами АН СССР — Н. П. Бусленко, В. Я. Козлов, С. П. Новиков, Ю. В. Прохоров, А. А. Самарский и по Сибирскому отделению — А. А. Боровков, М. И. Каргаполов, Н. Н. Яненко.

Исследования А. Н. Тихонова относятся как к математике, так и к геофизике. Основные математические работы его посвящены теоретико-множественной топологии и дифференциальным уравнениям, связанным с некорректно поставленными задачами. Работы Н. П. Бусленко относятся к основаниям математической теории алгоритмов. В. Я. Козлов работает в области теории функций. Исследования С. П. Новикова относятся к дифференциальной топологии; в этой области ему принадлежат фундаментальные работы. Ю. В. Прохоров работает в области

теории вероятностей. А. А. Самарский занимается теорией дифференциальных уравнений математической физики и вычислительной математикой, М. И. Каргаполов — алгеброй, теорией групп, научные интересы Н. Н. Яненко связаны с дифференциальной геометрией многомерных евклидовых пространств, проблемами римановых метрик, вычислительной математикой.

Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР имеет отделения в Ленинграде (ЛОМИ, с 1940 г.) и Свердловске (с 1957 г.). Возглавляет Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР И. М. Виноградов. Институт состоит из 11 отделов: математической логики (руководитель П. С. Новиков), теории чисел (И. М. Виноградов), алгебры (И. Р. Шафаревич), геометрии



Н. П. Бусленко.

(Б. Н. Делоне), топологии (П. С. Александров), теории функций (С. М. Никольский), дифференциальных уравнений (Л. С. Понтрягин), теории вероятностей (Ю. В. Прохоров), математической статистики (Н. В. Смирнов), механики (Л. И. Седов), теоретической физики (Н. Н. Боголюбов). Ленинградское отделение возглавляет Г. И. Петрашень. ЛОМИ состоит из пяти лабораторий: алгебраических методов (руководитель Д. К. Фаддеев), статистических методов (Ю. В. Линник), математической физики (О. А. Ладыженская), динамики упругих тел (Г. Н. Петрашень), приближенных вычислений (В. Н. Фаддеева). В 1960 г. при ЛОМИ организован вычислительный центр, которым в настоящее время руководит Н. Г. Болдырев. Вычислительный центр состоит из четырех лабораторий: общего программирования, математической постановки инженерных задач, теории игр и исследования операций.

В составе Академии наук СССР работает Вычислительный центр, научный коллектив которого внес большой вклад в развитие вычислительных методов и создание эффективных быстродействующих электронно-вычислительных машин. Руководит Вычислительным центром А. А. Дородницын.

Свердловское отделение Математического института АН СССР (директор С. Б. Стечкин) имеет четыре отдела и вычислительный центр. Отдел математического анализа занимается исследованиями методов стабилизации управляемых систем, а также отдельных задач, относящихся к этой же тематике. Группа математической физики, входящая в отдел, разрабатывает методы устойчивого решения некорректно поставленных задач, а также методы решения краевых задач для уравнений эллиптического и параболического типа. В отделе теории приближения функций исследуется проблема нелинейных задач прибли-



А. А. Самарский.

жения функций. Отдел математического программирования разработал новые итерационные методы решения общей задачи линейного и выпуклого программирования. Отдел прикладных задач вычислительной техники занимается решением прикладных задач в этой области.

В 1939 г. из состава Математического института АН СССР был выделен Институт механики АН СССР, преобразованный затем, в 1965 г., в Институт проблем механики АН СССР, который возглавил А. Ю. Ишлинский. Институт входит в Отделение механики и процессов управления.

Математическое отделение АН СССР в настоящее время издает пять журналов: «Известия АН СССР, серия математическая», «Журнал вычислительной математики и математической физики», «Те-

ория вероятностей и ее применения», «Математический сборник» (орган Отделения математики АН СССР и Московского математического общества), «Успехи математических наук» (орган Отделения математики АН СССР, при участии Московского математического общества), а также «Труды Математического института Академии наук СССР».

Сибирское отделение АН СССР начало свою работу в 1957 г. 24 марта 1959 г. состоялось общее собрание отделения, на котором были обсуждены задачи науки в свете решений XXI съезда КПСС, начато составление семилетнего плана научно-исследовательских работ.

Институт математики Сибирского отделения АН СССР был организован в 1957 г. в Москве. Директором его был избран С. Л. Соболев. В организации института значительную помощь оказали Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР (в помещении которого он вначале находился), Вычислительный центр АН СССР и Московский университет. В 1961 г. при Институте математики Сибирского отделения АН СССР был организован вычислительный центр. В научный состав Института математики вошли академики С. Л. Соболев, А. И. Мальцев и Л. В. Канторович,



Ю. В. Прохоров.

члены-корреспонденты АН СССР А. В. Бицадзе, Г. И. Марчук, А. А. Ляпунов, Д. В. Ширков, А. И. Ширшов, А. А. Боровков, М. И. Каргаполов, Н. Н. Яненко.

Институт математики Сибирского отделения АН СССР выполняет научные исследования в области алгебры (теория конечных групп), геометрии, математической логики, математической кибернетики, теоретической и математической физики, применения математических методов в экономических вопросах и др. Под руководством Л. В. Канторовича проводятся работы по линейному программированию и применению его к оптимальному планированию народного хозяйства. Математико-экономическим отделом выполнен ряд конкретных технико-экономических задач на основе разработанных в нем методов.

Лаборатории Института математики Сибирского отделения АН СССР разрабатывают математические темы совместно с отраслевыми институтами. Так, лаборатория задач химии работает совместно с Институтом катализа, лаборатория задач математической физики — с Институтом гидродинамики, лаборатории задач геологии и геофизики — с Институтом геологии и геофизики.

Другие институты Сибирского отделения АН СССР также проводят научно-исследовательские работы в области математики. Первое

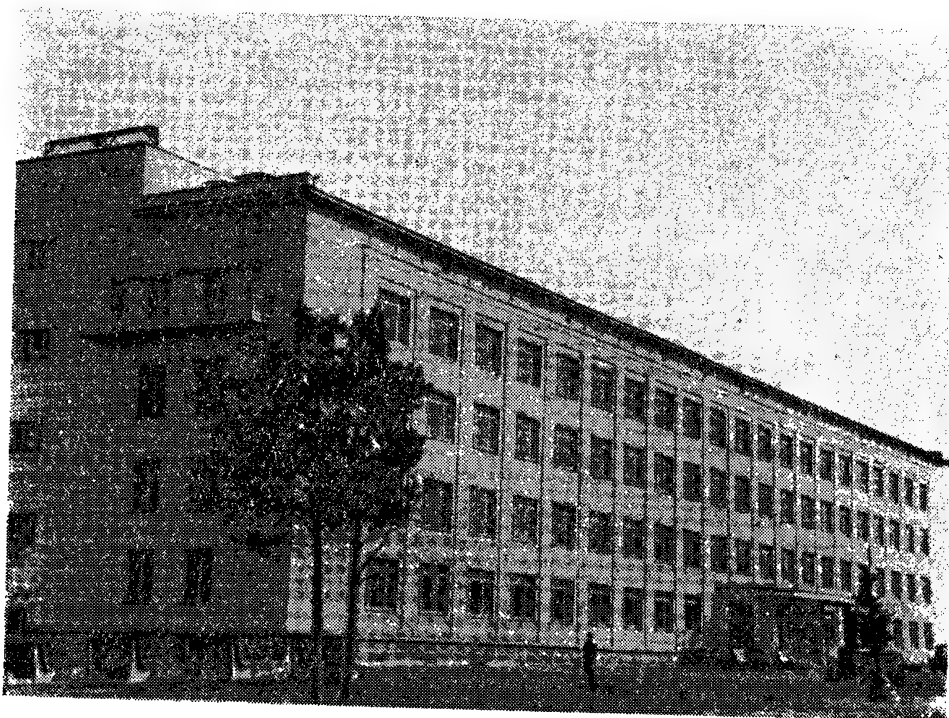
место среди них в этом отношении занимает Институт гидродинамики, в котором отделом гравитационных волн руководит М. А. Лаврентьев, теоретический отдел в течение нескольких лет до 1961 г. возглавлял И. Н. Векуа, а с 1961 г. возглавляет Л. В. Овсянников. Отдел гравитационных волн провел исследования по вопросам теории установившихся гравитационных волн на поверхности тяжелой жидкости, им решены важные задачи струйного обтекания и др. Теоретическим отделом рассмотрены некоторые новые типы краевых задач математической физики. В частности, И. Н. Векуа, вместе со своими сотрудниками И. И. Данилюком и Б. В. Боярским, предложил новый эффективный метод решения краевых задач для уравнений эллиптического типа.



М. И. Каргаполов.



А. А. Боровков.



Президиум и Институт математики Сибирского отделения Академии наук СССР.

Ряд исследований в области математики выполняется также в Институте теоретической и прикладной механики, Институте автоматизации и электрометрии.

Осенью 1959 г. в составе Сибирского отделения АН СССР был открыт Новосибирский государственный университет. Ректором его назначен академик И. Н. Векуа. Вначале в университете был всего один факультет — естественных наук. Затем появились механико-математический, физический и гуманитарный факультеты, а на факультете естественных наук остались специальности: химия, биология, геология и геофизика. Характерной особенностью университета является то, что студенты всех факультетов и специальностей получают серьезную физико-математическую подготовку, непосредственно связанную с работами соответствующих академических институтов.

Механико-математический факультет состоит из двух отделений — математики и механики. На отделении математики работают кафедры высшей математики, алгебры и математической логики, геометрии, математического анализа, теории функций, уравнений математической физики, дифференциальных уравнений и вычислительной математики.

Гуманитарный факультет Новосибирского университета имеет три отделения: экономическое, языка и историческое. На экономическом отделении создана кафедра математических расчетов в экономике и планировании, которая обеспечивает преподавание специальных математических курсов студентам, прослушавшим до этого общие математические курсы. На отделении языка есть специальность математической

лингвистики. В последние годы некоторые преподаватели исторического отделения начали развивать математические методы в исторических исследованиях.

4 ноября 1963 г. в Новосибирске было основано Сибирское математическое общество, президентом его избран А. И. Мальцев, членами Президиума — А. В. Бицадзе и Д. М. Смирнов.

Сибирское отделение АН СССР издает два журнала, в которых печатаются математические статьи: «Известия Сибирского отделения АН СССР» и «Сибирский математический журнал».

## 2

### **IV Всесоюзный математический съезд. Математика в Москве и Ленинграде**

3—12 июля 1961 г. в Ленинграде состоялся IV Всесоюзный математический съезд. В его работе приняло участие 1834 советских математика и 48 гостей из Англии, Болгарии, Венгрии, ГДР, Китая, Польши, Румынии, США, ФРГ, Франции, Чехословакии и Югославии. Самая большая группа участников была из Ленинграда, делегация из Москвы составляла 740 чел., Киева — 107, Свердловска — 71, Новосибирска — 68, Харькова — 67, Казани — 60, Минска — 52, Одессы — 43, Баку — 41, Тбилиси — 41, Ростова-на-Дону — 40, Ташкента — 39, Горького — 36, Еревана — 36, Саратова — 34, Вильнюса — 32, Воронежа — 26, Львова — 25, Днепропетровска — 22, Кипинева — 21, Риги — 21, Челябинска — 21 чел.

На съезде работали секции (в большинстве из них были также подсекции): теории чисел, алгебры, геометрии, топологии, теории функций, функционального анализа, теории вероятностей и математической статистики, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, математической физики, вычислительной математики, истории математики.

Всего на съезде было прочитано более 1400 докладов (т. е. почти в два раза больше, чем на III Математическом съезде), в том числе по теории функций — 238, обыкновенным дифференциальным уравнениям — 180, вычислительной математике — 143, геометрии — 131, функциональному анализу — 125, теории вероятностей и математической статистике — 97, дифференциальным уравнениям в частных производных — 93, алгебре — 91, топологии — 47 докладов. Эта картина, в известной мере, свидетельствует о перераспределении научных интересов математиков по отдельным отраслям науки.

В настоящее время, как и раньше, Москва является центром математической мысли Советского Союза. Механико-математический факультет Московского университета, Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР, математические отделы и кафедры в других научно-исследовательских и учебных институтах составляют самый большой математический коллектив в стране.



В определенной степени объединяющей организацией является Московское математическое общество, а также семинары по специальным направлениям, большинство из которых работает при Московском университете.

На отделении математики механико-математического факультета Московского университета работают кафедры математического анализа, высшей алгебры, высшей геометрии и топологии, дифференциальной геометрии, теории вероятностей, теории чисел, дифференциальных уравнений, теории функций и функционального анализа, математической логики и вычислительной математики. Кроме того, факультет имеет вычислительный центр. Коллектив математиков факультета — самый большой из всех университетских математических коллективов страны. В нем работают академики П. С. Александров, А. Ю. Ишлинский, А. Н. Колмогоров, П. С. Новиков, И. Г. Петровский, Л. С. Понтрягин, Л. И. Седов, А. Н. Тихонов, члены-корреспонденты АН СССР И. М. Гельфанд, А. О. Гельфонд, Л. А. Люстерник, А. А. Марков, Д. Е. Меньшов, С. П. Новиков, И. Р. Шафаревич, А. А. Самарский, академик АН УССР Б. В. Гнеденко, действительный член Академии педагогических наук СССР А. И. Маркушевич, профессора В. И. Арнольд, С. А. Гальперн, О. Н. Головин, Е. Б. Дынкин, Н. В. Ефимов, А. Г. Курош, Е. М. Ландис, Б. М. Левитан, Ю. И. Манин, О. А. Олейник, П. К. Рашевский, К. А. Рыбников, Л. А. Скорняков, Ю. М. Смирнов, Л. А. Тумаркин, П. Л. Ульянов, Б. В. Шабат, Г. Е. Шилов, М. Р. Шура-Бура, А. Б. Шидловский и др.

В университете на физическом факультете также работают математические кафедры, кафедрой математики, в частности, руководит А. Н. Тихонов, кафедрой квантовой статистики — Н. Н. Боголюбов.

Семинары Московского университета, некоторые из них насчитывают не один десяток лет работы, явились своеобразными центрами возникновения и развития математических школ.

Москва является центром советской топологической школы, беспрерывно руководимой П. С. Александровым. В этом направлении работают В. Г. Болтянский, М. Ф. Бокштейн, В. А. Ефремович, Л. В. Келдыш, А. А. Мальцев, Ю. М. Смирнов, Ю. А. Рожанская, Л. А. Тумаркин, М. М. Постников, К. А. Ситников, Л. А. Скорняков, Н. Я. Виленкин, Б. А. Пасынков, В. И. Пономарев, А. В. Архангельский, С. П. Новиков. К проблемам топологии относятся многие результаты А. Н. Колмогорова, А. Н. Тихонова, Л. С. Понтрягина и др.

Московские исследовательские направления в области геометрии представлены в трудах П. К. Рашевского, Н. В. Ефимова, С. П. Финикова, С. С. Бюшгенса, С. Д. Россинского, Б. А. Розенфельда, Я. С. Дубнова, Г. Ф. Лаптева, А. М. Васильева, Н. Ф. Четверухина. За последние годы коллектив московских геометров понес большие утраты: умерли С. С. Бюшгенс, С. П. Фиников, С. Д. Россинский, Я. С. Дубнов и др.

В области алгебры работают Б. Н. Делоне, Л. С. Понтрягин, И. Р. Шафаревич, А. И. Ширшов, А. Г. Курош, Е. Б. Дынкин, О. Н. Головин, Ю. И. Манин, Д. А. Райков и др.

Школа теории чисел имеет своих представителей не только в Московском университете и Математическом институте, но и в ряде других институтов. В этом направлении работают И. М. Виноградов, А. О. Гельфонд, Б. Н. Делоне, Н. М. Коробов, Ю. И. Манин, А. Г. Постников, А. А. Бухштаб и др.

Традиционное для московской математической школы направление теории функций действительного переменного представлено в Москве в трудах С. Н. Бернштейна, А. Н. Колмогорова, М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева, Д. Е. Меньшова, А. Я. Хинчина, Н. К. Бари, С. М. Никольского, Л. Д. Кудрявцева, П. Л. Ульянова, С. Б. Стечкина, А. Г. Витушкина и др.

Теория функций комплексного переменного исследуется в трудах А. И. Маркушевича, И. И. Пятецкого-Шапиро и др.

В области дифференциальных уравнений работают И. Г. Петровский, Л. С. Понтрягин, А. Н. Тихонов, Л. А. Люстерник, О. А. Олейник, А. Б. Васильева, М. И. Вишик, С. А. Гальперн, В. И. Арнольд и др.

Теоретической физике, различным проблемам механики и прикладным вопросам математики посвящены труды М. В. Келдыша, Н. Н. Боголюбова, Л. И. Седова, А. Ю. Ишлинского и др.

Функциональный анализ представлен работами И. М. Гельфанда, Л. А. Люстерника, Б. М. Левитана, Г. Е. Шилова и других ученых.

Математическая логика исследуется в трудах П. С. Новикова, А. А. Маркова, В. А. Успенского, С. А. Яновской и др.

Многие классические проблемы теории вероятностей развиты и решены в трудах С. Н. Бернштейна, А. Н. Колмогорова, А. Я. Хинчина. В этом же направлении ведут свои исследования Б. В. Гнеденко, А. М. Обухов, Е. Б. Дынкин, Р. Л. Добрушин и др.

Вычислительную математику представляют А. А. Дородницын, А. А. Самарский, М. Р. Шура-Бура и др.

Значительное направление в области истории математики представлено в трудах А. П. Юшкевича, К. А. Рыбникова, И. Г. Башмаковой, И. Б. Погребысского, И. К. Андропова, Л. Е. Майстрова, А. Б. Паплаускаса и др.

26 сентября 1964 г. исполнилось 100 лет со дня основания Московского математического общества. 20 октября состоялось торжественное заседание, посвященное этой дате, а 21 октября началась юбилейная научная сессия. Со вступительным докладом на торжественном заседании общества выступил П. С. Александров. Сделав краткий ретроспективный обзор деятельности общества, отметив его значение для математиков, в частности для исследований московских специалистов, он сказал следующее: «В течение десятилетий Московское математическое общество было тем местом, на котором произрастали и жили математические открытия, искания, волнения, все творческие эмоции московских математиков нескольких поколений. Московское математическое общество не было только местом, где регистрировались отдельные математические результаты, где читались популярные лекции по математике. Московское математическое общество было школой математической эстетики, математического вкуса, очень взыскательного, и школой математиче-



ской этики, научной этики, тоже очень взыскательной. И в этом, я считаю, основную роль сыграли для Московского математического общества годы его высшего расцвета: это были годы, следовавшие за Октябрьской революцией, первые одно-два десятилетия, следовавшие за ней.

Спрашивается, сохранило ли Московское математическое общество это свое положение и в настоящее время? На этот вопрос со всей честностью и искренностью нельзя, к сожалению, ответить положительно. Роль Московского математического общества в жизни математики нашей страны сейчас не та, какой она была 30 или 20 лет тому назад. Причин этому много, есть причины объективные, связанные с самим характером развития математической науки за последние десятилетия; есть причины, так сказать, и более конкретные, связанные с возникновением и развитием огромного количества математических школ, отдельных, часто очень разобщенных между собой»<sup>3</sup>.

Это разобщение между отдельными математическими школами, отмеченное П. С. Александровым, представляет собой одну из характерных черт современной математики, в которой получили большое развитие различные математические направления. Но вместе с тем дает себя чувствовать все сильнее и сильнее противоположная тенденция, обуславливающая взаимопроникновение идей и методов, причем не только между математическими науками, а зачастую и между науками, на первый взгляд далекими друг от друга.

В среде московских математиков, объединенных Московским математическим обществом, ведущую роль играют те, которые работают на кафедрах и в учреждениях Московского университета. Однако с каждым годом растет значение математических кафедр других московских высших учебных заведений, по мере повышения научной квалификации работников кафедр и все большего участия коллективов этих кафедр в научно-математической жизни страны.

С 1956 г. в Москве работает Объединенный научно-методический семинар кафедр математики московских высших технических учебных заведений, в котором участвуют также представители подмосковных втузов (например, тульских). Он возник в результате слияния секций высшей технической школы Московского математического общества, организованных в 1953 г., и городского семинара математических кафедр высших технических учебных заведений, действовавшего с 1954 г. Объединенным семинаром руководил вначале А. Б. Бермант, а после его смерти — П. А. Бессонов. Кроме методических вопросов на семинаре рассматриваются также вопросы издания научной и учебной литературы по математике, а также заслушиваются доклады на отдельные темы, относящиеся к втузовскому курсу математики.

В 1965 г. президент Московского математического общества П. С. Александров сложил свои полномочия. Новым президентом был

---

<sup>3</sup> П. С. Александров. — Вступительный доклад на торжественном заседании Московского математического общества 20 октября 1964 г. — УМЖ, 1965, т. 20, вып. 3 (133), стр. 9.

избран А. Н. Колмогоров, вице-президентами — Е. Б. Дынкин и Г. Е. Шилов, секретарем — В. М. Алексеев, членами правления — В. И. Арнольд, Н. В. Ефимов, А. Г. Курош, О. А. Олейник, А. Л. Онищак, И. И. Пятецкий-Шапиро, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, И. Р. Шафаревич, членами ревизионной комиссии — Н. Д. Айзенштадт, М. Ф. Бокштейн, С. А. Гальперн, О. Н. Головин, Г. Ф. Лаптев. П. С. Александров единогласно был избран почетным президентом Московского математического общества. В 1967 г. президентом Московского математического общества избран А. О. Гельфонд.

Развитие математики в Ленинграде в некоторой степени аналогично развитию ее в Москве. Здесь также есть академический институт — Ленинградское отделение Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (о нем говорилось выше), а также большая, мощная группа математиков механико-математического факультета университета и математических кафедр других высших учебных заведений.

В Ленинградском университете работает один из наиболее мощных в СССР математических коллективов. В него входят В. И. Смирнов, Ю. В. Линник, О. А. Ладыженская, В. А. Плисс, В. А. Залгаллер, В. А. Якубович и др. Здесь же работали И. П. Натансон (ум. 3 июля 1964 г.), Г. М. Фихтенгольц (ум. 26 июня 1959 г.). В настоящее время в Ленинградском университете работают две кафедры математической физики (механико-математического и физического факультетов), которыми руководит В. И. Смирнов, кафедры анализа и теории функций (руководитель Б. З. Вулих), алгебры и теории чисел (З. И. Борович), обыкновенных дифференциальных уравнений (В. А. Плисс), теории вероятностей (В. В. Петров), вычислительной математики (М. К. Гавурин), общей математики (Д. М. Волков). Из многих семинаров, действующих в университете, особенно большое число математиков привлекли семинар по уравнениям в частных производных и математической физике (руководитель В. И. Смирнов) и семинар по обыкновенным дифференциальным уравнениям и их приложениям (руководитель В. А. Плисс). Институт математики и механики при Ленинградском университете (директор Г. Б. Самосюс) имеет свой вычислительный центр и ведет исследования в направлении ряда прикладных вопросов.

Значительные исследования в области математики проводятся также в Ленинградском педагогическом институте. Кафедрой алгебры и геометрии в нем заведует Е. С. Ляпин. Его научные интересы сосредоточены на теории полугрупп как абстрактном учении о преобразованиях самого общего вида. Исследования в области математики проводятся также в политехническом, механическом, горном и других институтах Ленинграда.

Объединяющим центром ленинградских математиков за последние годы стало Ленинградское математическое общество, основанное в 1959 г. Президентом общества с момента его основания и до 1965 г. был Ю. В. Линник, вице-президентом — О. А. Ладыженская.

1 марта 1965 г. состоялось распорядительное собрание общества, на котором был заслушан отчет правления за два года (с 12 февраля

1963 г. по 9 марта 1965 г.). Со дня основания общества это было третье распорядительное собрание (второе состоялось 27 декабря 1960 г.). На отчетное число в обществе насчитывалось 95 членов. За истекший период проведено 24 заседания, на которых прочитано 25 докладов, в основном обзорных. В отчете отмечалось, что за это время три члена ЛМО избраны академиками (А. Д. Александров, Ю. В. Линник и Л. В. Канторович) и один — членом-корреспондентом АН СССР (Д. К. Фаддеев). На собрании было избрано новое правление общества: С. М. Лозинский (президент), Б. З. Вулих и Д. К. Фаддеев (вице-президенты), О. А. Ладыженская, Ю. В. Линник, Е. С. Ляпин, С. Г. Михлин, В. А. Рохлин, Б. А. Рымаренко и М. Ф. Широков (секретарь).

С. М. Лозинский читал лекции в Ленинградском университете с 1945 по 1960 г., с 1951 г. заведовал кафедрой математического анализа. Его научные труды посвящены конструктивной теории функций, метрической теории функций вещественного переменного и численными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Б. З. Вулих до 1957 г. работал в Военно-морской академии кораблестроения и вооружения, с 1957 по 1963 г. заведовал кафедрой математического анализа в Ленинградском педагогическом институте им. А. И. Герцена, а с 1963 г. работает на кафедре математического анализа в Ленинградском университете. Ученик Г. М. Фихтенгольца, Б. З. Вулих занимался вначале дескриптивной теорией функций, а затем его научные интересы сосредоточились в области функционального анализа.

Исследования О. А. Ладыженской относятся к теории краевых задач для уравнений в частных производных. Они представляют собой три цикла. Первый цикл — это работы, связанные с решением задачи для линейных гиперболических уравнений второго порядка; они подытожены в монографии «Смешанная задача для гиперболических уравнений» (1953 г.). Второй цикл завершен монографией «Математические вопросы динамики вязкой жидкости» (1961 г.). Основные результаты третьего цикла отражены в монографии «Линейные и квазилинейные эллиптические уравнения» (1965 г.).

С. Г. Михлин работает в Ленинградском университете. Его исследования относятся к задачам математической физики, теории уравнений эллиптического типа и теории сингулярных интегральных уравнений.

Исследования В. А. Рохлина, работавшего ранее в Коломенском педагогическом институте, посвящены топологии.

По разносторонности научных исследований в области математики и мощности соответствующих научных направлений коллектив ленинградских математиков занимает одно из первых мест в стране. В области теории чисел здесь работают Ю. В. Линник, Н. Г. Чудаков, А. И. Виноградов, А. В. Малышев, Б. Б. Венков, Д. С. Горшков, В. В. Петров, И. В. Романовский. Алгебра представлена в исследованиях Д. К. Фаддеева, Е. С. Ляпина, Б. З. Вулиха, А. Г. Пинскера. Значительное направление в области геометрии, которым руководил до переезда в Новосибирск А. Д. Александров, включает труды В. А. Залгаллера,

Ю. Ф. Борисова. В области теории дифференциальных уравнений работают В. А. Тартаковский, В. А. Плисс, В. А. Якубович, В. И. Zubов, В. П. Басов. Математическую физику представляют В. И. Смирнов, О. А. Ладыженская, С. Г. Михлин, В. М. Бабич, Г. И. Петрашень, Д. М. Волков, М. М. Смирнов. Топологией занимаются Н. А. Шанин, В. А. Рохлин. Теория функций действительного переменного ранее была представлена в трудах Г. М. Фихтенгольца, И. П. Натансона, Б. А. Рымаренко. В настоящее время в этом направлении работает С. М. Лозинский. Теория функций комплексного переменного разрабатывается В. И. Смирновым и его учениками. Внедрением математики в область экономических исследований занимался вплоть до переезда в Новосибирск Л. В. Канторович.

### **3**

#### **Математика в других научных центрах РСФСР**

Начиная с 1957 г. количество высших учебных заведений РСФСР значительно увеличилось. В 1957 г. были открыты Башкирский университет, на базе Уфимского педагогического института, Дагестанский университет (преобразованный Дагестанский педагогический институт), Кабардино-Балкарский и Мордовский университеты. В состав всех этих университетов входят физико-математические факультеты.

Организованы также новые высшие технические учебные заведения — политехнические институты: Алтайский (1959 г.), Воронежский вечерний (1958 г.), Иркутский (1960 г.), Пермский (1960 г.), Саратовский (1960 г.) и др. Кроме того, почти все институты открыли в разных городах и заводских поселках общенаучные и общетехнические факультеты, в результате чего количество математических кафедр резко увеличилось, что, в свою очередь, поставило перед математическими коллективами страны вопрос о подготовке для новых кафедр высококвалифицированного научного и педагогического пополнения. Естественно, что основную роль в этом отношении должны были сыграть старейшие и наиболее мощные математические коллективы университетов.

Казанский математический коллектив по ряду математических направлений продолжает оставаться одним из основных в РСФСР. С 1945 г. кафедрой геометрии в университете руководит А. П. Норден. Здесь работают также Б. Л. Лаптев, А. П. Широков. Кафедрой математического анализа возглавляет Б. М. Гагаев. Его исследования относятся к теории дифференциальных и интегральных уравнений.

В послевоенные годы тематика научных работ в Казанском университете расширилась: начали развиваться исследования по прямым и обратным краевым задачам, сингулярным интегральным уравнениям, функциональному анализу. Значительное развитие также получили работы по теории интегро-дифференциальных уравнений.

Математическая жизнь в Свердловске концентрируется вокруг Свердловского отделения Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР и университета. Большинство свердловских математиков объединяется Уральским математическим обществом. Оно было создано 15 ноября 1957 г. Президентом общества является П. Г. Конторович, членами правления — В. К. Иванов, В. А. Курбатов, П. В. Николаев и В. С. Чарин.

В старейшем из уральских университетов — Пермском на физико-математическом факультете работают три математические кафедры: математического анализа (руководитель С. И. Мельник), теории функций (до 1964 г. кафедрой заведовал Л. И. Волковынский), алгебры и анализа (с 1951 по 1961 г. руководил С. Н. Черников, с 1961 г. — П. И. Трофимов).

За последние годы произошли некоторые изменения на механико-математическом факультете Саратовского университета. В апреле 1957 г. при кафедре математического анализа организован вычислительный центр, а в 1959 г. на факультете организована кафедра вычислительной математики (руководитель Н. П. Купцов), в состав которой вошел и вычислительный центр. Исследования Н. П. Купцова относятся к абсолютной и равномерной сходимости ортогональных рядов, а также к области теории почти периодических функций. Кафедрой геометрии заведует В. В. Вагнер. Он читает курсы по дифференциальной геометрии и вариационному исчислению, целый ряд спецкурсов, а также руководит научным семинаром по геометрии.

Новые научные направления развернуты в Горьковском университете. В частности, начаты исследования в области топологии. По инициативе университета с 17 по 28 июня 1964 г. в Горьком был проведен семинар по гомеотопической топологии.

На механико-математическом факультете Горьковского университета работают следующие кафедры: математического анализа и дифференциальных уравнений (руководитель Н. Ф. Отроков), алгебры и геометрии (Н. М. Писарева), теории функций (А. А. Миролюбов); на факультете вычислительной математики и кибернетики — кафедры алгебры и теории алгоритмов (Ю. В. Глебский) и функционального анализа (С. Н. Слугин); на радиофакультете — кафедра общей математики (Д. А. Гудков).

Математическим отделом Научно-исследовательского радиофизического института при университете руководит А. Г. Сигалов, в математическом отделе Института прикладной математики и кибернетики работают Е. А. Андропова-Леонтович, Ю. И. Неймарк и С. И. Альбер. В Горьковском инженерно-строительном институте работает С. А. Гельфер, в институте инженерного водного транспорта — Н. Н. Баутин.

Началась исследовательская работа в области математики и в Петрозаводском университете (Карело-Финском, основан в 1940 г.). Вначале из-за нехватки кадров на математическом факультете была всего одна кафедра — математического анализа. С 1938 г. ею руководил М. К. Куренский. Его исследования относятся к области дифферен-

циальных уравнений в частных производных. Он читал лекции по математике также в некоторых ленинградских вузах. В настоящее время в университете созданы кафедры теории функций и геометрии, а также механики.

С 1959 г. в университете работает А. Г. Пинскер, перешедший из Ленинградского инженерно-экономического института. Его научные интересы сосредоточены в области алгебры. Здесь же читает лекции Л. Н. Слободетский, ранее работавший в Ленинградском педагогическом институте. Его исследования относятся к области теории функций.

В 1961 г. Петрозаводский университет начал подготовку математиков-вычислителей, в нем создан счетно-вычислительный центр.

Главным направлением математических исследований в Воронежском университете является функциональный анализ, по которому работает несколько семинаров. Большинство исследований воронежских математиков поэтому связано с функциональным анализом и его приложениями к вычислительной математике, математической физике и другим областям.

Кафедрой функционального анализа заведует (с 1952 г.) М. А. Красносельский. Он руководит городским семинаром по функциональному анализу. Семинар издает труды своих участников. В области функционального анализа ведут исследования также С. Г. Крейн, Ю. Г. Борисович и др.

Кроме основного семинара по функциональному анализу в Воронеже действуют также семинары по линейному функциональному анализу, нелинейному функциональному анализу, теории дифференциальных уравнений в частных производных, качественной теории дифференциальных уравнений, теории функционального пространства, теории банаховых пространств, теории пространств Орлича, спектроскопической теории операторов, дискретной математике и эконометрии.

Развиваются в Воронеже и другие математические направления. В области теории чисел работают К. А. Родосский, в области геометрии — В. И. Ведерников и В. А. Тихонов. Научные интересы А. В. Мартынова и Б. П. Пугачева относятся к теории вероятностей и вычислительной математике.

Механико-математический факультет Ростовского-на-Дону университета имеет в своем составе следующие кафедры: математического анализа (руководитель С. Я. Альпер), теории функций и функционального анализа (М. Г. Хапланов), дифференциальных уравнений (В. С. Рогожин), геометрии (К. К. Мокрищев), вычислительной математики (Л. А. Чикин). Кроме того, в университете есть кафедра высшей математики, которой руководит С. Е. Белозеров.

С. Я. Альпер занимается теорией приближения функций полиномами в комплексной области. М. Г. Хапланов работает в области теории аналитических функций. Он развил метод преобразований аналитического пространства, который применил впоследствии к изучению аналитических решений линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с произвольными аналитическими коэффициентами. Эти же идеи развивает Ю. Ф. Коробейник.



Г. Д. Суворов.

С 1953 по 1961 г. кафедре дифференциальных уравнений возглавлял Ф. Д. Гахов. Им было поставлено исследование краевых задач аналитических функций. С 1961 г. это направление возглавляет В. С. Рогожин. Ф. Д. Гахову принадлежат также работы по другим проблемам теории функций комплексного переменного и по теории интегральных уравнений первого рода. В. С. Рогожин рассматривал вопросы, относящиеся к однолистным решениям обратной краевой задачи.

Кафедра геометрии под руководством К. К. Мокрищева разрабатывает вопросы дифференциальной геометрии поверхностей в целом.

Исследования кафедры вычислительной математики ведутся в трех направлениях: численные методы решения прикладных задач математической физики и нелинейной механики; применение математических методов в экономике, вопросы автоматизации программирования; исследование новых материалов для элементов и узлов вычислительной техники.

Исследованиями в области истории математики руководит С. Е. Белозеров. Его научные интересы относятся к истории теории аналитических функций. Основная работа Белозерова в этой области — «Основные этапы развития общей теории аналитических функций» (1962 г.).

В Томском университете в рассматриваемый период работали Г. Д. Суворов (теория аналитических функций), Р. Н. Щербаков (дифференциальная и проективно-дифференциальная геометрия), В. С. Малаховский (дифференциальная геометрия). В Иркутском университете теорией интегро-дифференциальных уравнений занимался В. В. Васильев.

Характерным для последнего времени фактом является начало научных исследований на вновь созданных математических кафедрах. Результаты этих исследований зачастую весьма ощутимы. Так, в одном из математических центров — Иванове, в педагогическом институте работал А. И. Мальцев, вначале ассистент, затем доцент, профессор, заведующий кафедрой алгебры. В процессе исследований ему удалось создать в Иванове научную школу по алгебре, занявшую видное место в этой области математики. По уровню математической подготовки студентов Ивановский педагогический институт входит в число лучших институтов Советского Союза.

В Рязанском педагогическом институте действует семинар по качественной теории дифференциальных уравнений, являющийся филиалом семинара, которым руководил В. В. Немыцкий в Московском университете.

Семинар объединяет рязанских математиков, работающих в этой области. В 1956 г. было создано Рязанское математическое общество.

В Пензенском педагогическом институте с 1943 г. заведует кафедрой высшей математики И. П. Егоров, ученик П. А. Широкова. Его исследования относятся к теории движений обобщенных дифференциально-геометрических пространств. В этой области им создано соответствующее научное направление.

Научные исследования в области математики и в смежных с нею областях в нашей стране настолько развились, что весьма сложно своевременно уследить за результатами деятельности научно-исследовательских кафедр университетов и других высших учебных заведений, научных семинаров, научных совещаний, конференций.

#### 4

### Развитие математики в Украинской ССР

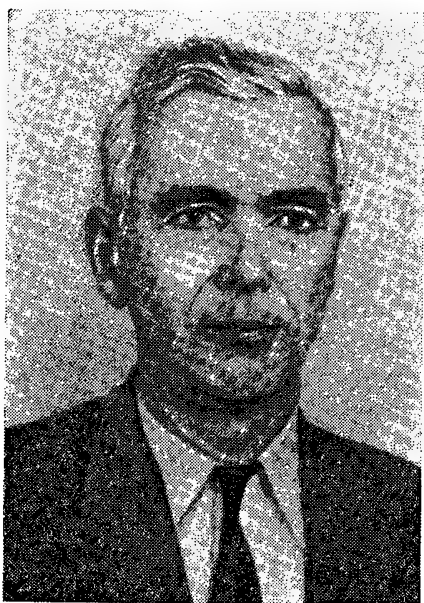
Центральное научно-исследовательское учреждение УССР — Академия наук УССР по новому уставу, утвержденному в 1963 г., получила новое право — координировать научно-исследовательские работы в масштабе республики. В связи с реорганизацией по новому уставу в академии создано девять отделений. Математики входят в отделение математики, механики и кибернетики. Академиком-секретарем этого отделения избран Ю. А. Митропольский. Кроме работавших ранее в академии академиков по специальности «математика» С. Н. Бернштейна, Н. Н. Боголюбова, Б. В. Гнеденко, А. Ю. Ишлинского, М. А. Лаврентьева, И. З. Штокало и членов-корреспондентов АН УССР А. И. Ахiezера, М. Г. Крейна, Е. Я. Ремеза, Ю. Д. Соколова, Я. Б. Лопатинского, академиками АН УССР были избраны: В. М. Глушков (1961 г.), Ю. А. Митропольский (1961 г.), О. С. Парасюк (1964 г.), А. В. Погорелов (1961 г.); членами-корреспондентами — Ю. М. Березанский (1964 г.), В. А. Марченко (1961 г.), Г. Е. Пухов (1961 г.), Н. И. Кильчевский (1961 г.), П. Ф. Фильчаков (1964 г.). Членами-корреспондентами АН УССР избраны были также специалисты по автоматике А. Г. Ивахненко (1961 г.) и А. И. Кухтенко (1964 г.), работающие в Институте кибернетики АН УССР.

Исследования в области математики проводятся в Институте математики АН УССР (директор Ю. А. Митропольский), Институте кибернетики АН УССР (директор В. М. Глушков), созданном в декабре 1962 г. на базе Вычислительного центра



О. С. Парасюк.





Я. Б. Лопатинский.

АН УССР, отделах Физико-технического института низких температур АН УССР в Харькове (основанного в 1960 г.) и математических отделах и группах других институтов АН УССР.

В январе 1966 г. в Донецке был открыт филиал Академии наук УССР. Одновременно Донецкий педагогический институт был преобразован в Донецкий университет. Тогда же были проведены довыборы академиков и членов-корреспондентов АН УССР для работы в Донецком филиале. По специальности «математика» академиком избран Я. Б. Лопатинский, членами-корреспондентами — И. И. Данилюк, Г. Д. Суворов и И. И. Гихман.

Я. Б. Лопатинский работал вначале во Львовском университете, затем в Москве. Его научные исследования относятся главным образом к теории дифференци-

альных уравнений в частных производных, интегральным уравнениям и линейной алгебре. И. И. Данилюк по окончании Львовского университета работал в Сибирском отделении АН СССР. Ему принадлежит ряд результатов по проблемам теории аналитических функций, в том числе обобщенных аналитических функций. Научные интересы Г. Д. Суворова сосредоточены на различных обобщениях теории функций. И. И. Гихман до конца 1965 г. работал в Киевском университете, причем последние годы заведовал кафедрой теории вероятностей и математической статистики. Предметом его исследований являются проблемы теории вероятностей (случайные процессы) и математической статистики.

Институт математики АН УССР работает в составе следующих отделов: математической физики и теории нелинейных колебаний (руководитель Ю. А. Митропольский), дифференциальных уравнений (Ю. Д. Соколов), алгебры (С. Н. Черников), анализа (Ю. М. Березанский), теории функций (В. К. Дзядык), прикладной математики (П. Ф. Фильчаков), современных проблем динамики (С. Ф. Фещенко), теории случайных процессов (А. В. Скороход), теории вероятностей и математической статистики (В. С. Коро-



И. И. Данилюк.

люк), механики (В. Н. Кошляков), теоретической физики (О. С. Парасюк). С 1958 г. Институтом математики руководит Ю. А. Митропольский, заместителем его с 1958 по 1966 г. был О. С. Парасюк, с 1966 г. — В. С. Королюк.

При всех отделах Института математики работают семинары республиканского значения. Основные проблемы, над которыми работает институт: нелинейная механика и математическая физика (Ю. А. Митропольский и его сотрудники О. Б. Лыкова, А. Н. Шарковский и др.), теоретическая физика (О. С. Парасюк), дифференциальные уравнения (Ю. Д. Соколов, А. Ю. Лучка), алгебра (С. Н. Черников), механика (С. Ф. Фещенко), конструктивная теория функций (В. К. Дзядык, Е. Я. Ремез, Ю. Ю. Трохимчук, П. М. Тамразов, И. Н. Митюк), функциональный анализ (Ю. М. Березанский), теория вероятностей и математическая статистика (В. С. Королюк, А. В. Скороход), математическое моделирование (П. Ф. Фильчаков). В составе института был отдел истории математики, которым руководил академик АН УССР И. З. Штокало. В январе 1963 г. создан Сектор истории техники и естествознания АН УССР, который возглавил И. З. Штокало. Отдел истории математики вошел в состав сектора. В Институте математики работают специальные семинары, он издает «Украинский математический журнал».



Ю. М. Березанский.

Институт кибернетики АН СССР образован в 1962 г. на базе Вычислительного центра АН СССР. Исследовательско-конструктивное направление в области машинной математики заложено в Киеве академиком С. А. Лебедевым, под руководством которого была создана первая в СССР универсальная цифровая вычислительная машина МЭСМ (1948—1951 гг.). В дальнейшем в Институте кибернетики была создана целая серия электронных вычислительных машин.

В Институте кибернетики АН УССР проводится научно-исследовательская работа в области всех основных направлений кибернетики и вычислительной техники. Разработана теория цифровых автоматов и самоорганизующихся систем, развиваются исследования в области экономической кибернетики, в области теории программирования, разработаны и построены новые системы управляющих и вычислительных машин, решен ряд задач при помощи цифровых и аналоговых машин. Исследования В. М. Глушкова в области кибернетики являются фундаментальным вкладом в науку. Работы А. И. Кухтенко относятся к теории автоматического регулирования, автоматического управления, теории машин и механизмов. Научные интересы А. Г. Ивахненко сосредоточены главным образом на вопросах автоматического регулиро-

вания и технической кибернетики. Г. Е. Пухов исследует в основном вопросы вычислительной техники. Ему принадлежат работы по теории аналоговых математических машин.

После академических институтов важнейшим центром математических исследований в Киеве является Киевский университет.

Кафедрой дифференциальных уравнений в университете руководит И. З. Штокало. Он продолжает свои исследования в области линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и их приложений. Ему принадлежит ряд известных результатов по проблеме устойчивости решений, а также по обобщению операционных методов на различные типы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Кафедрой вычислительной математики заведует Г. Н. Положий. Его исследования связаны с теорией обобщенных аналитических функций и применением их к решению задач математической физики. Г. Н. Положему принадлежат также работы в области прикладной математики.

Кафедрой геометрии Киевского университета до 1961 г. заведовал старейший советский математик Б. Я. Букреев, работы которого относятся к различным аспектам геометрии Лобачевского и вариационному исчислению. В настоящее время кафедрой геометрии руководит Н. И. Кованцов, работавший до этого в Запорожском педагогическом институте. Его исследования сосредоточены на вопросах неголономной дифференциальной и проективно-дифференциальной геометрии.

Кафедрой теории вероятностей и математической статистики до 1966 г. руководил И. И. Гихман. На этой же кафедре работал А. В. Скороход.

Кафедрой теории функций до 1967 г. руководил В. К. Дзядык. Его исследования относятся к теории приближения функций действительного и комплексного переменного.

На кафедре алгебры, которую возглавляет Л. А. Калужнин, ведутся исследования по теории обобщенных групп, а также в области математической логики. Здесь работает В. С. Чарин.

Университет имеет свой вычислительный центр, где проводятся исследования в области вычислительной математики и электро моделирования.

С университетом связана педагогическая деятельность Ю. А. Митропольского, В. М. Глушкова, О. С. Парасюка.

На кафедрах математики в других киевских высших учебных заведениях также проводятся научные исследования. В Киевском институте легкой промышленности работает В. П. Вельмин (алгебра, теория чисел). В педагогическом институте многих молодых математиков подготовил С. Ф. Фещенко. В инженерно-строительном институте кафедрой заведует Ю. Д. Соколов, здесь же работает Б. И. Коренблюм (теория функций, функциональный анализ). В Киевском политехническом институте две кафедры математики. Кафедрой математической физики руководит А. С. Смогоржевский, исследования которого охватывают различные разделы геометрии. Кафедрой высшей математики возглав-

ляет В. А. Зморевич (теория функций комплексного переменного). В Институте гражданского воздушного флота до 1965 г. кафедрой математики заведовал Н. И. Симонов. Ныне ее возглавляет К. Г. Валеев, исследования которого сосредоточены в области дифференциальных уравнений.

Основными центрами математических исследований в Харькове являются математические отделы Физико-технического института низких температур АН УССР и механико-математический факультет университета. Институт низких температур был создан в 1960 г. В его состав вошли следующие математические отделы: прикладной математики, функционального анализа и вычислительной математики, математической физики и геометрии. Отделом геометрии руководит А. В. Погорелов, развивающий в своих исследованиях идеи геометрии в целом. Отделом математической физики заведует В. А. Марченко. Его работы относятся к спектральной теории дифференциальных уравнений и теории функций действительного переменного. Отделом прикладной математики руководит А. Д. Мышкис, отделом функционального анализа — И. М. Глазман. К проблемам функционального анализа и теории функций относятся также исследования Н. И. Ахиезера.

Кафедрой геометрии в Харьковском университете до 1961 г. руководил А. В. Погорелов, с 1961 г. — заведует Я. П. Бланк. Здесь ведутся исследования главным образом в области теории поверхностей. В этой же области работает Д. З. Гордецкий. Кафедра алгебры и теории чисел, которой до 1961 г. руководил А. К. Сушкевич, занимается вопросами линейной алгебры. Исследования А. К. Сушкевича относятся к теории обобщенных групп, в частности квазигрупп, а также теории полугрупп (он является одним из ее творцов). В настоящее время создана кафедра алгебры и математической логики, которой руководит Ю. И. Любич. Кафедрой общей математики заведовал Г. И. Дринфельд, работы которого посвящены вопросам теории дифференциальных уравнений в частных производных, ныне ею руководит А. С. Лейбин. Кафедру теории



П. Ф. Фильчаков.

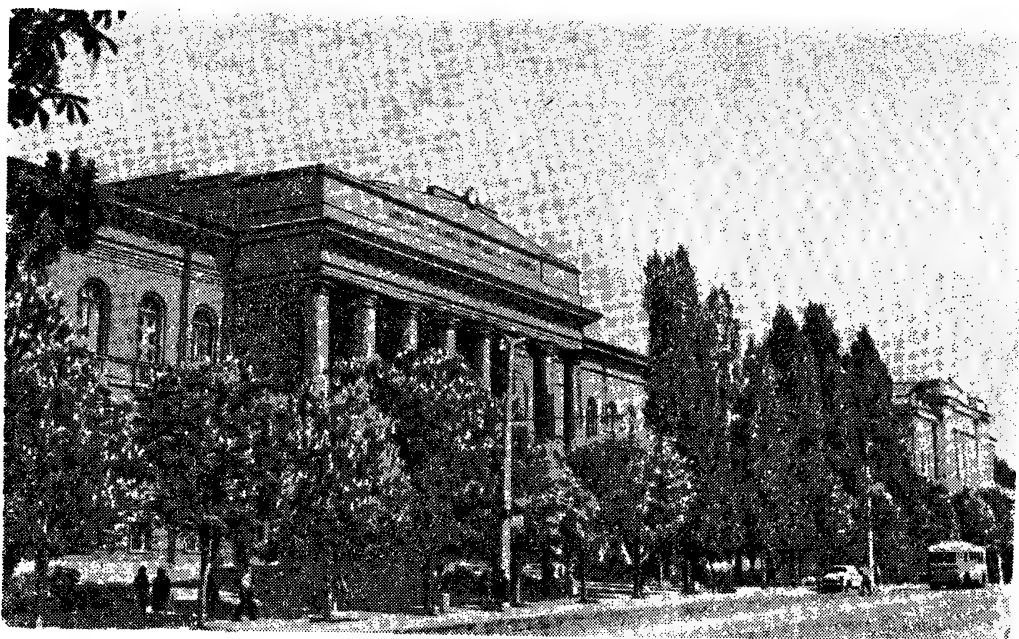


И. И. Гихман.

функций возглавляет И. В. Островский, математической физики — Н. И. Ахиезер. Диапазон исследований Н. И. Ахиезера весьма широк: теория функций, конструктивная теория функций действительного переменного, теория функций комплексного переменного, теория моментов, теория приближения функций полиномами, прикладные вопросы математики, вариационное исчисление. По ряду вопросов им опубликованы монографии и учебники. Ему принадлежат также работы по истории математики (биографические очерки, комментарии в изданиях трудов классиков отечественной науки). До 1965 г. Н. И. Ахиезер был председателем Харьковского математического общества. В настоящее время общество возглавляет А. В. Погорелов. Кафедрой математического анализа в университете руководит Б. Я. Левин.

При Харьковском университете работают семинары по теории функций (руководитель Б. Я. Левин), геометрии (А. В. Погорелов), автомате, гомологической алгебре, динамическому программированию, математическим вопросам биологии, теории устойчивости. При Физико-техническом институте низких температур АН УССР действуют общематематический семинар (И. М. Глазман), семинары по прикладной математике (В. А. Марченко), математической физике (А. Д. Мышкис).

В Одесском университете за последние годы произошли некоторые изменения. В 1960 г. физико-математический факультет разделился на два факультета: механико-математический и физический. На механико-математическом факультете было сначала четыре кафедры: математического анализа, дифференциальных уравнений, алгебры и геометрии и теоретической механики. В 1962 г. была создана кафедра вычислительной математики с вычислительным центром при ней, а в 1963 г. —



Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко.



Лауреаты Ленинской премии (справа налево) академик-секретарь Математического отделения Академии наук СССР академик Н. Н. Боголюбов, директор Института математики АН УССР академик АН УССР Ю. А. Митропольский и директор Института кибернетики АН УССР академик В. М. Глушков.

кафедра методов математической физики. В 1963 г. кафедра алгебры и геометрии разделилась на две самостоятельные кафедры.

Значительное научно-исследовательское направление в Одессе создал М. Г. Крейн, многие ученики которого работают в области функционального анализа. Крейн руководит общегородским математическим семинаром.

В Днепропетровском университете во второй половине 50-х и в 60-х годах математические исследования развивались в направлении многих проблем теории функций. В 1961 г. был организован механико-математический факультет в составе следующих кафедр: теории функций (заведующий Н. П. Корнейчук), математического анализа (М. И. Алхимов), геометрии и алгебры (Б. С. Вакарчук), вычислительной математики (В. М. Чернышенко), а также механических кафедр. В 1959 г. при Днепропетровском университете организован вычислительный центр. При университете работает несколько семинаров, имеющих общегородское значение, — по теории приближений, проблеме надежности и долговечности конструкций и др. До 1962 г. в Днепропетровском университете работал А. Ф. Тиман; в настоящее время он руководит кафедрой в Днепропетровском химико-технологическом институте.

Основными направлениями в работе механико-математического факультета Львовского университета являются теория дифференциальных уравнений, теория функций и теория вероятностей. Кафедрой теории дифференциальных уравнений до 1963 г. руководил Я. Б. Лопатинский. В области теории дифференциальных уравнений работает



также В. Я. Скоробогатько. Теорией функций действительного переменного занимался М. О. Зарицкий (ум. в 1961 г.). В области теории функций работает А. А. Гольдберг, конструктивной теории функций — И. Г. Соколов и его ученики. И. Г. Соколов руководит общегородским семинаром. Научные интересы А. С. Кованько сосредоточены на вопросах, связанных с обобщениями почти периодических функций. История математики представлена во Львове в трудах Н. А. Чайковского, который занимался также исследованиями в области алгебры.

Исследовательская работа в области математики ведется также на кафедре математики Львовского политехнического института (Т. Я. Загорский, В. Э. Лянце, П. С. Казимирский, И. М. Ковальчук). В Черновицком и Ужгородском университетах также проводятся исследования в области математики, в первом — в области дифференциальных уравнений и теории функций (М. К. Фаге, С. Д. Эйдельман), во втором — по теории представлений групп (С. Д. Берман).

## 5

### Математические исследования в Белорусской ССР

Научно-исследовательская работа в области математики в Белоруссии проводится в Институте математики АН БССР (до февраля 1965 г. — Институт математики и вычислительной техники АН БССР), Белорусском университете, а также на математических кафедрах многих высших учебных заведений.

В Институте математики АН БССР (директор Н. П. Еругин) ведутся научные исследования в области дифференциальных уравнений (Н. П. Еругин), методов вычислительной техники (В. И. Крылов), алгебры (Д. А. Супруненко), математической физики (Е. А. Иванов) и в некоторых других направлениях.

Гомельское отделение Института математики АН БССР возглавляет С. А. Чунихин. Научные исследования в этом отделении проводятся в основном по теории групп.

Сотрудники Института математики АН БССР работают также в Белорусском университете. За 10 последних лет в университете подготовлены кадры молодых математиков, что дало возможность значительно повысить здесь уровень педагогической и научно-исследовательской работы в области математики. Н. П. Еругин создал в Минске весьма сильное направление в области дифференциальных уравнений. При руководимом им институте издается журнал общесоюзного значения «Дифференциальные уравнения».

В Белорусском университете работают следующие математические кафедры: анализа (с 1964 г. ею руководит Ф. Д. Гахов), дифференциальных уравнений (Н. П. Еругин), вычислительной математики (В. И. Крылов), геометрии (Л. К. Тутаев), математики физического факультета (А. Х. Турецкий) и др.

Все наиболее существенные исследования белорусских математиков относятся к трем направлениям: дифференциальным уравнениям, обыкновенным и в частных производных, алгебре, приближенным методам. Кроме того, в 1961 г. Ф. Д. Гахов и его ученики начали развивать исследования в области теории функций комплексного переменного.

В области дифференциальных уравнений в Институте математики АН БССР работают А. И. Яблонский (аналитическая теория, качественная теория), Е. А. Иванов (теория дифракций), Е. А. Барбашин (обыкновенные уравнения, уравнения в частных производных), Э. И. Грудо (аналитическая теория). В университете это же направление развивают Ю. С. Богданов (обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости, качественная теория) и Н. А. Лукашевич (аналитическая и качественная теория, теория устойчивости). В Радиотехническом институте АН БССР вопросами теории дифференциальных уравнений занимался Л. А. Черкас.



Е. А. Барбашин

По проблемам алгебры исследования ведутся в Институте математики АН БССР (Д. А. Супруненко, В. Г. Спринджук), его Гомельском отделении (С. А. Чунихин) и Белорусском университете (В. П. Платонов).

В других областях математики в Белоруссии работают А. Х. Турецкий (теория приближения функций), Ф. И. Шмидов (теория функций вещественной переменной) и другие ученые.

5 июля 1966 г. на сессии АН БССР были проведены выборы действительных членов Академии наук. По математике академиками избраны С. А. Чунихин, Д. А. Супруненко, Е. А. Барбашин и Ф. Д. Гахов, по теоретической физике — Ф. И. Федоров.

## 6

### Исследования в области математики в Прибалтийских республиках

В Литве математические исследования сосредоточены в Вильнюсе и Каунасе. В Вильнюсском университете работают четыре математические кафедры: теории чисел и теории вероятностей (заведующий Й. Кубилюс), геометрии (П. Катилюс), вычислительной математики (П. Голоквочюс) и математического анализа (З. Жемайтис, с 1965 г. — В. Паулаускас). В Вильнюсском педагогическом институте — кафедра геометрии и математического анали-



за (В. Близникас) и кафедра элементарной математики и геометрии (П. Сурвила). В Каунасском политехническом институте две математические кафедры: высшей математики (Й. Матулионис) и прикладной математики (А. Бараускас). Математические кафедры есть также в Литовской сельскохозяйственной академии и Шауляйском педагогическом институте.

В состав Института физики и математики АН ЛитССР входит три сектора математики: теории вероятностей (руководитель В. Статулявичюс), вычислительной математики (Э. Вилкас) и математической логики и программирования (В. Матулис). Исследовательская работа в области математики проводится по теории чисел (в том числе вероятностной теории чисел), теории вероятностей и математической статистике, геометрии, топологии, теории функций, дифференциальным уравнениям, математической логике, истории математики. В Вильнюсе работает городской семинар по теории чисел и теории вероятностей (руководитель Й. Кубилиус), а также семинары по теории функций (А. Нафталевич), геометрии (К. Гринцявичюс), математической логике (В. Матулис), исследованию операций (Э. Вилкас) и др.

В республике регулярно проводятся совещания литовских математиков. Такие совещания созывались в 1958, 1960, 1963, 1964, 1965 и 1966 гг. С 1961 г. издается «Литовский математический сборник» (ответственный редактор П. Катилюс), в котором публикуются оригинальные работы литовских математиков и близкие к ним по тематике статьи других советских математиков.

В 1962 г. основано Литовское математическое общество. В состав его президиума входят академик АН ЛитССР (с 1962 г.) Й. Кубилиус (председатель), П. Катилюс, К. Гринцявичюс, Э. Жемайтис, В. Лютикас, Й. Матулионис, В. Статулявичюс.

В Академии наук Латвийской ССР математические исследования сосредоточены в Институте электроники и вычислительной техники (создан в 1961 г.) и Институте физики, где с 1962 г. работает сектор математической физики, которым руководит Л. Э. Рейзинь. В других математических направлениях исследования ведутся в Латвийском университете. В вычислительном центре университета, организованном в 1959 г., исследования связаны с развитием вычислительных методов и созданием вычислительных устройств. Возглавляет вычислительный центр Э. И. Аринь. В университете три математические кафедры: общей математики, математического анализа, алгебры и геометрии. Последняя создана в 1965 г. (руководитель В. К. Детловс). Математические кафедры есть также в других высших учебных заведениях Латвии: Рижском институте инженеров гражданского воздушного флота, Рижском политехническом институте, Латвийской сельскохозяйственной академии, Даугавпилском и Лиепайском педагогических институтах.

Исследовательская работа в области математики проводится в следующих направлениях: теория чисел, алгебра и математическая логика, геометрия, теория функций, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, функциональный анализ,

вычислительная математика, история математики. С 1960 г., в связи с переездом в Ригу Б. И. Плоткина, активизировалась работа в области абстрактной алгебры. Различным вопросам асимптотического представления функций посвящены исследования Э. Я. Риекстыньша и его учеников. В области обыкновенных дифференциальных уравнений работают Л. Э. Рейзинь, Ю. А. Клоков, А. Я. Лиепинь. Теорией чисел занимается Э. К. Фогелс. С 1961 г. в Риге работает Л. И. Рубинштейн. Его исследования (а также его учеников) связаны с теорией дифференциальных уравнений в частных производных (уравнения параболического типа).

Развиваются в Латвии и исследования по истории математики. Изданы избранные труды П. Г. Боля со вступительной статьей А. Д. Мышкиса и И. М. Рабиновича. Памяти П. Г. Боля были посвящены чтения, проведенные в Риге в октябре 1965 г. Астрофизической лабораторией АН ЛатССР, которой руководит Я. Я. Икауниек. В чтениях приняли участие многие математики, они явились своеобразным отчетом математиков Прибалтики о своей работе.

С осени 1961 г. в Риге действуют постоянный общегородской математический семинар, на котором читаются обзорные доклады, дается информация о работе в различных направлениях, а также об участии в математических конференциях и совещаниях, и специальные семинары: по алгебре (руководитель Б. И. Плоткин), асимптотическим разложениям (Э. Я. Риекстыньш), дифференциальным уравнениям (Л. Э. Рейзинь), конструктивной математике и математической логике (А. А. Лоренц). Несколько семинаров работает также в вычислительном центре Латвийского университета.

Интенсивная работа в области математики проводится в Эстонской ССР. Тартуский (Дерптский, Юрьевский) университет имеет определенные научные традиции в математических исследованиях.

В Академии наук Эстонской ССР исследования по проблемам математики сосредоточены в Институте кибернетики, созданном в Таллине в 1960 г. В институте работает вычислительный центр, которым руководит И. Ф. Петерсон. В состав Академии наук входят два математика: академик АН ЭстССР А. К. Хумал и член-корреспондент АН ЭстССР Г. Ф. Кангро (избран 25 января 1961 г.). Научные исследования в области математики ведутся также на кафедрах математики Таллинского политехнического института и Эстонской сельскохозяйственной академии.

В Тартуском университете четыре математические кафедры. Кафедрой математического анализа с 1959 г. руководит Г. Кангро (принявший ее от Х. Яаксона). Направление его научных исследований — теория суммируемости рядов. Кафедрой геометрии с 1959 по 1962 г. руководил Ю. Каазик, ученик Г. Кангро. Он разрабатывает вопросы приближенных методов. В 1962 г. создана новая кафедра — вычислительной математики, которую возглавил Ю. Каазик. Кафедра геометрии преобразована в кафедру алгебры и геометрии и ее руководителем избран Ю. Г. Лумисте, занимающийся дифференциальной геометрией и историей математики. В 1959 г. при Тартуском университете был



А. К. Хумал.

создан вычислительный центр, оборудованный новейшими вычислительными электронными машинами. Руководит им Ю. Я. Каазик.

С конца 1963 г. Тартуский университет издает журнал «Математика и современность» на эстонском языке. В этом популярном журнале публикуются статьи по вопросам преподавания, истории и практическим применениям современной математики.

Кафедра математики Таллинского политехнического института ведет научно-исследовательскую работу в направлениях теории дифференциальных уравнений в частных производных, функционального анализа и прикладных разделов математики. До 1966 г. руководил кафедрой А. Сярев, в настоящее время ею заведует А. К. Хумал. Несколько лет А. К. Хумал

был вице-президентом Академии наук ЭстССР. Исследования его относятся к прикладной математике.

## 7

### Математика в Грузинской ССР

К началу 1967 г. в Академии наук ГрССР было шесть академиков-математиков АН ГрССР — академик И. Н. Векуа, Н. П. Векуа (с 1960 г.), В. Д. Купрадзе, Ш. Е. Микеладзе (с 1960 г.), академик Н. И. Мухелишвили, Г. С. Чогошвили (с 1960 г.) и один член-корреспондент — Л. П. Гокиели (с 1961 г.).

Институтом им. А. М. Размадзе руководит президент АН ГрузССР Н. И. Мухелишвили. Заместителем его является Г. Ф. Манджавидзе. Институт состоит из шести отделов. Отделом алгебры и геометрии руководит Г. С. Чогошвили. Отделом теории функций и функционального анализа — Б. В. Хведелидзе, отделом уравнений математической физики — Н. П. Векуа, отделом вычислительной математики — Ш. Е. Микеладзе. Сектор механики, который возглавляет И. Н. Векуа, состоит из двух отделов: теории упругости (А. И. Каландия) и прикладных задач механики сплошной среды (М. Ш. Микеладзе). Вычислительным центром АН ГрССР руководит Д. А. Квеселава.

В Тбилисском университете (в 1966 г. его ректором снова стал И. Н. Векуа) в связи с выделением механико-математического факультета увеличилось число математических кафедр. В настоящее время в университете работает девять математических кафедр: математического анализа (руководитель А. К. Харадзе), алгебры и геометрии (Г. С. Чогошвили), дифференциальных и интегральных уравнений

(В. Д. Купрадзе), теории функций вещественного переменного (В. Г. Челидзе), вычислительной математики (М. Ш. Микеладзе), механики сплошной среды (Н. И. Мусхелишвили), теоретической механики (Н. П. Векуа), общей математики (Л. П. Гокиели), математики для физиков (Э. С. Цитладзе), математики для экономистов (П. Г. Когония), математики для кибернетиков (И. Н. Векуа). Факультет имеет проблемную лабораторию прикладной математики, которой руководит И. Н. Векуа.

Классическими направлениями математических исследований в Грузии являются теория сингулярных интегральных уравнений, граничные задачи теории аналитических функций и их приложения. Однако уже в 40—50-х годах тематика математических исследований расширилась, и в настоящее время трудно указать направление, которое в той или иной форме не было бы представлено в Грузии. Так, в области теории чисел работает Г. А. Ломадзе, теории множеств — Ш. С. Пхакадзе, уравнениями математической физики занимаются Д. З. Авизашвили, И. Н. Карцивадзе, С. Х. Шаташвили, Е. И. Оболташвили, по проблемам теории функций ведут исследования Б. В. Хведелидзе, Д. А. Квеселава, А. Г. Джваршейшвили, Ф. И. Харпиладзе, Г. Я. Хажалия. Теория дифференциальных уравнений представлена в работах П. К. Зерагии, А. И. Каландии, интегральными уравнениями занимаются Т. Г. Гегелия, Г. Ф. Манджавидзе. Вычислительная математика является предметом исследований М. А. Алексидзе, теория вероятностей — Г. М. Манин.

В области истории математики работают Д. Г. Цхакая, Н. Ф. Ломджария (древнегрузинская математика), Г. Ф. Манджавидзе, Л. Г. Магнарадзе, Г. С. Чогошвили (история советской математики).

Коллективы математиков образовались также в технических и педагогических высших учебных заведениях. В политехническом институте несколько лет заведовал кафедрой математики А. К. Рухадзе. В настоящее время кафедрами (две) математики руководят Д. З. Авизашвили и Б. В. Хведелидзе.

Многие математические направления развиваются в семи грузинских педагогических институтах (Тбилиси, Кутаиси, Батуми, Сухуми, Телави, Цхинвали, Гори). Здесь проводятся исследования в области геометрии (А. А. Берадзе, В. Г. Цихистави, Н. Г. Габададзе), топологии (Г. Е. Хухуниашвили, Г. А. Киртадзе), алгебры (Ш. С. Кемхадзе), теории функций (Г. Я. Хажалия, Ш. С. Гулуа, Т. Г. Цхадаия, Я. Г. Мецхваришвили), теории вероятностей (Д. Р. Вашакидзе, А. К. Баркалая).

Многие работы грузинских математиков изданы в центральных советских издательствах (монографии Н. И. Мусхелишвили, И. Н. Векуа, Н. П. Векуа, В. Д. Купрадзе, Ш. Е. Микеладзе). Вместе с тем непрерывно увеличивается количество математических работ на грузинском языке. Оригинальные руководства для высшей школы опубликовали А. К. Харадзе, Л. П. Гокиели, Ш. Е. Микеладзе. Неоднократно переиздавался учебник по математическому анализу (в двух частях) А. К. Харадзе, В. Г. Челидзе, Б. В. Хведелидзе и И. Н. Кацивадзе.

Грузинские математики проводят совещания по отдельным математическим направлениям. Характерно, что на Международном конгрессе математиков в Москве грузинская советская математика была представлена почти во всех секциях.

## 8

### Математика в Азербайджанской ССР

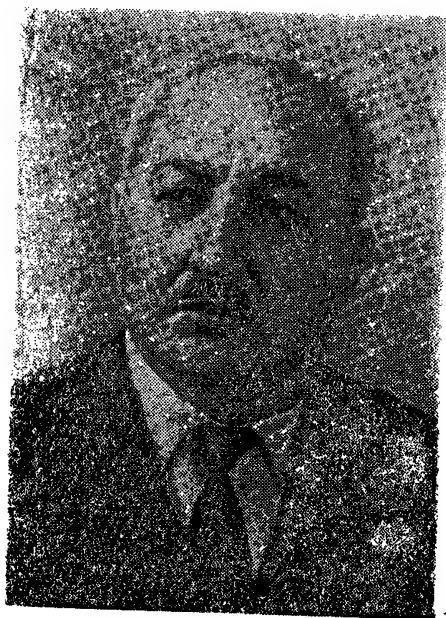
Научно-исследовательская работа в области математики в Азербайджанской ССР в настоящее время проводится в учреждениях Академии наук АзССР — Институте математики и механики, Вычислительном центре, а также на математических кафедрах Азербайджанского университета, Азербайджанского педагогического института и других высших учебных заведений. В Академии наук АзССР математику представляют академик АН АзССР З. И. Халилов (президент Академии наук) и члены-корреспонденты А. И. Гусейнов (с 1962 г.), М. А. Джавадов (с 1962 г.), И. И. Ибрагимов (с 1959 г.).

Основными направлениями математических исследований в Азербайджане являются теория дифференциальных уравнений, теория интегральных уравнений, функциональный анализ, теория функций и геометрия.

В области дифференциальных уравнений ведут исследования З. И. Халилов и его ученики. З. И. Халилов получил ряд результатов по теории общих краевых задач для систем линейных полигармонических уравнений и теории интегральных уравнений. По функциональному анализу он исследовал операторные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. В последние годы им рассмотрены задачи оптимального управления в гильбертовом и банаховом пространствах.

Теорией нелинейных интегральных уравнений занимаются А. И. Гусейнов и К. Т. Ахмедов. Вопросы разрешимости задачи Коши для некоторых видов уравнений исследовали Б. Н. Панайоти и С. Я. Якубов. Некоторые проблемы конструктивной теории функций представлены в работах И. И. Ибрагимова. В круг научных интересов М. Л. Расулова входят вопросы теории смешанных задач. Нелинейными интегральными уравнениями и функциональным анализом занимается Я. Д. Мамедов.

Исследования в области геометрии в Азербайджанской ССР ведутся в направлениях проблемы геометрий над различ-



А. И. Гусейнов.

ными алгебрами и их применений к вещественным геометриям. Геометрическими исследованиями занимаются М. А. Джавадов и его ученики.

В последнее время в Азербайджане получила развитие вычислительная математика с применением вычислительной техники.

## 9

### Математика в Армянской ССР

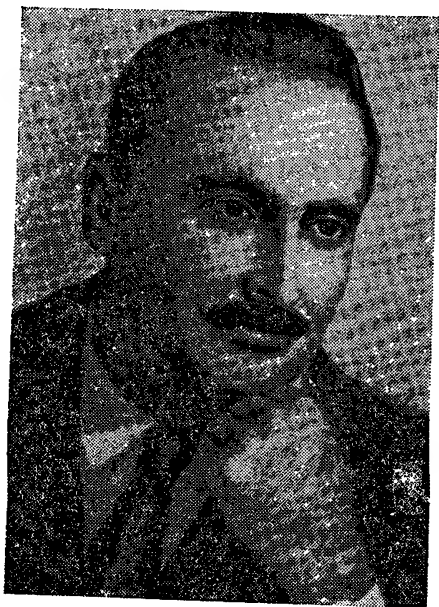
Математики Армянской ССР разрабатывают многие вопросы теории функций комплексного переменного, теории функций действительного переменного, теории дифференциальных уравнений, в частности в области спектральной теории дифференциальных уравнений, общей теории функций, теории целых и мероморфных функций, тригонометрических рядов, теории интегральных представлений и преобразований.

Институт математики и механики АН АрмССР работает в настоящее время под руководством М. М. Джрбашяна. Он состоит из четырех секторов, в том числе двух математических — теории функций (заведующий М. М. Джрбашян) и дифференциальных уравнений и функционального анализа (Р. А. Александрян). Исследованиям по теории приближений функций посвящены работы А. Л. Шагиняна, М. М. Джрбашяна, С. Н. Мергеляна и некоторых молодых ученых. В 1960 г. А. Л. Шагинян опубликовал на армянском языке монографию «Теория приближений в комплексной области». Ему принадлежат также труды по вопросам граничных свойств аналитических функций и их свойств единственности. Цикл исследований в области общей теории функций, начатый М. М. Джрбашяном в 1950 г., завершен его монографией «Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области», опубликованной в 1966 г. Им получены важные результаты в классических областях, связанных с именами Планшереля, Винера и Пэли, Р. Неванлинны и др.

В теории ортогональных рядов ряд результатов принадлежит А. А. Талалянцу. Талалян окончил в 1955 г. аспирантуру под руководством Д. Е. Меньшова в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР. В 1955 г. он защитил докторскую диссертацию, в 1965 г. избран членом-корреспондентом АН АрмССР.

Г. В. Бадалян получил при помощи аппарата факториальных рядов аналог ряда Тэйлора, позволяющий единым образом представить классы квазианалитических функций.

В Армении продолжают исследования и в других областях математики. Так, в области теории вероятности работают Г. А. Амбарцумян и С. Х. Туманян. Новый подход к спектральной теории операторов в гильбертовых пространствах разработал Р. А. Александрян. В 1962 г. он защитил докторскую диссертацию, а в 1965 г. был избран членом-корреспондентом АН АрмССР. Р. М. Мартиросян (заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Ереванского университета)



Р. А. Александрян.

исследует поведение спектра некоторых дифференциальных операторов при определенных возмущениях.

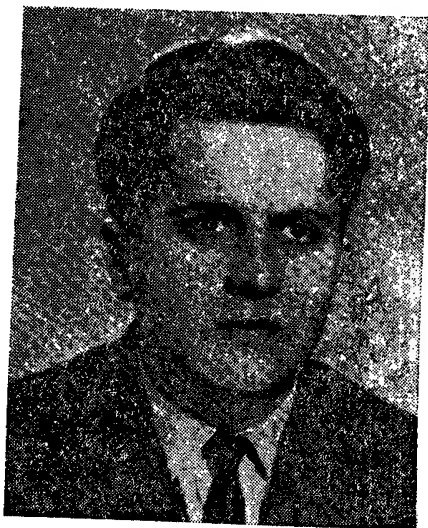
Начиная с 1937 г. армянские математики успешно проводят большую работу по подготовке научных кадров в республике. Ученики А. Л. Шагиняна — Э. Кегелян, М. М. Джрбашяна — Н. У. Аракелян, А. Б. Нересян, С. А. Акопян, А. А. Талаляна — Ф. Арутюнян работают в областях теории приближения, теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, интегральных преобразований, ортогональных рядов, а также над другими различными вопросами современной математики. В частности, Н. У. Аракелян получил завершающий результат по приближению целыми функциями на произвольных множествах.

В 1956 г. в Институте математики и механики АН АрмССР создана лаборатория вычислительной техники и разработана первая вычислительная машина М-3. В 1957 г. при Академии наук АрмССР создан Вычислительный центр, развившийся в настоящее время в большой институт. Здесь разрабатываются направления, связанные с современной вычислительной техникой: автоматический перевод научно-технической литературы, применение математических машин в экономике, диагностике заболеваний и пр. К теории программирования относится работа Т. М. Тер-Микаэляна. Совместно с Б. М. Каганом им написана монография «Решение инженерных задач на автоматических цифровых вычислительных машинах» (опубликована в 1958 г.). Конструктивному направлению в математике посвящены работы И. Д. Заславского.

В 1957 г. создан Научно-исследовательский институт математических машин с опытным заводом. Большую роль в организации и постановке работы в институте математических машин сыграл С. Н. Мергелян.

К прикладной математике относятся работы академика АН АрмССР Н. Х. Арутюняна, Б. Л. Абрамяна и других ученых.

Исследования в области истории математики проводятся в Секторе истории естественных наук АН АрмССР под руководством Г. Б. Петросяна.



А. А. Талалян.

## Математика в Среднеазиатских республиках и в Казахской ССР

Математические исследования в Узбекистане сконцентрированы главным образом в научно-исследовательских и учебных институтах Ташкента и Самарканда. Центрами развития математики в Академии наук УзССР являются Институт математики им. В. И. Романовского и Институт механики с вычислительным центром. Из высших учебных заведений, как отмечалось выше, особое значение для развития математики имеют Ташкентский университет им. В. И. Ленина (б. Среднеазиатский) и Самаркандский университет им. А. Навои (б. Узбекский).

Математику и механику в Академии наук УзССР представляют 6 академиков АН УзССР — Т. Н. Кары-Ниязов, Х. А. Рахматуллин, Т. А. Сарымсаков, М. Г. Уразбаев, В. К. Кабулов и С. Х. Сираждинов, а также два члена-корреспондента АН УзССР — И. С. Аржаных (с 1960 г.) и И. С. Куклес (с 1960 г.). Х. А. Рахматуллин работает на механико-математическом факультете Московского университета. Т. Н. Кары-Ниязов, научные интересы которого сосредоточены на вопросах истории науки, заведует кафедрой высшей математики Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства. С. Х. Сираждинов руководит Институтом математики им. В. И. Романовского, В. К. Кабулов — директор Института механики и вычислительного центра АН УзССР, И. С. Куклес — профессор Самаркандского университета.

Основными направлениями математических исследований в Узбекистане являются проблемы теории вероятностей и математической статистики. Их развивают ученики В. И. Романовского Т. А. Сарымсаков и С. Х. Сираждинов. Работы В. К. Кабулова относятся к прикладной математике. И. С. Аржаных занимается исследованиями задач математической физики и прикладной математики. Научные интересы И. С. Куклеса сосредоточены на вопросах математической физики.

В последние годы Т. А. Сарымсаков совместно с В. Г. Болтянским (Институт математики АН СССР) и М. Я. Антоновским (Ташкентский политехнический институт) выполнил исследования по полуупорядоченным топологическим кольцам, алгебрам Буля и их приложениям к общей топологии и эргодической теории. С. Х. Сираждинов, С. В. Нагаев и другие ученые ведут исследования по предельным теоремам теории вероятностей для независимых и зависимых слагаемых. Прикладными вопросами математической статистики занимаются М. К. Камалов, С. Х. Сираждинов, М. И. Эндельман. В связи с организацией вычислительного центра при Институте механики АН УзССР определенное развитие получили исследования в области вычислительной математики и техники.

Исследования в области математики в Узбекистане проводятся также в Самарканде и Фергане.





С. Х. Сираждинов.

Математика в Казахстане развивается в основном в Секторе математики и механики АН КазССР и академической Лаборатории машинной и вычислительной техники. Из высших учебных заведений математическими исследованиями выделяются математические кафедры Казахского университета.

В Академии наук КазССР работают четыре академика-математика — О. А. Жаутыков (с 1962 г.), М. В. Пентковский (с 1958 г.), К. П. Персидский, А. Д. Тайманов (с 1962 г.) и один член-корреспондент АН КазССР — Е. И. Ким.

О. А. Жаутыков заведует Сектором математики и механики. Как и его учитель К. П. Персидский, он исследует вопросы устойчивости и неустойчивости движения по Ляпунову — Четаеву. А. Д. Тайманов работает в области теории функций. Исследования Е. И. Кима относятся

к теории сингулярных интегральных уравнений.

С Казахским университетом связаны имена В. Х. Харасахала и Ф. Д. Крамара. Научные исследования В. Х. Харасахала относятся к вопросам устойчивости решений дифференциальных уравнений. Его докторская диссертация посвящена рассмотрению решений дифференциальных уравнений с почти периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Ф. Д. Крамар занимается историей математики, главным образом историей векторного и тензорного исчисления.

Основными центрами математических исследований в Киргизии являются Институт физики и математики Академии наук КиргССР и Киргизский университет. В 1960 г. членом-корреспондентом Академии наук КиргССР избран Я. В. Быков. Под его руководством велись исследования в основном в направлении изучения общей теории интегро-дифференциальных уравнений. Эти работы были начаты в 1959 г. В 1960 г. в составе Академии наук КиргССР создан Институт физики и математики, в котором исследования в области интегро-дифференциальных уравнений продолжаются и применяются к решению прикладных вопросов. Кроме того, здесь изучаются вопросы



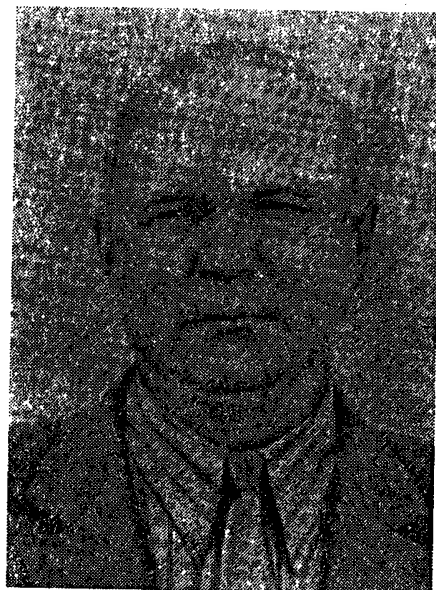
В. К. Кабулов.

программирования задач механики, проблемы теории вероятностей и математической статистики, в их применении к разным практическим задачам физики, автоматики и экономики, а также теоретические и практические вопросы вычислительной математики.

В Таджикистане математика развивается в Отделе физики и математики Академии наук Таджикской ССР и на кафедрах Таджикского университета. В Отделе физики и математики Л. Г. Михайлов занимается исследованиями в области интегральных уравнений и их приложений к решениям задач математической физики.

Научно-исследовательская работа по математике в Таджикском университете ведется на четырех кафедрах: математического анализа, прикладной и вычислительной математики, дифференциальных уравнений и методики преподавания математики и физики. На кафедре математического анализа, которой руководит М. А. Субханкулов, исследуются проблема «Тауберovy теоремы с остаточным членом и их применение», имеющая приложения в задачах теории вероятностей и математической статистики, а также алгебраическая теория чисел (Г. Б. Бабаев). Научная работа кафедры дифференциальных уравнений связана с проблемой «Теория полуупорядоченных пространств и ее применение», а также с отдельными задачами прикладной математики. На кафедре вычислительной математики исследования сосредоточены в направлении применения математики к задачам народного хозяйства, работает вычислительная лаборатория. На кафедре методики преподавания математики и физики ведутся исследования по вопросам истории математической физики в XIX—XX вв. (В. И. Антропова) и истории развития математики в Средней Азии.

В 1962 г. создан Сектор математики и механики в Академии наук Туркменской ССР. В этом секторе сосредоточены научные работы по проблемам математики и механики. Кроме того, математические исследования ведутся на кафедрах Туркменского университета, политехнического института и других вузов республики.



И. С. Аржаных.



А. Д. Тайманов.

Одним из первых математиков в Туркмении был М. Е. Шилов, заведовавший кафедрой высшей математики в Туркменском педагогическом институте, преобразованном затем в университет. В университете М. Е. Шилов также заведовал кафедрой и несколько лет был деканом физико-математического факультета.

В настоящее время исследования в области математики ведут А. М. Ахундов, ректор политехнического института (дифференциальные уравнения в частных производных), А. А. Халилов, заведующий кафедрой математического анализа Туркменского университета (история математики), М. М. Мурадов, заведующий кафедрой алгебры университета, и др. Изданы первые учебники по математике на туркменском языке: «Основные понятия математического анализа» М. Моллакова (1960 г.) и «Задачник по интегральным уравнениям» А. М. Ахундова (1961 г.).

## 11

### Математика в Молдавской ССР

Последней по времени создания из республиканских академий является Академия наук Молдавской ССР (1961 г.). В составе Отделения физико-технических и математических наук академии работает Институт математики с вычислительным центром (до 1964 г. — Институт физики и математики). Институт состоит из шести отделов: алгебры и математической логики, функционального анализа и приближенных методов, дифференциальных уравнений и методов вычислений, математических методов теоретической физики, прикладной математики, энергетической кибернетики и двух лабораторий — программирования и эксплуатации электронных вычислительных машин. Возглавляет его академик АН МССР В. А. Андрунакиевич.

Кроме Института математики в исследовательской работе в области математики принимают участие также сотрудники математических кафедр Кишиневского университета, Кишиневского сельскохозяйственного, Кишиневского политехнического, Тираспольского и Бельцкого педагогических институтов.

Исследованиями по алгебре руководит В. А. Андрунакиевич, ученик А. Г. Куроша. Его работы относятся к теории колец. Теорией квазигрупп занимается В. Д. Белоусов. С 1961 г. при Институте математики действует семинар по алгебре, которым руководит В. А. Андрунакиевич.

В области качественной теории дифференциальных уравнений исследования в Молдавии были начаты в 1960 г., на кафедре математического анализа Кишиневского университета, под руководством К. С. Сибирского. В настоящее время при Институте математики АН МССР в этом направлении работает семинар, имеющий тесные научные связи с Московским семинаром, которым руководил В. В. Немыцкий. С 1959 г. при Институте математики действует также семинар по функциональному анализу.

Исследования по геометрии, в направлении математических вопросов кристаллографии, проводятся в Кишиневском университете. С 1960 г. здесь функционирует семинар под руководством А. М. Заморзаева. На семинаре ставятся также доклады по проблемам абстрактной и комбинаторной топологии.

Кроме названной тематики в работах математиков Молдавской ССР отражены исследования по приближенным методам, вычислительной технике, применению математических методов в экономике, прикладным вопросам математики и механики, методике и истории математики.

В 1958 г. в Кишиневе основано Математическое общество Молдавской ССР, работающее в двух секциях — средней и высшей школы.

## 12

### Математические совещания, конференции, съезды

Постепенно, по мере развития математических исследований и распространения их вширь и вглубь, необходимость в согласовании и координации усилий отдельных ученых возрастала. Сначала вопрос такой связи был рассмотрен на всесоюзных и региональных совещаниях математиков, но этого оказалось недостаточно. Растущая специализация и углубление различных научных направлений потребовали усиления связи между учеными, занятыми исследованиями в области отдельных направлений или даже проблем. Такие совещания в 50—60-х годах составляют весьма важный фактор в научно-исследовательской работе. Характер их не постоянен: непрерывно ищутся новые формы, более отвечающие требованиям современности. В настоящее время вопросы координации научных исследований приобретают исключительно важное значение, так как возросшие масштабы научных работ по математике и включение в научную деятельность многих больших научных коллективов требуют сосредоточения внимания математиков на наиболее актуальных современных научных проблемах, а также устранения дублирования в исследованиях. В самые последние годы к съездам, конференциям и симпозиумам добавился еще один вид связи и координирования математических исследований: летние школы для углубленного изучения определенных проблем, объединяющие многих исследователей и начинающих математиков.

Рассмотрим внутрисоюзные связи математиков начиная с 1958 г.

С 3 по 6 февраля 1958 г. в Московском университете проходил Коллоквиум по общей алгебре, организованный кафедрой алгебры университета. Было зачитано три обзорных доклада: А. И. Мальцева (Иваново) — по теории моделей, Б. И. Плоткина (Свердловск) — по обобщенным разрешимым и нильпотентным группам и А. И. Ширшова (Москва) — по общей теории неассоциативных колец. В коллоквиуме приняли участие 104 алгебраиста.

Одновременно, 3—8 февраля 1958 г., в Баку состоялось совещание по вычислительной математике и применению средств вычислительной техники, созданное по инициативе Академии наук Азербайджанской ССР, при участии Вычислительного центра АН СССР и Института автоматизации и телемеханики АН СССР. В совещании приняли участие ученые РСФСР, Азербайджана, Грузии, УССР, Латвии, Литвы и Казахстана. Всего было зачитано 50 докладов, в основном учеными РСФСР (22 доклада) и Азербайджана (20 докладов). На совещании работало две секции — вычислительной математики и вычислительной техники.

19—25 сентября 1958 г. в Ереване состоялось Всесоюзное совещание по теории вероятностей и математической статистике (предыдущие четыре совещания проводились в Москве, Ташкенте, Киеве и Ленинграде). В нем приняло участие около 100 ученых Москвы, Ленинграда, Киева, Ташкента, Вильнюса, Еревана, Риги, Баку и других городов страны. Присутствовало также много аспирантов и студентов. На совещании было прочитано 69 докладов и сообщений, причем почти половина из них — по различным вопросам теории случайных процессов и очень немного — по математической статистике.

С 20 по 25 октября 1958 г. в Одессе проходила Межвузовская конференция по функциональному анализу и его применениям, организованная по инициативе Одесского гидрометеорологического института. В конференции приняло участие около 140 чел. Наибольшее число участников было из Москвы (32), Одессы (28), Ленинграда (16), Баку (12), Воронежа (10), Харькова (7), Черновиц (6), Киева (4 чел.).

В ноябре 1958 г. в Ереване состоялось Совещание по дифференциальным уравнениям, созданное по инициативе Ереванского университета и Вычислительного центра АН АрмССР. На совещании было зачитано около 40 докладов и сообщений. Особый интерес у участников вызвали тематические заседания, посвященные рассмотрению отдельных проблем: теории уравнений с малыми параметрами, квазилинейным уравнениям, эллиптическим системам на плоскости и некоторым задачам математической физики.

С 1 по 3 декабря 1958 г. в Киеве проходила Научно-техническая конференция Вычислительного центра АН УССР, посвященная новым разработкам по вычислительной математике и вычислительной технике. Присутствовало более 300 чел. Было зачитано 59 докладов. Конференция работала в четырех секциях: математических методов, программирования, цифровых машин, машин непрерывного действия.

15—21 апреля 1959 г. в Ленинграде состоялось Первое всесоюзное совещание по математической лингвистике, в котором приняло участие 486 чел., представители 68 учреждений, в том числе 24 институтов и лабораторий Академии наук СССР и республиканских академий и 15 высших учебных заведений. Основные проблемы, обсуждавшиеся на совещании: математические модели языка, применение статистических методов к исследованиям языка, языки-посредники машинного перевода, символические и информационные языки, построение технических устройств и программ, осуществляющих переработку речевой информации.

23—28 апреля 1959 г. в Москве был проведен Второй коллоквиум по общей алгебре, посвященный рассмотрению теории основных алгебраических образований: групп, колец и алгебр, полугрупп и квазигрупп, универсальных алгебр, моделей, структур, категорий. Было прочитано шесть обзорных докладов: З. И. Боровичем и Д. К. Фаддеевым (Ленинград) — по теории гомологий в группах, В. В. Вагнером (Саратов) — об алгебре частичных преобразований, О. Н. Головиным (Москва) — о правильных произведениях групп, Л. А. Скорняковым (Москва) — о непрерывных геометриях и С. Н. Черниковым (Пермь) — об условиях конечностей в теории групп. В коллоквиуме приняли участие 161 чел., в том числе 32 аспиранта и 36 студентов.

С 18 по 23 мая 1959 г. в Москве проходило Всесоюзное совещание заведующих кафедрами высшей математики вузов, в котором приняло участие более 800 чел. Совещание заслушало ряд докладов и сообщений и приняло постановление, в котором, в частности, отмечается необходимость увеличения числа часов, отведенных на младших курсах на математику, до 25—30% общего числа часов на этих курсах, а также необходимость повышения требований на всех экзаменах по математике.

6 сентября 1959 г. исполнилось 100 лет старейшему математике, профессору Киевского университета Б. Я. Букрееву. В связи с этим 14 сентября 1959 г. в Киевском университете было проведено торжественное заседание ученого совета университета, на котором присутствовали представители многих университетов и научных организаций, а также общественности.

С 28 сентября по 3 октября 1959 г. в Баку проходила V Всесоюзная конференция по функциональному анализу и его применениям, организованная Академией наук АзССР и Азербайджанским университетом. В конференции приняло участие около 150 чел. из разных научных центров страны. Всего было зачитано 112 докладов, из них 14 — на пленарных заседаниях. Наибольшее число докладов представила Москва (28), Баку (22), Киев (8), Воронеж (7), Харьков (6), Одесса (5), Ленинград (5), Львов (4), Тбилиси (4), Ереван (4).

5—10 октября 1959 г. в Тбилиси состоялась II Всесоюзная топологическая конференция, организованная Математическим институтом им. В. А. Стеклова АН СССР, Институтом математики АН ГрССР и Тбилисским университетом. В конференции приняло участие более 170 чел. Было прочитано 74 доклада (в том числе москвичами — 43).

В октябре (12—17) 1959 г. Ленинградским механическим институтом была созвана Первая межвузовская конференция по конструктивной теории функций. Конференцию открыл В. И. Смирнов. В ней приняло участие 200 ученых от 26 городов. Работа проводилась в пяти секциях: первая секция — вопросы, связанные с конструктивной теорией функций действительного переменного, вторая — вопросы, связанные с конструктивной теорией функций комплексного переменного, третья — вопросы, смежные между конструктивной теорией функций и функциональным анализом, четвертая — прикладные вопросы конструктивной теории функций, связанные с радиотехникой и электротехникой, пятая — вопросы теории конструктивных функций.

По инициативе Сектора математики и механики АН КазССР 29 октября — 2 ноября 1959 г. в Алма-Ате была проведена Вторая республиканская конференция по математике и механике, в работе которой приняли участие математики Москвы, Ленинграда, Сибири, Среднеазиатских республик и Казахстана. Всего было заслушано 84 доклада.

27 января — 3 февраля 1960 г. в Москве состоялся Первый всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. В работе съезда приняло участие более 2000 чел., в том числе ученые из Болгарии, Венгрии, ГДР, Чехословакии, Китая, Румынии, Польши, Франции, США и других стран. Было прочитано 670 докладов, в трех секциях: секции общей и прикладной механики, работавшей под руководством М. В. Келдыша (100 докладов), секции механики жидкостей и газа, которой руководил Л. И. Седов (245 докладов) и секции механики твердого тела, работавшей под руководством Н. И. Мухомеладзе (325 докладов).

С 15 по 20 февраля 1960 г. в Томском университете проходила Межвузовская конференция по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики. В конференции приняли участие 170 чел. из 29 вузов страны, а также представители Сибирского отделения АН СССР.

4—8 апреля 1960 г. в Москве состоялось Первое всесоюзное совещание по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании. Всего было прочитано 58 докладов.

16—19 мая 1960 г. в Нальчике было проведено Совещание по гидродинамике и математической физике. Инициатором совещания выступил Кабардино-Балкарский университет. Научным руководителем совещания был Ф. И. Франкль. В совещании приняли участие работники вузов юга РСФСР, ученые Нальчика, Орджоникидзе, Ставрополя, Одессы, Саратова и Фрунзе.

25 мая — 2 июня 1960 г. в Москве состоялась Первая межвузовская конференция по истории естествознания и техники. Председателем оргкомитета конференции был К. А. Рыбников. В ее работе приняло участие 350 чел. из 52 городов страны, в секции по истории математики, в частности, — 140 чел.

С 5 по 10 сентября 1960 г. в Вильнюсе проходило VI Всесоюзное совещание по теории вероятностей и математической статистике, созванное АН ЛитССР, Вильнюсским университетом и Математическим институтом им. В. А. Стеклова АН СССР. В совещании приняли участие около 250 математиков и научных работников, занимающихся другими областями науки. После совещания в Паланге (ЛитССР) был проведен коллоквиум по распределениям в бесконечномерных пространствах, на котором обсуждались вопросы, стоящие на стыке между теорией вероятностей и функциональным анализом.

12—19 сентября 1960 г. в Ереване состоялась V Всесоюзная конференция по теории функций, организованная Институтом математики и механики АН АрмССР. В конференции приняло участие около 120 ученых страны, в том числе много начинающих математиков. Было прочитано около 130 докладов и сообщений, в том числе 19 обзорных на пленарных заседаниях. Работа проходила в четырех секциях: общей

теории аналитических функций и геометрической теории функций, теории приближений и смежных с ними вопросов, применения методов теории функций к дифференциальным уравнениям, граничных свойств аналитических функций и некоторых вопросов теории функций вещественной переменной.

21—28 сентября 1960 г. кафедра алгебры и геометрии Уральского университета организовала Третий всесоюзный colloquium по общей алгебре. Программа colloquium была шире программ предыдущих colloquiumов, в нее помимо таких алгебраических образований, как группы, кольца, алгебры, полугруппы, модели, структуры, категории, вошли также вопросы конструктивных алгебр, алгебраической теории автоматов, решения уравнений в радикалах и др. В colloquiumе приняли участие 151 чел. из 45 городов страны. Было прочитано девять обзорных докладов: В. М. Глушкова (Киев) — о теории автоматов, Л. А. Калужнина (Киев) — о группах треугольных образований, П. Г. Конторовича, А. С. Пекелиса и А. И. Старостина (Свердловск) — о различных типах систем, покрывающих группу (базисы покрытия), и о соответствующих свойствах групп, А. Г. Куроша (Москва) — о мультиоператорных группах и алгебрах, Е. С. Ляпина (Ленинград) — о вопросах погружения полугрупп, А. И. Мальцева (Иваново) — о теории конструктивных (рекурсивных) алгебр, Б. И. Плоткина (Свердловск) — о внутренних и внешних свойствах автоморфизмов, Д. А. Супруненко (Минск) — о новых результатах в теории линейных и матричных групп, С. А. Чунихина (Гомель) — о проблемах факторизации и о  $n$ -свойствах конечных групп, а также 78 кратких сообщений.

С 20 по 23 октября 1960 г. в Батумском педагогическом институте им. Ш. Руставели проходила Первая республиканская конференция профессоров и преподавателей математики педагогических институтов Грузинской ССР. На конференции присутствовали также представители педагогических вузов РСФСР и УССР. Было прочитано 40 научных и методико-организационных докладов.

20—28 февраля 1961 г. в Тбилиси Математическим институтом им. А. М. Размадзе и Тбилисским университетом было проведено Всесоюзное совещание по применениям методов теории функций комплексного переменного к задачам математической физики. Работали две секции: теории упругости и гидромеханики и краевых задач теории функций и сингулярных интегральных уравнений. Всего было прочитано 77 докладов.

Со 2 по 3 февраля 1962 г. в Вильнюсе проходило Третье совещание математиков Литовской ССР (первое — в 1958 г.; второе — в 1960 г.). Было заслушано три обзорных доклада о состоянии математических исследований в Литве. Совещание работало в четырех секциях: теории функций и вычислительной математики, геометрии, методики и истории математики, теории вероятностей и теории чисел. Совещание приняло решение об организации Литовского математического общества.

25—27 марта 1962 г. в Нальчике Кабардино-Балкарский университет проводил Третью межвузовскую конференцию по некоторым



вопросам физики и математики. Работало две математические секции: теории функций и математической физики, геометрии и алгебры. В конференции приняли участие ученые Баку, Грозного, Еревана, Краснодара, Нальчика, Новочеркасска, Орджоникидзе, Пятигорска, Ростова-на-Дону, Саратова.

С 14 по 19 мая 1962 г. в Киеве проходил симпозиум «Логика научного исследования», в котором приняли участие многие ученые, работающие в различных областях математики.

16—22 мая 1962 г. в Киеве состоялось IV Всесоюзное совещание по общей алгебре, организованное Киевским университетом, Институтом математики и Институтом кибернетики АН УССР. На совещании были, в частности, подняты вопросы о взаимоотношении алгебры и геометрии (Л. А. Калужнин), алгебры и логики (А. И. Мальцев). А. А. Ляпунов в своем сообщении отметил, что «перемена положения математики в человеческом обществе, в комплексе наук фундаментально меняет задачи, стоящие перед математическим образованием. Даже для современного лингвиста, биолога, экономиста нужны математические курсы в вузах в общей сложности от 1000 до 1500 часов. Перестройку математического образования надо начинать со средней школы. Нужно добиваться создания специальных средних школ с математическим уклоном, с преподаванием в них математического анализа. Во вузах необходима коренная перестройка программ. В частности, по дискретной математике необходимо слияние линейной алгебры и аналитической геометрии и изучение таких разделов, как квадратичные формы, алгебраическая логика с исчислением предикатов, теория моделей и категорий. Сейчас уровень математической подготовки работников промышленности — решающий вопрос промышленного прогресса»<sup>4</sup>. На совещании присутствовало около 300 алгебраистов, в частности из Москвы — 70, Киева — 44, Ленинграда — 30, Свердловска — 30, Новосибирска — 18, Минска — 11, Иванова — 11, Ужгорода — 8, Перми — 7, Саратова — 6, Харькова — 6.

С 25 мая по 2 июня 1962 г. в Киеве проходила Первая всесоюзная геометрическая конференция. Основной целью конференции было, во-первых, подвергнуть широкому обсуждению состояние геометрических исследований и положение геометрии как учебного предмета и, во-вторых, по возможности наметить проблематику исследований по геометрии на ближайшее время. На конференции присутствовало 300 чел. из 80 городов страны, в том числе 80 чел. из Москвы и 40 из Киева. Кроме того, в конференции приняли участие ученые Румынии и ГДР.

17—24 сентября 1962 г. в Фергане состоялся Всесоюзный коллоквиум по предельным теоремам, организованный Математическим институтом им. В. А. Стеклова АН СССР, Институтом математики АН УзССР и Ташкентским университетом. В коллоквиуме приняли участие более 100 ученых Москвы, Ленинграда, Киева, Вильнюса, Новосибирска, Ферганы и других городов страны, а также иностранные ученые. Было заслушано 40 докладов.

<sup>4</sup> А. А. Л я п у н о в. — Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 6, стр. 193—194.

23—26 ноября 1962 г. в Телавском педагогическом институте была проведена Вторая республиканская конференция профессоров и преподавателей математики вузов Грузинской ССР. В ней приняло участие около 70 представителей семи грузинских педагогических институтов, Тбилисского университета, Грузинского политехнического института, Грузинского сельскохозяйственного института, Грузинского института субтропического хозяйства, а также Московского института народного хозяйства им. Г. В. Плеханова, Азербайджанского и Ереванского политехнических институтов. Было сделано 32 научных и методических доклада.

С 22 по 29 мая 1963 г. в Новосибирске проходило V Всесоюзное совещание по общей алгебре, организованное Институтом математики Сибирского отделения АН СССР и кафедрой алгебры и логики Новосибирского университета. На совещании было зачитано 152 доклада.

С 14 по 18 июня 1963 г. в Тракае (ЛитССР) была проведена Первая прибалтийская конференция по вопросам дифференциальной геометрии. В ней приняло участие 72 чел., в том числе из Вильнюса — 15, Саратова — 9, Москвы — 8, Харькова — 6, Минска — 5, Тарту — 5, Горького — 5, Киева — 3.

В 1963 г. Президиум АН УССР совместно с Институтом математики АН УССР организовал летнюю математическую школу в Каневе. Директором школы был Ю. Ю. Трохимчук. В ней было 48 слушателей из разных городов СССР. За месяц работы школы (с 15 июня по 15 июля) были прочитаны следующие курсы: Н. Н. Боголюбовым — «О квазипериодических решениях в теории нелинейных колебаний» (8 ч), М. И. Вишиком (Москва) — «Общие краевые задачи для параболических уравнений», «Сингулярные интегральные уравнения в конечной области и краевые задачи с разрывными коэффициентами» (12 ч), М. Г. Крейном (Одесса) — «Об основных положениях теории возмущений самосопряженных операторов с непрерывным спектром» (12 ч), О. А. Ладыженской (Ленинград) — «Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка» (12 ч), В. А. Марченко — «Основные теоремы обыкновенных дифференциальных уравнений в неклассических случаях» (12 ч), О. А. Олейник (Москва) — «О некоторых нелинейных задачах теории дифференциальных уравнений с частными производными» (12 ч), М. М. Постниковым (Москва) — «Современная риманова геометрия и ее применения» (14 ч), И. Т. Тодоровым (Дубна) — «Аналитические свойства матричных элементов в теории возмущений» (6 ч).

С 12 по 24 августа 1963 г. подобная летняя школа по алгебраической тематике была организована Тартуским университетом. В школе было 44 слушателя.

5—8 сентября 1963 г. Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР проводил в Москве Симпозиум по теории алгебраических групп и их представлений. В симпозиуме приняло участие около 30 математиков Москвы, Ленинграда, Киева и Ужгорода.

В конце августа 1963 г. в Новосибирске состоялась конференция по дифференциальным уравнениям в частных производных.

В конце сентября этого же года в Тбилиси была проведена конференция по приложениям теории функций комплексного переменного к задачам гидродинамики и теории упругости.

С 17 по 22 сентября 1963 г. в Алма-Ате работала Первая всеказахстанская межвузовская конференция по математике и механике с участием математиков Москвы, Ленинграда, Казани, Киева, Сибири, Среднеазиатских республик и Казахстана. Было заслушано 102 доклада.

23—28 сентября 1963 г. в Ростове-на-Дону была проведена VII Всесоюзная конференция по теории функций комплексного переменного (IV — в Москве в 1958 г., V — в Ереване в 1960 г., VI — в Москве в 1962 г.). На конференции работало 7 секций: краевых задач теории аналитических функций, теории приближений функций, полноты систем функций и базисов в пространствах аналитических функций, геометрической теории функций и аналитической теории дифференциальных и разностных уравнений, функций многих комплексных переменных и общих функциональных рядов, классов аналитических функций и граничных свойств, прикладных вопросов теории функций комплексного переменного. В конференции приняло участие 217 чел. из 33 городов страны.

23 сентября — 1 октября 1963 в Ташкенте состоялась Третья всесоюзная топологическая конференция, организованная Московским и Ташкентским университетами и Институтом математики АН УзССР. В конференции приняло участие более 180 чел., в том числе топологи из Польши, ГДР, Венгрии, Вьетнама и ФРГ.

С 7 по 14 октября 1963 г. в Тбилиси проходило VII Всесоюзное совещание по теории вероятностей и математической статистике, организованное Академией наук ГрССР, Тбилисским университетом, Грузинским политехническим институтом и Математическим институтом им. В. А. Стеклова АН СССР.

3—9 апреля 1964 г. в Душанбе Таджикским университетом, Академией наук ТаджССР и Воронежским университетом был проведен симпозиум «Некоторые вопросы теории дифференциальных и интегральных уравнений».

С 22 по 25 мая 1964 г. в Свердловском отделении Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР работал семинар по теории систем управления с переменной структурой, в котором приняли участие математики Свердловска, Москвы, Фрунзе.

17—28 июня 1964 г. в Горьком работал семинар по гомотопической топологии, организованный Горьковским университетом. На семинаре с докладами выступили С. П. Новиков, Д. Б. Фукс, Д. В. Аносов, М. С. Агранович, В. Г. Болтянский, А. С. Дынкин.

С 18 по 21 июня в Тарту проходила V Конференция по истории науки в Прибалтике. Одну из секций конференции составляли история математики и история физики.

С 1 по 6 июля 1964 г. в Минске проходил VI Всесоюзный коллоквиум по общей алгебре. В коллоквиуме приняло участие 233 алгебраиста из 38 городов страны.

1—7 июля 1964 г. в Тракае (ЛитССР) состоялся Первый всесоюзный симпозиум по проблеме машинного поиска логического вывода, посвященный вопросам автоматизации доказательств теорем математической логики и теорем аксиоматических математических теорий с конечным числом аксиом. В нем приняло участие около 100 чел. из 39 учреждений. Было заслушано 28 докладов.

9—16 октября 1964 г. в Самарканде состоялся Первый всесоюзный симпозиум по качественной теории дифференциальных уравнений. Было прочитано 72 доклада.

С 20 по 24 октября 1964 г. в Москве проводились юбилейные заседания, посвященные 100-летию Московского математического общества. Торжественное заседание 20 октября 1964 г. было посвящено истории общества за последнюю треть века.

22—26 января 1965 г. в Москве была проведена Всесоюзная конференция по вычислительной математике. В конференции приняло участие около 2000 чел. Было заслушано более 300 докладов. Работа конференции проходила в следующих секциях: вычислительных методов алгебры, квадратур и приближения функций; численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений; численных методов решения уравнений в частных производных; численных методов решения интегральных и функциональных уравнений; численных решений некорректно поставленных задач; численных методов решения задач механики; численных методов решения задач физики и химии.

25—29 мая 1965 г. в Москве состоялся расширенный Пленум Советского национального комитета историков науки и техники. История математики была выделена в отдельную секцию.

С 17 по 29 июня 1965 г. в Друскенинкае (ЛитССР) работала вторая всесоюзная летняя школа по алгебраической и гладкой топологии. Школой руководил оргкомитет Вильнюсского университета под председательством А. И. Матузевичуса. В ней было 168 слушателей из 16 городов СССР.

1—5 июля 1965 г. Тартуским университетом была созвана Вторая прибалтийская конференция по вопросам дифференциальной геометрии, а также организована летняя школа по дифференциальной геометрии. Конференция посвящалась исторической дате — 25-летию образования Эстонской ССР, Латвийской ССР и Литовской ССР. В ее работе приняло участие 95 математиков из Москвы (21), Харькова (15), Саратова (11), Тарту (11), Вильнюса (10), Томска (5), Казани (4), Орехова-Зуева (3), Таллина (3) и других городов страны. Всего было прочитано 55 докладов. После конференции, с 6 по 17 июля, в Тарту и Кяэрику работала летняя геометрическая школа по дифференциальной геометрии. Было прочитано 6 циклов лекций (по 6 ч). Лекции читали В. В. Вагнер, Н. В. Ефимов, Б. Л. Лаптев, Г. Ф. Лаптев, А. Л. Онищик, А. М. Васильев.

20—26 августа 1965 г. в Тирасполе проходил симпозиум по общей топологии, организованный Институтом математики Молдавской ССР и Тираспольским педагогическим институтом. В симпозиуме приняли участие свыше 70 чел. из 10 городов страны. Было заслушано около

40 докладов по общей топологии, ее приложениям и некоторым вопросам функционального анализа, дифференциальных уравнений и геометрии.

С 5 по 17 сентября 1965 г. в Паланге работала всесоюзная школа по метрической теории чисел, организованная Математическим институтом им. В. А. Стеклова АН СССР, Вильнюсским университетом и Институтом физики и математики АН ЛитССР. В школе участвовало 63 чел. из 23 городов СССР, в том числе из Москвы — 18, Литвы — 13, Узбекистана — 9, Ленинграда — 4. Было прочитано 23 доклада.

С 17 по 28 сентября 1965 г. в Хумсане (близ Ташкента) работала всесоюзная школа по эргодике и динамическим системам, в которой приняли участие ученые Московского и Ташкентского университетов и Ташкентского политехнического института. Всего было прочитано 25 лекций.

С 15 по 20 сентября 1965 г. в Алма-Ате проходила Вторая всеказахстанская межвузовская конференция по математике и механике с участием математиков Москвы, Ленинграда, Сибири, Среднеазиатских республик и Казахстана. Было заслушано 120 докладов.

27 сентября — 2 октября 1965 г. в Кишиневе состоялся VII Всесоюзный коллоквиум по высшей алгебре. В работе коллоквиума приняло участие 288 алгебраистов из 43 городов Советского Союза. Наибольшее число участников было из Москвы (69), Свердловска (29), Кишинева (27), Новосибирска (24), Иванова (16), Киева (14), Ленинграда (13), Минска (9), Саратова (8), Одессы (7), Красноярска (6), Риги (6), Ужгорода (6), Перми (4), Тарту (4). В коллоквиуме приняли участие также гости из Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, Югославии. Всего было заслушано 4 обзорных доклада, 26 докладов и 150 научных сообщений на секциях алгебры и моделей, алгоритмических проблем, групп, конечных групп, логики и автоматов, полугрупп, структур и категорий, топологических и упорядоченных групп.

С 21 по 23 октября 1965 г. в Риге проводились юбилейные чтения, посвященные памяти П. Г. Боля, в которых приняли участие математики из разных городов страны.

26—27 октября 1965 г. в Вильнюсе состоялась VI Конференция по истории науки в Прибалтике, на которой, в частности, работала секция по истории математики.

С 11 по 17 ноября 1965 г. в Баку проходила Всесоюзная межвузовская конференция по применению методов функционального анализа и решению нелинейных задач. Конференция была организована Азербайджанским университетом и Институтом математики и механики АН АзССР. В ней приняли участие математики Москвы (31 чел.), Баку (23), Ленинграда (8), Новосибирска (5), Воронежа (2), Киева (1) и других городов страны. Было зачитано 17 докладов на пленарных и 72 доклада на специальных заседаниях. Работали следующие секции: операторных уравнений с ограниченными и неограниченными операторами в банаховом пространстве, задач для нелинейных дифференциальных уравнений, нелинейных интегральных уравнений, прикладных задач, общих вопросов функционального анализа.

31 января — 4 февраля 1966 г. в Челябинском педагогическом институте состоялась 24-я Научная конференция математических кафедр педагогических вузов Урала, в которой приняли участие представители 35 городов. На конференции было организовано 4 секции: математического анализа и теории функций; алгебры, теории чисел и математической логики; геометрии; методики математики в средней и высшей школе.

С 28 февраля по 4 марта 1966 г. в Новосибирске проходил симпозиум по геометрии «в целом», организованный Институтом математики Сибирского отделения АН СССР совместно с Новосибирским университетом. Было заслушано более 20 докладов.

16—23 марта 1966 г. в Новосибирске Научным комитетом по проблеме «Математическая экономика и исследование операций» Отделения математики АН СССР, Институтом математики и Лабораторией по применению статистических и математических методов в экономике Сибирского отделения АН СССР был проведен семинар по проблемам экономико-математического моделирования. В семинаре приняли участие ученые Сибири, Москвы и Ленинграда. Было заслушано 12 докладов.

31 мая—4 июня 1966 г. в Киеве состоялось III Всесоюзное совещание по теории инвариантности и ее применению в системах автоматического управления, организованное Академией наук СССР и Академией наук УССР. В совещании приняли участие более 500 представителей научных учреждений Москвы, Ленинграда, Киева, Минска, Свердловска, Ташкента, Харькова, Одессы, Севастополя, Баку, Фрунзе, Владивостока и других городов, а также ученые Венгрии, ГДР, Польши и Чехословакии.

12—15 сентября 1966 г. Отделение математики АН СССР провело в Тбилиси выездную сессию, посвященную состоянию и перспективам развития математических исследований в Академиях наук Азербайджана, Армении и Грузии. Были заслушаны доклады директора Института математики и механики Академии наук АзССР Г. Н. Агаева, академика-секретаря Отделения физико-технических и математических наук Академии наук АрмССР М. М. Джрбашяна, директора Математического института им. А. М. Размадзе Н. И. Мухелишвили, а также несколько научных сообщений.

С 15 по 20 сентября 1966 г. в Хабаровске проходила VI Межвузовская физико-математическая конференция Дальнего Востока. В конференции приняло участие более 200 представителей вузов Дальнего Востока и Сибири, а также Москвы, Ленинграда, Киева, Казани, Воронежа, Саратова и некоторых других городов. Работа конференции проводилась в трех секциях: дифференциальных и интегральных уравнений, алгебры и геометрии, методики математики.

24—30 октября 1966 г. Математическим институтом им. Размадзе, механико-математическим факультетом Тбилисского университета и Батумским педагогическим институтом был организован в Батуми Всесоюзный симпозиум по теории групп. В симпозиуме приняли участие ученые Тбилиси, Батуми, Москвы, Ленинграда, Киева, Свердловска, Гомеля, Еревана, Красноярска, Риги и других городов. 27 октября

симпозиум провел Торжественное заседание, посвященное 75-летию со дня рождения О. Ю. Шмидта.

22—26 ноября 1966 г. в Институте автоматики и телемеханики АН СССР в Ленинграде состоялась V Конференция по теории и методам математического моделирования. В конференции приняли участие 560 ученых и инженеров из 52 городов Советского Союза, а также ученые Польши, Венгрии и Чехословакии.

Как видно из нашего обзора, по некоторым направлениям уже образовались устойчивые большие объединения ученых, по некоторым же — такие объединения намечаются. Характерна тенденция последних лет к разветвлению направлений и в то же время к проведению совещаний с достаточно широкой тематикой, выполняющих функции координации.

В настоящую краткую сводку включены отнюдь не все математические конференции и совещания, проведенные в рассматриваемый период. Так, кроме всесоюзных совещаний математических кафедр, проводились зональные совещания кафедр педагогических и технических вузов. Секции математики работали во всех научных сессиях высших учебных заведений. Систематически созывались республиканские и зональные конференции молодых ученых. Анализ работы всех этих совещаний, их история и выработанные ими научно-практические рекомендации могли бы послужить темой для отдельной публикации.

## 13

### **Международные творческие связи советских ученых-математиков**

Перечень мероприятий, направленных на объединение усилий ученых для решения определенных математических проблем, уточнения этих проблем и выявления перспектив развития отдельных направлений, был бы неполным, если бы не была названа еще одна группа такого рода мероприятий — международные связи ученых. Действительно, темпы современного развития теоретических знаний настолько повысились, что научная информация, какой бы оперативной она ни была, начала запаздывать. В то же время поиски необходимой информации по ряду причин, из которых немаловажной является неопределенность направления такого поиска, крайне затрудняются, и непосредственное общение ученых является для настоящего времени едва ли не самым лучшим способом получения подобной информации.

Во многих совещаниях, проводившихся в Советском Союзе, принимали участие иностранные ученые. Советские ученые в свою очередь принимали участие в международных конгрессах, конференциях, симпозиумах и коллоквиумах, а также национальных съездах и совещаниях математиков отдельных стран.

Составить полную сводку всех совещаний, проводившихся с участием советских ученых, весьма сложно. Поэтому в качестве примера назовем лишь некоторые из них.

14—21 августа 1958 г. в Эдинбургском университете состоялся Международный математический конгресс. Конгресс был очень представительным: присутствовало более 1700 математиков из разных стран мира. Делегация советских математиков прибыла в составе 32 чел., из которых 11 были делегатами, а 21 — на правах научного туриста. Председателем делегации был И. М. Виноградов, членами — А. Д. Александров, П. С. Александров, Н. Н. Боголюбов, И. Н. Векуа, Б. В. Гнеденко, Н. И. Мусхелишвили, Л. С. Понтрягин, Т. А. Сарымсаков, С. Л. Соболев, А. Л. Шагинян. Почти все члены делегации выступили с докладами. Доклады читали также все туристы, направленные Академией наук СССР и Академиями наук союзных республик. Из 22 докладов, запланированных для пленарных заседаний, пять намечалось для советских ученых: А. Д. Александрова — «Дифференциальная геометрия в целом и метрические методы в дифференциальной геометрии», Н. Н. Боголюбова — «О некоторых математических вопросах квантовой теории поля», Л. С. Понтрягина — «Оптимальные процессы регулирования», а также Н. И. Ахиезера и И. М. Гельфанда (последние два не были прочитаны из-за отсутствия докладчиков). В число обзорных докладов (40) было включено семь докладов советских ученых. Однако прочитано было пять докладов — В. И. Арнольда, Б. В. Гнеденко, Ю. В. Линника, А. А. Маркова и Д. Е. Меньшова (доклады Арнольда, Линника и Маркова из-за отсутствия докладчиков были зачитаны другими лицами).

На конгрессе работали секции: логики и оснований математики (6 заседаний), алгебры (13 заседаний), теории чисел (10 заседаний), классического анализа (26 заседаний), функционального анализа (17 заседаний), топологии (10 заседаний), алгебраической геометрии (9 заседаний), теории вероятностей и статистики (12 заседаний), прикладной математики (14 заседаний), теоретической физики (5 заседаний), численного анализа (10 заседаний), истории и преподавания математики (10 заседаний). Эти секции не отображали всех направлений в области математики, развивающихся в Советском Союзе. Например, дифференциальные уравнения при указанной разбивке направлений попали в секции классического анализа, функционального анализа, прикладной математики и численного анализа, теория функций — в секции классического и функционального анализа. На конгрессе больше всего внимания было уделено алгебре, алгебраической геометрии и топологии; слабо были представлены машинная математика и теория информации.

Незадолго до открытия конгресса в Сент-Андрюсе состоялось пленарное заседание Международной математической ассоциации. В заседании приняли участие П. С. Александров, Н. Н. Боголюбов, И. М. Виноградов, С. Л. Соболев. Было избрано руководство ассоциации, в состав которого вошли советские математики П. С. Александров (один из двух вице-президентов), С. Л. Соболев и А. Д. Александров (члены комиссий ассоциации).

15—22 августа 1962 г. в Стокгольме состоялся очередной математический конгресс. В нем приняло участие 2107 действительных членов и 984 научных туриста.



Советские ученые представили три часовых доклада (Е. В. Дынкин — «Марковские процессы и задачи анализа», И. М. Гельфанд — «Автоморфные функции и теория представлений», И. Р. Шафаревич — «Поля алгебраических чисел») и 7 (из 55) получасовых (А. И. Кострыкин — «Алгебра Ли и конечные группы», Ю. В. Линник — «Аддитивные задачи и собственные числа модулярных операторов», А. Н. Колмогоров — «Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций», И. И. Пятацкий-Шапиро — «Области типа верхней полуплоскости в теории функций многих комплексных переменных», Г. Е. Шилов — «Корректные задачи для линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в вещественном полупространстве», Ю. М. Смирнов — «Некоторые вопросы равномерной топологии», Я. Г. Синай — «Вероятностные идеи в эргодической теории»). Кроме того, советскими математиками было сделано 40 (из 745) сообщений.

Конгресс работал в 8 секциях: логики, оснований и истории математики; алгебры и теории чисел; анализа; топологии и дифференциальной геометрии; алгебраической геометрии; теории вероятностей; прикладной математики, математической физики и численного анализа; преподавания математики.

3—8 августа 1959 г. в Утрехте (Голландия) проходил коллоквиум по алгебре и топологическим основам геометрии, организованный Математическим институтом Утрехтского университета при содействии Международной математической ассоциации. В коллоквиуме приняло участие 50 математиков из 10 стран. Советский ученый Б. А. Розенфельд выступил с докладом «Простые группы Ли и неевклидовы геометрии».

24—31 августа 1960 г. состоялся II Венгерский математический съезд, в котором приняло участие 200 венгерских математиков и 150 гостей. Советская делегация была весьма представительной.

С 1 по 8 сентября 1960 г. в Праге проходил Международный симпозиум по общей топологии и ее приложениям к другим областям математики. В симпозиуме приняли участие 46 чехословацких ученых и 94 ученых из других стран. Наиболее многочисленными были делегации США (24), Польши (24), СССР (12), Румынии (9), Франции (6), ГДР (8).

12—18 сентября 1960 г. в Киеве состоялся Международный симпозиум по нелинейным колебаниям, созданный Международным союзом по теоретической и прикладной механике.

С 25 по 30 июня 1962 г. в Париже проходил Международный коллоквиум по дифференциальным уравнениям в частных производных, организованный Национальным центром научных исследований Франции. На коллоквиуме с докладом выступала О. А. Олейник.

30 августа — 4 сентября 1962 г. в Кракове работала конференция по теории аналитических функций, организованная Математическим институтом Польской академии наук. Конференция была посвящена в основном вопросам экстремальных задач теории аналитических функций и теории функций нескольких комплексных переменных.

5—11 сентября 1962 г. в Праге была организована Чехословацкая научная конференция по дифференциальным уравнениям и их применениям.

С 17 по 23 сентября 1963 г. в Тбилиси проходил Международный симпозиум по приложениям теории функций в механике сплошной среды, организованный Международным союзом по теоретической и прикладной механике.

С 1 по 26 августа 1966 г. в Москве работал Международный конгресс математиков — самый представительный съезд математиков. Число участников (из 54 стран) превысило 5000 чел., а число прочитанных докладов и сообщений — 2000.

Конгресс работал в 15 секциях: математической логики и оснований математики, алгебры, теории чисел, классического анализа, функционального анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными, топологии, геометрии, алгебраической геометрии и комплексных многообразий, теории вероятностей и математической статистики, прикладной математики и математической физики, математических проблем управляющих систем, вычислительной математики, истории и вопросов преподавания. Рабочими языками конгресса были русский, английский, французский и немецкий.

Самые большие делегации прислали СССР (1475 чел.), США (542), Великобритания (294), Франция (224), ГДР (223), ФРГ (141), Польша (131), Венгрия (113), Болгария (95), Канада (84), Румыния (84), Нидерланды (83), Италия (81), Чехословакия (68), Швеция (65), Швейцария (61), Югославия (50).

Из 15 часовых докладов пять прочитали советские ученые: И. М. Виноградов и А. Г. Постников — «О развитии за последние годы аналитической теории чисел», Н. В. Ефимов — «Гиперболические задачи теории поверхностей», М. Г. Крейн — «Аналитические проблемы и результаты в теории линейных операторов в гильбертовом пространстве», А. И. Мальцев — «О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики», И. И. Пятецкий-Шапиро — «Автоморфные функции и арифметические группы». Из 67 получасовых докладов советскими учеными было прочитано 26.

На конгрессе подтвердились обе тенденции развития современной математики: с одной стороны — крайняя специализация, дальнейшее дробление математических направлений, с другой — взаимопроникновение направлений, иногда даже далеко отстоящих друг от друга.

Большое внимание на конгрессе уделялось вопросам математической теории и прикладным задачам, их взаимосвязи и взаимовлияния. Было отмечено, что математические методы применяются не только в «классических» математизированных науках, но и в таких науках, которые всегда считались весьма далекими от математики, — в биологии, в науке о человеке, в общественных науках.

Советские ученые представили три часовых доклада (Е. В. Дынкин — «Марковские процессы и задачи анализа», И. М. Гельфанд — «Автоморфные функции и теория представлений», И. Р. Шафаревич — «Поля алгебраических чисел») и 7 (из 55) получасовых (А. И. Кострыкин — «Алгебра Ли и конечные группы», Ю. В. Линник — «Аддитивные задачи и собственные числа модулярных операторов», А. Н. Колмогоров — «Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций», И. И. Пятецкий-Шапиро — «Области типа верхней полуплоскости в теории функций многих комплексных переменных», Г. Е. Шилов — «Корректные задачи для линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в вещественном полупространстве», Ю. М. Смирнов — «Некоторые вопросы равномерной топологии», Я. Г. Синай — «Вероятностные идеи в эргодической теории»). Кроме того, советскими математиками было сделано 40 (из 745) сообщений.

Конгресс работал в 8 секциях: логики, оснований и истории математики; алгебры и теории чисел; анализа; топологии и дифференциальной геометрии; алгебраической геометрии; теории вероятностей; прикладной математики, математической физики и численного анализа; преподавания математики.

3—8 августа 1959 г. в Утрехте (Голландия) проходил коллоквиум по алгебре и топологическим основам геометрии, организованный Математическим институтом Утрехтского университета при содействии Международной математической ассоциации. В коллоквиуме приняло участие 50 математиков из 10 стран. Советский ученый Б. А. Розенфельд выступил с докладом «Простые группы Ли и неевклидовы геометрии».

24—31 августа 1960 г. состоялся II Венгерский математический съезд, в котором приняло участие 200 венгерских математиков и 150 гостей. Советская делегация была весьма представительной.

С 1 по 8 сентября 1960 г. в Праге проходил Международный симпозиум по общей топологии и ее приложениям к другим областям математики. В симпозиуме приняли участие 46 чехословацких ученых и 94 ученых из других стран. Наиболее многочисленными были делегации США (24), Польши (24), СССР (12), Румынии (9), Франции (6), ГДР (8).

12—18 сентября 1960 г. в Киеве состоялся Международный симпозиум по нелинейным колебаниям, созданный Международным союзом по теоретической и прикладной механике.

С 25 по 30 июня 1962 г. в Париже проходил Международный коллоквиум по дифференциальным уравнениям в частных производных, организованный Национальным центром научных исследований Франции. На коллоквиуме с докладом выступала О. А. Олейник.

30 августа — 4 сентября 1962 г. в Кракове работала конференция по теории аналитических функций, организованная Математическим институтом Польской академии наук. Конференция была посвящена в основном вопросам экстремальных задач теории аналитических функций и теории функций нескольких комплексных переменных.

5—11 сентября 1962 г. в Праге была организована Чехословацкая научная конференция по дифференциальным уравнениям и их применениям.

С 17 по 23 сентября 1963 г. в Тбилиси проходил Международный симпозиум по приложениям теории функций в механике сплошной среды, организованный Международным союзом по теоретической и прикладной механике.

С 1 по 26 августа 1966 г. в Москве работал Международный конгресс математиков — самый представительный съезд математиков. Число участников (из 54 стран) превысило 5000 чел., а число прочитанных докладов и сообщений — 2000.

Конгресс работал в 15 секциях: математической логики и оснований математики, алгебры, теории чисел, классического анализа, функционального анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными, топологии, геометрии, алгебраической геометрии и комплексных многообразий, теории вероятностей и математической статистики, прикладной математики и математической физики, математических проблем управляющих систем, вычислительной математики, истории и вопросов преподавания. Рабочими языками конгресса были русский, английский, французский и немецкий.

Самые большие делегации прислали СССР (1475 чел.), США (542), Великобритания (294), Франция (224), ГДР (223), ФРГ (141), Польша (131), Венгрия (113), Болгария (95), Канада (84), Румыния (84), Нидерланды (83), Италия (81), Чехословакия (68), Швеция (65), Швейцария (61), Югославия (50).

Из 15 часовых докладов пять прочитали советские ученые: И. М. Виноградов и А. Г. Постников — «О развитии за последние годы аналитической теории чисел», Н. В. Ефимов — «Гиперболические задачи теории поверхностей», М. Г. Крейн — «Аналитические проблемы и результаты в теории линейных операторов в гильбертовом пространстве», А. И. Мальцев — «О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики», И. И. Пятенский-Шапиро — «Автоморфные функции и арифметические группы». Из 67 получасовых докладов советскими учеными было прочитано 26.

На конгрессе подтвердились обе тенденции развития современной математики: с одной стороны — крайняя специализация, дальнейшее дробление математических направлений, с другой — взаимопроникновение направлений, иногда даже далеко отстоящих друг от друга.

Большое внимание на конгрессе уделялось вопросам математической теории и прикладным задачам, их взаимосвязи и взаимовлияния. Было отмечено, что математические методы применяются не только в «классических» математизированных науках, но и в таких науках, которые всегда считались весьма далекими от математики, — в биологии, в науке о человеке, в общественных науках.

□

Важнейшее значение в жизни нашей страны имеет XXIII съезд Коммунистической партии Советского Союза. Этот съезд явился важным этапом в строительстве коммунистического общества в нашей стране. Как в отчетном докладе ЦК КПСС, так и в директивах по пятилетнему плану подчеркивается значение науки и ее роль в строительстве коммунизма.

В резолюции XXIII съезда КПСС по отчетному докладу ЦК КПСС говорится:

«Съезд придает большое значение развитию советской науки, которая все больше и больше выступает как непосредственная производительная сила общества. Деятельность наших ученых должна быть направлена на дальнейшее решение актуальных научных проблем современности, на всемерное ускорение научно-технического прогресса, быстрейшее внедрение результатов научных исследований в народное хозяйство, обеспечение высоких темпов роста производительности труда»<sup>5</sup>.

В директивах XXIII съезда КПСС по пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1966—1970 гг. отмечается необходимость развития научных исследований в области теоретической и прикладной математики, которые обеспечивают широкое применение математических методов в различных отраслях науки и техники, развития исследований в области ядерной физики и физики твердого тела, дальнейшего изучения космического пространства, расширения научных работ по изучению земной коры и размещения полезных ископаемых, развития научных исследований в области химии для создания новых экономически выгодных химических процессов и получения эффективных веществ и материалов, разработки биологических проблем и других научных вопросов в области естественных наук.

Таким образом, XXIII съездом Коммунистической партии Советского Союза намечена большая программа научных работ в нашей стране и одной из первых указана необходимость развития научных исследований в области теоретической и прикладной математики. Решения XXIII съезда КПСС сыграют большую роль в деле дальнейшего развития науки в нашей стране.

В 1967 г. советская математическая общественность отметила несколько знаменательных дат и событий: 21—22 апреля награждены орденом Ленина Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР и орденом Трудового Красного Знамени Тбилисский математический институт им. А. М. Размадзе; 29 апреля удостоен звания Героя Социалистического Труда за выдающиеся заслуги в развитии науки и организацию Сибирского отделения АН СССР вице-президент АН СССР М. А. Лаврентьев. Удостоены Ленинской премии два молодых математика — Ю. И. Манин, за работу в теории чисел, и С. П. Новиков, за построение общей теории отображения односвязных многообразий

<sup>5</sup> Материалы XXIII съезда КПСС, стр. 194.

на гладкие многообразия. 10 июня присвоено звание Героя Социалистического Труда академику В. И. Смирнову.

Нами вкратце изложена история математики в Советском Союзе за последние годы. Естественно, что в таком очерке невозможно отразить с исчерпывающей полнотой многогранную научную и педагогическую деятельность огромного коллектива советских математиков. Действительно, в последние годы наука развивается невиданными ранее темпами, и исследовать историю науки как единого целого становится все более и более затруднительным, тем более что разнообразие направлений и создание новых методов исследований в различных школах и научных центрах нашей страны продолжает усиленно расти.

В следующих главах настоящего тома, а также в четвертом томе рассматриваются пути развития отдельных математических направлений и проблем, результаты научных исследований, полученные советскими математиками за 50 лет в соответствующих областях математики. В этих главах помещены материалы, характеризующие проблемы, которыми занимались и занимаются советские ученые, освещается деятельность научных школ, их представителей, развитие новых направлений математических исследований.



С. П. Новиков.

# **ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В СССР**

## ГЛАВА ПЯТАЯ

### ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Советская школа теории чисел унаследовала богатые традиции русской арифметической науки. Одним из основоположников теории чисел является Леонард Эйлер, большая часть творческой жизни которого прошла в России. Выдающимся русским арифметиком был П. Л. Чебышев, заложивший основы аналитической теории простых чисел. Под его руководством сформировалась известная петербургская школа теории чисел, давшая таких выдающихся математиков, как А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной. А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев получили глубокие результаты по теории квадратичных форм. А. А. Марков внес важный вклад в теорию минимумов неопределенных квадратичных форм. Г. Ф. Вороному принадлежат фундаментальные работы по геометрии чисел, алгебраической и аналитической теории чисел.

Для советской школы теории чисел, воспринявшей такие замечательные традиции, характерно значительное расширение направлений исследований и создание целых коллективов, активно работающих в этих направлениях. В дореволюционной России исследования по теории чисел были сосредоточены в одном Петербурге, ныне группы арифметиков работают в Москве, Ленинграде, Саратове, Ташкенте, Вильнюсе, Тбилиси и других городах. Развивается аналитическая теория чисел (теория диофантовых приближений, аддитивные проблемы, теория простых чисел), алгебраическая теория чисел (теория полей, неопределенные уравнения), геометрия чисел вместе с теорией квадратичных форм.

Настоящая глава представляет собой обзор (хотя и далеко не полный) работ советских математиков по названным трем основным разделам теории чисел.

#### **Аналитическая теория чисел**

В дореволюционной России аналитическая теория чисел была представлена лишь классическими трудами П. Л. Чебышева и Г. Ф. Вороного. П. Л. Чебышев вывел свои знаменитые неравенства в теории простых чисел, сохраняющие и поныне научное



значение, а Г. Ф. Вороной глубоко исследовал вопрос о счете целых точек под отрезками гиперболы и показал важные применения бесселевых функций в теории чисел.

Исключительное значение работ русских классиков теории чисел предопределило традиции советских математиков в этой области. Основными направлениями исследований в аналитической теории чисел в СССР являются аддитивные проблемы и диофантовы приближения, теория распределения простых чисел и теория трансцендентных чисел

## 1

### Аддитивные проблемы, диофантовы приближения и теория распределения простых чисел

Основополагающие работы по теории аддитивных проблем и диофантовых приближений, теории распределения простых чисел принадлежат И. М. Виноградову. Ранние его работы (1917 г.) примыкают к проблематике Г. Ф. Вороного и посвящены вопросу об асимптотическом счете целых точек в контурах. Однако те результаты, которые Вороной получил для особого случая (гиперболы) путем специальных весьма сложных соображений, у Виноградова получаются для весьма широкого класса контуров на основе наглядных геометрических соображений в сочетании с несложными аналитическими леммами.

Рассматривается семейство контуров на плоскости декартовых координат  $xOy$ , ограниченных отрезком  $Q \leq x \leq R$  оси  $Ox$ , вертикалями  $x = Q$ ,  $x = R$  и графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции  $y = f(x)$  ( $Q \leq x \leq R$ ), причем числа  $Q$ ,  $R$  и функции  $f(x)$  зависят от параметра  $A \rightarrow \infty$ . Примером такого семейства могут служить контуры, отвечающие числам  $Q = -\frac{A}{2}$ ,  $R = \frac{A}{2}$  и частям окружности  $x^2 + y^2 = A^2$  при  $y > 0$ . Вопрос об аналитическом счете точек внутри указанных контуров приводится к вопросу о подсчете суммы дробных частей:  $S = \sum_{\substack{x < R \\ x > Q}} \{f(x)\}$ .

Первая основная теорема Виноградова гласит: пусть  $h$ ,  $A$ ,  $Q$ ,  $R$  удовлетворяют условиям  $h \geq 1$ ,  $A > 29$ ,  $Q < R$  и функция  $f(x)$  для каждого значения  $x$  из промежутка  $Q \leq x \leq R$  имеет вторую производную  $f''(x)$ , причем  $f''(x)$  сохраняет свой знак в указанном промежутке и  $\frac{1}{RA} \leq |f''(x)| \leq \frac{1}{A}$ . Тогда справедлива формула

$$\sum_{\substack{x < R \\ x > Q}} \{f(x)\} = \frac{R-Q}{2} + G; \quad |G| \leq 2h \left( \frac{R-Q}{A} + 1 \right) (A \ln A)^{1/2}.$$

Для изучения случаев типа гиперболы Виноградов выводит вторую основную теорему. Пусть в обозначениях первой основной теоремы

$f''(x)$  сохраняет знак при  $Q \leq x \leq R$  и  $A(x) = \frac{1}{|f''(x)|} > 29$ , а отношение наибольшего значения  $f''(x)$  к наименьшему не менее двух. Далее, пусть здесь же производная  $A'(x)$  знакопостоянна и  $|A'(x)| \leq \sigma$ . Тогда

$$\sum_{x=Q}^{x=R} \{f(x)\} = \frac{R-Q}{2} + T;$$

$$|T| \leq 13(1 + \sigma) \int_R^Q \frac{(\ln A(x))}{(A(x))^{1/2}} dx.$$

Обе теоремы Виноградова не только дают результаты Вороного для гиперболы, но и охватывают весьма общий класс контуров. В общем виде эти теоремы невозможно сколько-нибудь существенно улучшить, как показал чешский математик В. Ярник, построивший в 1926 г. соответствующий пример. Отдельные виды контуров, дающих большую информацию о поведении  $f(x)$ , могут приводить к более точным результатам. В частности, во многих своих работах, вплоть до работ последних лет, Виноградов исследует асимптотическое поведение суммы

$\sum_{\Delta=m} h(-\Delta)$ , введенной еще К. Ф. Гауссом. Здесь  $h(-\Delta)$  есть число чисто мнимых корней детерминанта  $\Delta$ . К этим работам мы еще вернемся.

С 1918 по 1926 г. И. М. Виноградов занимается исследованием асимптотической теории распределения значений характеров Дирихле при растущем модуле характера. В этой области в те времена почти ничего не было известно. Виноградов применяет тригонометрические суммы и доказывает, что наименьший первообразный корень простого числа  $n > 3$  не превосходит  $2^{2h} \sqrt{n} \ln n$ , где  $h$  — число различных простых делителей  $(n-1)$ . Он исследует также распределение индексов чисел по простому модулю  $p \geq 3$ , взятых в арифметической прогрессии  $ax + b$ .

Широкую известность получила следующая теорема Виноградова: пусть  $p$  — простое число и  $n$  — делитель  $p-1$ , причем  $n \neq 1$ . Тогда наименьший невычет степени  $n$  по модулю  $p$  не превосходит величины

$$\frac{1}{p^{2h}} (\ln p)^2 \left( k = e^{\frac{n-1}{n}} \right).$$

В частности, наименьший квадратичный невычет ( $n=2$ ) не превосходит  $\frac{1}{p^{2\sqrt{e}}} (\ln p)^2$ .

Этот замечательный результат был первым продвижением в данной области с 1796 г., когда Гаусс доказал, что наименьший квадратич-



И. М. Виноградов.

ный невычет  $(\text{mod } p)$  не превосходит  $2 p^{\frac{1}{2}}$ . Многочисленные исследователи у нас и за рубежом долго пытались улучшить оценку Виноградова. Это удалось сделать лишь в 1958 г. (через 32 года!) молодому английскому математику Д. Берджессу на основе новых алгебраических исследований А. Вейля. Берджесс доказал, что наименьший квадратич-

ный невычет не превосходит  $c_\varepsilon p^{\frac{1}{4V\varepsilon} + \varepsilon}$ , где  $\varepsilon > 0$  сколь угодно мало, а  $c_\varepsilon$  — константа, зависящая от  $\varepsilon$ . Так был сделан следующий шаг в проверке известной гипотезы, выдвинутой в этой области Виноградовым и заключающейся в том, что наименьший квадратичный невычет  $\text{mod } p$  имеет порядок  $O(p^\varepsilon)$  при  $\varepsilon > 0$  сколь угодно малом. Исследования Берджесса были продолжены О. М. Фоменко (1962 г.).

С 1927 г. внимание И. М. Виноградова привлекает исследование дробных частей функции, что, разумеется, имело определенную связь с прежними его работами по асимптотическому счету целых точек в контуре. Однако здесь он уже систематически применяет метод тригонометрических сумм, разработка которого привела в дальнейшем аддитивную теорию чисел и теорию простых чисел к новой ступени развития и дала возможность решать задачи, ранее совершенно недоступные.

В некоторых работах 1926—1927 гг. И. М. Виноградов еще использует метод индукции по степени полинома. Этот метод был применен Вейлем в 1916 г. Но Виноградов впервые употребил сглаживающие функции (известные «стаканчики Виноградова»), которые затем получили столь многочисленные применения. В исследовании о числе целых точек внутри круга (1932 г.) Виноградов вывел важную приближенную формулу преобразования тригонометрических сумм вида  $\sum_{n < x} \exp 2\pi i f(n)$ . Для некоторых частных видов  $f(n)$  интересные видоизменения этой формулы были получены Е. А. Анфертъевой в 1948 г.

В 1928 г. И. М. Виноградов обращается к проблеме Варинга о решениях диофантова уравнения  $x_1^n + \dots + x_r^n = N$  при целых  $x_i \geq 0$ . В 1909 г. Д. Гильберт впервые показал, что это уравнение разрешимо при ограниченных значениях  $r$ . В 1919—1920 гг. Харди и Литтлвуд исследовали асимптотику числа решений уравнений Варинга для значений  $r \geq n2^n$ . Между тем некоторые частные результаты для отдельных значений  $n$  и численные примеры показали, что уравнение Варинга разрешимо при значительно меньших значениях  $r$ , если представимое число  $N$  достаточно велико. Минимальное значение  $r$ , при котором уравнение Варинга разрешимо для всех достаточно больших чисел  $N$ , обычно обозначается  $G(n)$ . Свое внимание Виноградов сосредоточил на изучении функции  $G(n)$  и асимптотики числа решений. В работах этого цикла он предложил интересные обобщения проблемы Варинга и исследовал соответствующую асимптотику решений.

Новый этап в развитии исследований И. М. Виноградова, а также в развитии всей современной аналитической теории чисел, наступил в 1934 г., когда им были заложены основы нового метода, метода триго-

нометрических сумм. Этот метод прежде всего привел к существенному продвижению в решении проблемы Варинга, а затем к фундаментальным сдвигам в решении вопросов об оценке тригонометрических сумм, распределении дробных частей значений функций, в аддитивных проблемах и теории распределения простых чисел. Методу тригонометрических сумм и его применимости посвящен ряд последующих работ Виноградова, в том числе две монографии — «Новый метод в аналитической теории чисел» (1937 г.) и «Метод тригонометрических сумм в теории чисел» (1947 г.).

Вторая монография состоит из 11 глав. Общие основы метода изложены в главе I. Важное место в ней занимает оценка Виноградовым кратных тригонометрических сумм, введение и исследование которых явилось одним из крупнейших событий в арифметике нашего времени. Приведем две простейшие оценки Виноградова для двойных тригонометрических сумм.

1. Пусть  $(a, q) = 1$  ( $q > 1$  — целое число);

$$S = \sum_{x=0}^{q-1} \sum_{y=0}^{q-1} \xi(x) \eta(y) \exp \frac{2\pi i a}{q} xy;$$

$$\sum_{x=0}^{q-1} |\xi(x)|^2 = X_0; \quad \sum_{y=0}^{q-1} |\eta(y)|^2 = Y_0.$$

Тогда

$$|S| \leq \sqrt{X_0 Y_0 q}.$$

2. Пусть  $M, N, X, Y$  — целые,  $X > 0, Y > 0, A \geq 2\beta \geq 2$ ,  $y$  пробегает значения  $N_1, \dots, N + Y - 1$  и для этих значений  $\Phi(y)$  принимает вещественные значения с условием, что при  $y_2 - y_1 = 1$

$$\frac{1}{A} \leq \Phi(y_2) - \Phi(y_1) \leq \frac{\beta}{A}.$$

Пусть, далее,

$$S = \sum_{x=M}^{M+X-1} \sum_{y=N}^{N+Y-1} \xi(x) \eta(y) \exp 2\pi i x \Phi(y); \quad \sum_{x=M}^{M+X-1} |\xi(x)|^2 = X_0;$$

$$\sum_{y=N}^{N+Y-1} |\eta(y)| = y_1; \quad \max |\eta(y)| = \eta.$$

Тогда

$$|S| \leq \sqrt{X_0 Y_0 \eta (4X + 3A) [Y\beta A^{-1} + 1]}.$$

Первая глава монографии содержит также ряд оценок для чисел решений диофантовых неравенств и усовершенствований «стаканчиков Виноградова» — периодических функций, графики которых имеют вид опрокинутых стаканчиков, гладко прилегающих к оси абсцисс.

В последующих главах изложены применения метода тригонометрических сумм. Для значения  $G(n)$  в проблеме Варинга получена оценка

$$G(n) < n(3 \ln n + 11).$$

Эту оценку нельзя существенно улучшить, так как давно уже известно, что  $G(n) > n$  ( $n \geq 2$ ). Далее, при  $r \geq [10n^2 \ln n]$  получена асимптотическая формула для числа решений проблемы Варинга

$$I(N) = \frac{(\Gamma(1+\nu))^r}{\Gamma(r\nu)} N^{r\nu-1} \sigma + O(N^{r\nu-1-\nu^2}),$$

где  $\nu = \frac{1}{n}$ ;  $\Gamma(s)$  — гамма-функция Эйлера;  $\sigma$  — «особый ряд», введенный Харди и Литтлвудом.

В теории приближений полиномов дробными частями И. М. Виноградов также получил результаты решающего характера. Поясним их на простом примере.

Пусть  $\alpha$  — вещественное число;  $f(\alpha) = \alpha x^n + x\sqrt{2}$ ;  $\tau \geq 1$ . Тогда при любом вещественном  $A$  найдутся целые числа  $z$  и  $v$ , такие, что

$$|f(z) - v - A| \leq c\tau^{-\rho_0} \quad (0 < z < \tau);$$

$$\rho_0 = \frac{\ln(n+1)}{8n(\ln(n+1)+1)\ln((n+1)\ln(n+1)+n+1)}.$$

В теории оценок сумм Вейля получены результаты, на которые ранее нельзя было надеяться. Простейший из них гласит: пусть  $n$  и  $P$  — целые положительные;

$$S = \sum_{x=1}^P \exp 2\pi i m F(x); \quad F(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_1x;$$

$a_{n+1}, \dots, a_1$  — вещественные;  $r$  — одно из чисел  $n+1, \dots, 2$ ;

$$a_r = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}; \quad (a, q) = 1; \quad q > 0.$$

Тогда

$$S \ll p^{1-\rho t} m^{2\rho t-1}; \quad \rho = \frac{\tau}{3n^2 \ln \frac{12n(n+1)}{\tau}}; \quad t = 1 + \frac{\nu}{30},$$

где  $\tau \geq \tau_0$  ( $\tau_0 > 0$  — сколь угодно малая константа);  $q = p^\tau$ , если  $1 < q \leq P$ ;  $\tau = 1$ , в случае  $p \leq q \leq P^{r-1}$ ;  $q = p^{r-\tau}$ , когда  $p^{r-1} \leq q < p^r$ ; знак  $\ll$  означает то же, что  $O$  большое. Аналогичные результаты получаются при исследовании распределения дробных значений полинома.

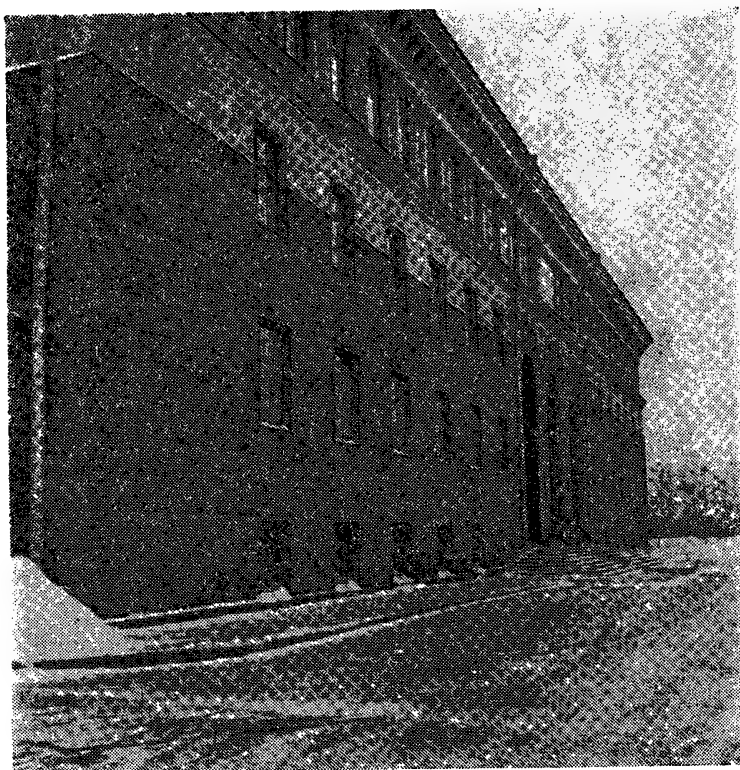
В главах IX и X монографии изложено в усовершенствованном виде известное открытие И. М. Виноградова (1937 г.) — решение тернарной проблемы Гольдбаха. Виноградов соединяет здесь метод двойных тригонометрических сумм с решетом Эратосфена и получает классическую оценку суммы с простыми числами  $S = \sum_{p \leq N} \exp(2\pi i \alpha p)$ . Пусть

$$r = \ln N; \quad H = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{r}\right);$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}; \quad (a, q) = 1; \quad 1 < q < N.$$

Тогда

$$S \ll Nr^{4.5} \left( \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + \frac{1}{M} \right).$$



Математический институт  
им. В. А. Стеклова АН СССР. 1962 г.

Именно эта оценка, в соединении с известными к 1937 г. теоремами о распределении простых чисел в прогрессиях, привела И. М. Виноградова к решению классической тернарной проблемы Гольдбаха. Известно, что в 1742 г. Гольдбах в письме к Л. Эйлеру высказал гипотезу о том, что всякое нечетное число  $N \geq 3$  есть сумма не более чем трех нечетных простых чисел. Виноградов решил эту проблему для всех достаточно больших нечетных чисел и нашел асимптотику для числа решений. Число представлений  $I(N)$  нечетного положительного числа  $N$  в виде суммы трех простых чисел  $N = p_1 + p_2 + p_3$  он выразил формулой

$$I(N) = \frac{N^2}{2\pi^3} S(N) + O\left(\frac{N^2}{r^{3,5-\varepsilon}}\right),$$

где

$$S(N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right)$$

является особым рядом (при этом  $S(N) > 0,6$ );  $\varepsilon > 0$  — сколь угодно малое число.

Знак « $O$  большое», стоящий в правой части формулы, показывает, что  $I(N) > 0$  и уравнение Гольдбаха разрешимо при  $N > c$ ,

где  $c$  — числовая константа (константа Виноградова). Вычисление этой константы предпринял в 1956 г. К. Г. Бороздкин, показавший, что

$$c \leq \exp \exp (16,038).$$

После издания монографии 1937 г. И. М. Виноградов ввел ряд важных усовершенствований в свой метод, а также разработал новые приемы в элементарной теории чисел. В работе «Новый подход к оценке суммы значений  $\chi(p+k)$ » (1952 г.) он существенно совершенствует свои методы 30—40-х годов для оценки сумм вида

$$\sum_{p < N} \chi_q(p+n); \quad \sum_{p < N} \chi_q(p(p+k)),$$

где  $\chi_q$  — неглавный характер Дирихле;  $q$  — большой модуль;  $(k, q) = 1$ . Предыдущие оценки Виноградова для таких сумм следовали бы из недоказанной и поныне расширенной гипотезы Римана, оценки же названной работы не следуют из этой гипотезы и, в известном смысле, значительно ее превосходят. Выводится теорема: при условии  $q^{3/4} \leq N \leq q^{3/4}, k \not\equiv 0 \pmod{q}$

$$\sum_{p < N} \chi_q(p+k) \ll N^{1+\varepsilon} \left( \frac{q^{3/4}}{N} \right)^{1/4}$$

( $\varepsilon > 0$  — сколь угодно малая константа).

Последняя оценка нетривиальна уже при  $N > q^{3/4+\varepsilon} + N_0(\varepsilon)$ . Следует заметить, что расширенная гипотеза Римана непосредственно привела бы только к оценке

$$\sum_{p < N} \chi(p+k) \ll \frac{N}{\varphi(q)} + N \ln^2 N \sqrt{\frac{q}{N}},$$

которая нетривиальна лишь при  $N > q \ln^4 q$ . В этом смысле оценка Виноградова значительно глубже той, которую непосредственно дает риманова гипотеза, и отвечает новым закономерностям в расположении нулей рядов  $L(s, \chi)$ . В дальнейшем (1953 г.) Виноградов усилил указанную оценку:

$$\sum_{p < N} \chi_q(p+k) \ll N^{1+\varepsilon} \Delta; \quad \Delta = \left( \frac{q^{3/4}}{N} \right)^{1/3} + N^{-\frac{1}{10}}.$$

В некоторых других работах И. М. Виноградова близкие к указанным вопросы трактуются совершенно элементарно, без привлечения характеров Дирихле, чем отчетливо выделяются основные стороны метода Виноградова. Столь же элементарно изучается распределение по простому модулю простых чисел с заданным значением символа Лежандра.

Работы И. М. Виноградова 1956—1958 гг. посвящены дальнейшим улучшениям оценок тригонометрических сумм с полиномами степени  $n$ , учитывающим влияние роста степени полинома, а также тригонометрических сумм, содержащих достаточно гладкие функции вместо полиномов. Исследования особых случаев таких сумм привели его к важному выводу в теории простых чисел: он доказал, что справедлива оценка  $\zeta(1+it) = O((\ln t)^{2/3})$  и что  $\zeta(\sigma+it)$  не имеет нулей в области  $\sigma > 1 - \frac{A}{(\ln t)^{2/3}}$ . Это дает наилучший в настоящее время результат о распределении простых чисел:

$$\pi(x) \int_2^x \frac{dx}{\ln x} + O(xe^{-\alpha(\ln x)^{0.6}}),$$

где  $\alpha > 0$  — константа.

К более поздним работам И. М. Виноградова относится новая оценка  $G(n)$  в проблеме Варинга. В 1963 г. он получил наиболее точный по нынешнему времени результат о целых точках в трехмерном шаре. Этот вопрос связан с задачей о суммировании числа классов  $h(-m)$ , которому посвящены работы Виноградова, от самых ранних до современных. Число целых точек в шаре  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  выражается асимптотической формулой

$$F = \frac{4}{3} \pi a^3 + O(a^{4/3} (\ln a)^6).$$

Методы И. М. Виноградова развивали и развивают его ученики, в том числе Н. Г. Чудаков, Ю. В. Линник, К. К. Марджанишвили, Б. И. Сегал, А. Г. Постников, Н. М. Коробов.

Н. Г. Чудакову принадлежит ряд фундаментальных результатов по приложению метода Виноградова в теории простых чисел и по теории характеров. Рассматривая суммы Вейля для полиномов возрастающей степени и оценивая их по этому методу с учетом возрастания их степеней, он применяет свои результаты к исследованию конфигурации нулей  $\zeta(s)$  и  $L(s, \chi)$ . Работы Чудакова являются первым существенным в этой трудной области исследованием гипотезы Римана за 40 лет со времен Адамара. До этого лишь Литтлвуду удалось добиться несущественного продвижения.

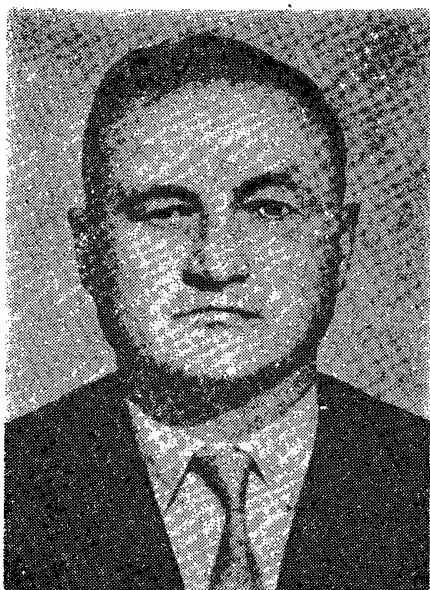
Результаты Н. Г. Чудакова 30-х годов изложены в ряде его первых работ. В работе «О суммах Вейля» он доказал следующую теорему.

Пусть  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ , где  $a_n, \dots, a_0$  — вещественные числа;  $n \geq 2$ ;  $0 < |a_n| \leq \exp(-10^5 n^7 \ln n)$ ;  $\rho = 10^{-6} (n^7 (\ln n)^2)^{-1}$ ;  $X$  — целое число;  $c, c'$  — положительные константы;  $S = \sum_{x=1}^X e^{2\pi i f(x)}$ ;  $|x| \leq c |a_n|^{-\frac{2}{2n-1}}$ .



Н. Г. Чудаков.





Ю. В. Линник.

как сумму двух простых чисел. Пусть  $v(x)$  — число иррегулярных четных чисел, не больших  $x$ . Тогда

$$v(x) = O\left(\frac{x}{(\ln x)^A}\right),$$

где  $A > 0$  — любая константа. В этом смысле можно сказать, что почти все четные числа — суммы двух простых чисел.

Н. Г. Чудаков разработал и применил в задачах теории простых чисел свой вариант «плотностного метода» Линника. Большое значение имеют его работы по теории обыкновенных и «обобщенных» характеров Дирихле. Им введено важное понятие обобщенного характера, вызвавшее многочисленные исследования.

Ю. В. Линник предложил различные видоизменения метода Виноградова для оценок тригонометрических сумм, в том числе в 1942 г. рассмотрел применение метрик  $p$ -адического типа для оценок сумм Вейля. В соответствующих его работах доказывается и применяется следующая лемма.

Пусть  $q$  — простое число;  $nl < q < p^{\frac{1}{n}}$ ;  $y_1, \dots, y_n$  — целые числа при условии  $0 < y_i < p$ ;  $y_i \not\equiv y_j \pmod{q}$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $i \neq j$ . Тогда число решений системы сравнений

$$y_1^k + \dots + y_n^k \equiv M_k \pmod{q^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n,$$

имеет порядок  $O(p^n q^{-\frac{n(n+1)}{2}})$ . В результате получена следующая оценка: при  $S = \sum \exp 2\pi i \alpha f(\alpha)$ ;  $f(\alpha) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  ( $a_i$  — целые числа);  $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\delta}{q^2}$ ;  $(a, q) = 1$ ;  $|\delta| \leq 1$ ;  $P \leq q \leq P^{n-1}$

$$|S| \ll p^{1 - \frac{c_0}{n^2 \ln n}}.$$

Тогда  $|S| \leq e^{c'm \ln n} |a_n|^{-\frac{2}{2n-1} + \rho}$ . Отсюда следует, в частности, что  $\zeta(s) \neq 0$  при  $\sigma \geq 1 - \frac{c}{(\ln t)} \alpha$ , где  $\alpha > \frac{3}{4}$  — любое число. Аналогичные результаты получены для рядов  $L(s, \chi)$ . Все эти работы Чудакова вызвали многочисленные отклики у нас и за границей и нашли своих продолжателей (Е. С. Тичмарш и др.).

Важное значение имеет теорема Чудакова о расстоянии последовательных простых чисел. Другим замечательным его достижением является доказательство глубокого приближения к бинарной проблеме Гольдбаха — им получены оценки количества «иррегулярных» четных чисел.

Назовем «иррегулярным» такое четное число, которое нельзя представить

В 1963 г. А. А. Карацуба и Н. М. Коробов использовали аналогичную лемму для получения сходных результатов. Сочетая оценки Вейля с методом Виноградова, Ю. В. Линник показал разрешимость системы сравнений

$$x_1^k + \dots + x_s^k \equiv N_s \pmod{p^k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

при  $s > c_0 n^2 \ln n$ ;  $p > n$ .

Ю. В. Линнику принадлежит также вполне элементарное решение проблемы Варинга, полученное им на основе аддитивных теорем Шнирельмана. Применяя свои результаты из теории тернарных квадратичных форм, он доказал, что всякое большое число есть сумма семи кубов целых положительных чисел.

К. К. Марджанишвили занимался системами диофантовых уравнений типа Гильберта—Камке. Он рассмотрел общую задачу совместного представления чисел суммами степеней при числе слагаемых, близком к принципиальной границе снизу.

Пусть  $0 < i < j < \dots < k$  — система  $g$  целых чисел, связанных неравенствами  $0 < N_i < N_g < \dots < N_k$ , где  $N_i, N_g, \dots, N_k$  — данные числа;  $P = N^{\frac{1}{k}}$ ;  $N \rightarrow \infty$  — параметр. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{array}{rcl} x_1^i + \dots + x_s^i & = & N_i \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x_i^k + \dots + x_s^k & = & N_k \end{array}$$

## ПОЛОЖИМ

$$N_i = h_i p^i; \quad N_j = h_j p^j, \dots$$

Пусть  $u \geq 12$ ;  $r = [2k \ln 10 kg + k \ln \ln 20ng] + 1$ ;  $k \leq n$ ;  $f$  — константа. При соблюдении естественных условий совместного роста чисел  $N_i$ , выражаемых числами  $h_i$ , число решений  $I(N_i, \dots, N_k, i, n, \dots, s)$  при  $s = f + 2gr$  ограничено снизу величиной, содержащей особый ряд  $\sigma(N_i, \dots, N_k, s)$ . При этом проведено весьма тонкое исследование поведения указанного ряда.

К. К. Марджанишвили рассмотрел систему уравнений в простых числах  $p_1^v + \dots + p_s^v = N_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ). Асимптотическая формула для числа решений здесь верна при  $r \geq r_0 = 12,5 n^2 \ln n$ .

Б. И. Сегал дал весьма интересное обобщение теоремы Варинга на случай нецелых показателей.

Пусть  $c > 0$  — вещественное число. При достаточно большом  $r$ , зависящем лишь от  $c$ , всякое целое число  $N$  представляется в форме

$$N = \sum_{n=1}^r x_n^c + o(1)$$

при  $N \rightarrow \infty$  и целых  $x_1, \dots, x_r$ . Этот результат перенесен Сегалом также на область гауссовых целых комплексных чисел.

В. И. Нечаев исследовал представление чисел суммами значений полиномов вида

$$\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{(n-1)!}$$



К. К. Марджанишвили.

и обнаружил, что в случае небольших чисел полиномы ведут себя более регулярно, чем одночлены  $x^n$ .

Г. А. Фрейман построил вариант проблемы Варинга следующего типа.

Пусть  $\{n_i\}$  — последовательность целых чисел,  $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots$

Для представимости каждого числа в виде  $x_1^{n_1} + \dots + x_r^{n_r} - 1$ , где  $x_1, \dots, x_r$  — положительные целые числа, а  $r$  не превосходит  $r_0(n_i)$ , необходимо и достаточно, чтобы ряд  $\sum \frac{1}{n_i}$  расходился.

Вопросам распределения дробных частей и применениям этой отрасли теории чисел к вычислительной математике посвящены важные работы Н. М. Коробова. В одной из них вводится понятие вполне равномерно распределенной последовательности дробных частей  $\{f(\alpha)\}$ :

при любых целых  $n_1, \dots, n_s$ , не всех равных нулю,  $\{n_1 f(x+1) + \dots + n_s f(x+s)\}$  должны образовать равномерно распределенную последовательность. Строятся примеры таких функций и изучаются связи между ними. Обнаруживается, что, если  $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n \rightarrow \infty$  — целые числа и  $f(\alpha) = \alpha q_1 q_2 \dots q_n$ , то для равномерного распределения  $\{f(x)\}$  необходимо и достаточно, чтобы  $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} [\vartheta_n q_n] (q_1 q_2 \dots q_n)^{-1}$ , где  $\vartheta_n = \{\varphi(n)\}$  — дробная часть вполне равномерно распределенной функции  $\varphi(n)$ .

В статье Н. М. Коробова о дробных долях показательной функции получены глубокие результаты о поведении  $\sum_{x=1}^p \{\alpha q^x\} - \frac{p}{2}$  в случае равномерной распределенности  $\{\alpha q^x\}$ . Показано, что  $\{\alpha q^x\}$  ведут себя в известном смысле лучше, чем  $(\alpha x)$ . В другой работе Коробов рассматривает многомерные аналоги полученных им теорем. Он связывает распределение с теоретически и практически важным вопросом о нормальных периодических системах и совместно нормальных числах. Такие вопросы имеют значение для построения таблиц случайных чисел, применяющихся в статистическом эксперименте. Коробов ставит и решает для функции  $\alpha q^x$  некоторые задачи чебышевского типа, строит числа  $\alpha$  такие, что неравенства  $0 \leq x < ct$ ;  $|\alpha q^x - y - \beta| < \frac{1}{t}$ , где  $c = c(\alpha)$ , разрешимы в целых числах при любом  $\beta$ . В его работах изучено также распределение степенных невычетов и первообразных корней в рекуррентных рядах, сочетаются оценки Вейля и Виноградова для тригонометрических сумм, приводятся такие же оценки роста  $\zeta(1+it)$  и левой границы нулей  $\zeta(s)$ , что и у Виноградова. Особенно важны

исследования Коробова по теоретико-числовым методам в приближенном анализе, подытоженные в его монографии «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе» (1963 г.). Остроумно применяя теорию диофантовых приближений, в частности оценки тригонометрических сумм, он строит теорию оптимальных коэффициентов в квадратурных формулах и применяет эти коэффициенты к интерполяции функций многих переменных и решению интегральных уравнений. Работы Н. М. Коробова продолжали его ученики, в частности И. Ф. Шарыгин.



Н. М. Коробов.

Метод Виноградова применяет и А. Г. Постников. Он рассматривает аналогию между разложением  $\ln(1+x)$  и  $\text{ind}_g(1+pu)$  — индексом по основанию  $p^n$ , а затем доказывает следующую теорему.

Пусть  $\chi(h)$  — характер степени не ниже  $p^{n-1}$ . При  $m \geq p^2$  и  $n \geq n_0$

$$\left| \sum_{n=N}^{N+m-1} \chi(h) \right| \leq \exp(\sigma n \ln^2 n) p^{\frac{c}{n^3 \ln n}} m^{1 - \frac{c_1}{n^3 \ln n}}.$$

Отсюда выводится теорема о том, что если  $D = p^n$  и  $\chi$  — примитивный характер  $(\text{mod } p^n)$ ,  $n^\theta \geq \ln p \geq c_2 n^4 \ln^2 n$ ,  $n \geq n_0$ , то  $L(s, \chi)$  не имеет нулей при  $|t| \leq c_3$ ;  $\sigma > 1 - c_4 \left( \ln^{\frac{\theta}{\theta+1}} D \ln \ln D \right)^{-1}$ .

Хотя рассмотренные А. Г. Постниковым модули имеют частный вид, однако его теорема явилась первым за 50 лет сдвигом в вопросе о нулях  $L$ -рядов с большим модулем вблизи точки  $s = 1$ .

Несколько работ А. Г. Постникова, в том числе работы, выполненные совместно с И. И. Шапиро-Пятецким, посвящено изучению законов распределения дробных частей  $\{\alpha q^x\}$  ( $q$  — целое число). В них остроумно применена теория динамических систем и однородных цепей Маркова. Эти работы Постников систематизировал в монографии «Арифметическое моделирование случайных процессов» (1960 г.), где он глубоко исследует вопросы, смежные для теории чисел и теории динамических систем.

Многие важные результаты по теории диофантовых приближений принадлежат А. О. Гельфонду. В одной из своих работ он, на основе аналитического метода Зигеля, обобщает известную теорему Минковского о решениях в целых числах системы неравенств  $\left| \sum_{\mu=1}^r a_{v\mu} x_\mu \right| \leq t_v$ ;  $v = 1, 2, \dots, n$ ;  $t_1 t_2 \dots t_n \geq \frac{\Delta}{\Phi}$ , описывая значения  $\Phi$ , для которых

система имеет ненулевые решения. Из этого результата Гельфонда следуют, в частности, некоторые теоремы Хинчина о диофантовых приближениях. Весьма общие теоремы получены Гельфондом в области теории распределения дробных долей систем функций.

Исследования по теории диофантовых приближений связаны также с именем А. Я. Хинчина. К его результатам относится «принцип переноса», заключающийся в следующем.

Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — система вещественных чисел, линейно независимых над полем рациональных чисел  $R$ ;  $x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n, q$  — произвольные целые числа;  $\omega$  — точная верхняя грань чисел  $\omega' > 0$ , для которых неравенства

$$|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n - y| \leq t^{-n-\omega'};$$

$$|x_i| < t, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

имеют бесконечно много решений при  $t \rightarrow \infty$ . Пусть, далее,  $\omega_2$  — точная верхняя грань чисел  $\omega > 0$ , для которых система неравенств

$$\left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq t^{-n-\frac{1+\omega}{n}} \quad (0 < q \leq t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

имеет бесконечно много решений. Тогда получим неравенства

$$\omega_1 \geq \omega_2 \geq \frac{\omega_1}{n^2 + \omega_1(n-1)}.$$

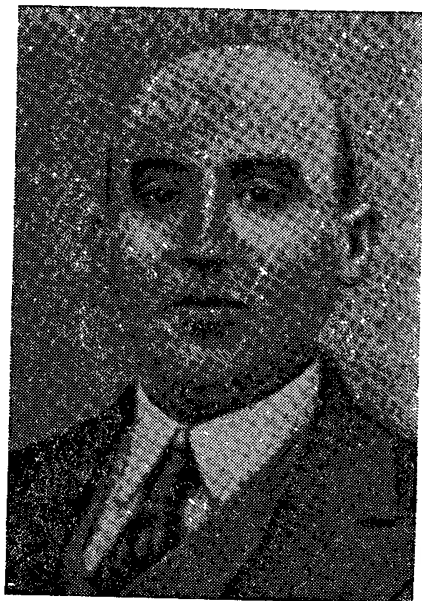
Достижимость этих граней доказана чешским математиком В. Ярником. Значительное развитие и уточнение эти результаты получили в более поздних работах Хинчина (1948 г.).

Большое значение имеют исследования В. А. Тартаковского по общему диофантову анализу, посвященные представлению чисел формы заданной степени от многих переменных, т. е. решению уравнения  $N = F(h_1, \dots, h_s)$ , где  $F(h_1, \dots, h_s)$  — форма степени  $n$ , а  $s$  — достаточно большое (выбираемое по  $n$ ) число. Им установлены достаточные условия разрешимости такого уравнения. Это наиболее широкий из современных результатов по диофантову анализу с большим числом переменных.

Новый общий метод в теории аддитивных проблем, оказавший большое влияние на развитие аналитической теории чисел, был найден в 1930 г. Л. Г. Шнирельманом. Им введено понятие плотности последовательности целых положительных чисел (если  $N(x)$  — числовая функция последовательности — количество ее чисел не больших  $x$ , — то  $\inf_A \frac{N(x)}{x} = \alpha$  ( $\alpha > 0$ ) называется ее плотностью) и показано, что плотность суммы в указанном смысле двух последовательностей с плотностями  $\alpha$  и  $\beta$  будет не меньше  $\alpha + \beta - \alpha\beta$ . Отсюда следует, что последовательности положительной плотности образуют базис

натуральных чисел. С помощью решета Эратосфена он доказал, что плотность последовательности чисел вида  $p_1 + p_2$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — простые числа, положительна, и тем самым установил, что всякое целое число есть сумма ограниченного числа простых чисел (или единиц). Им доказано также, что всякое целое число есть сумма ограниченного числа слагаемых вида  $n_s^k$ , где  $k > 1$  — заданное целое число, а  $\{n_i\}$  — последовательность положительной плотности.

Продолжая исследования Л. Г. Шнирельмана, Н. П. Романов доказал весьма тонкие теоремы о плотностях некоторых последовательностей, в частности теорему о том, что суммы простых чисел и степеней одного и того же числа имеют положительную плотность. Он разработал введенное Шнирельманом понятие операторной  $\zeta$ -функции и указал связи между теорией пространства Гильберта и теорией чисел. Им получен ряд интересных тождеств, например:



Л. Г. Шнирельман.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{m} \Lambda(m) x^m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \sum_{\rho(n)} \frac{\rho^2 x^2}{1 - \rho x},$$

где  $|x| < 1$ ;  $\rho^n = 1$ ;  $\rho$  — первообразный корень.

А. Я. Хинчин, развивая идеи Шнирельмана по теории плотностей, доказал, что две последовательности с одинаковой плотностью  $\alpha > 0$  в сумме дают последовательность плотности  $\min(2\alpha, 1)$ .

Интенсивно развивались исследования по теории простых чисел классическими методами, основанными Б. Риманом и Ж. Адамаром. Ю. В. Линник разработал «плотностный метод» в теории  $L$ -рядов, во многих случаях позволяющий обходить расширенную гипотезу Римана и получать результаты, которые ранее выводились условно с помощью гипотезы Римана или ее аналогов. Таким образом им исследован порядок роста наименьшего простого числа  $p_{\min}(l, D)$  в арифметической прогрессии  $Dx + l$ , где  $(l, D) = 1$ ;  $0 < l < D$ . Доказано, что  $p_{\min}(l, D) < D^c$ , где  $c$  — абсолютная константа. Как следует из вычислений, выполненных зарубежными математиками,  $c \leq 5448$ . В последнее время М. Б. Барбан, Ю. В. Линник и Н. Г. Чудаков, используя идеи А. Г. Постникова по применению в этой области  $p$ -адического анализа, показали, что если  $D = p^n$  — степень фиксированного простого

числа  $p \geq 3$ , то  $p_{\min}(l, D) < c_\varepsilon D^{\frac{8}{3} + \varepsilon}$  при любом  $\varepsilon > 0$ . Этот же вопрос исследовал К. А. Родосский. Он получил глубокие плотностные теоремы для нулей рядов  $L(s, \chi)$  и теоремы о положении «исключительного нуля»  $L$ -ряда с реальным характером, дал новый, значительно более



Н. П. Романов.

простой вывод оценки  $p_{\min}(l, D) < D^c$  и указал асимптотический закон для числа простых чисел в прогрессиях  $Dx + l$ , действующий при  $p > D^A$ . Родосский изучал связь гипотез Виноградова о степенных вычетах и невычетах с распределением нулей  $L(s, \chi)$ . В работе «О некоторых тригонометрических суммах» (1963 г.) он получил новые глубокие результаты о суммах Вейля, особенно таких, где степень соответствующего полинома мала.

Э. К. Фогелс продолжил работы Ю. В. Линника и К. А. Родосского. Он доказал следующие теоремы.

1. Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $A = A(\varepsilon) \geq \frac{24}{\varepsilon}$  такое, что в сегменте  $[D^A D^{A(1+\varepsilon)}]$  находится хотя бы одно простое число прогрессии  $Dx + l$ .

2. Пусть  $\pi(D^A, D, l)$  — число простых чисел прогрессии  $Dx + l$ , не превышающих  $D^A$ . По любому  $\varepsilon > 0$  для всех  $A > A_0(\varepsilon) \geq \frac{30}{\varepsilon}$  получим  $\pi(D^A, D, l) > D^{A(1-\varepsilon)}$ .

Фогелсу принадлежит ряд глубоких теорем аналитической теории простых идеалов. Так, он обнаружил, что в любом классе идеалов поля алгебраических чисел над рациональным полем  $R$  найдется простой идеал с нормой, не большей  $|\Delta|^c$ , где  $\Delta$  — дискриминант поля, а  $c > 0$  — константа, зависящая лишь от степени поля.

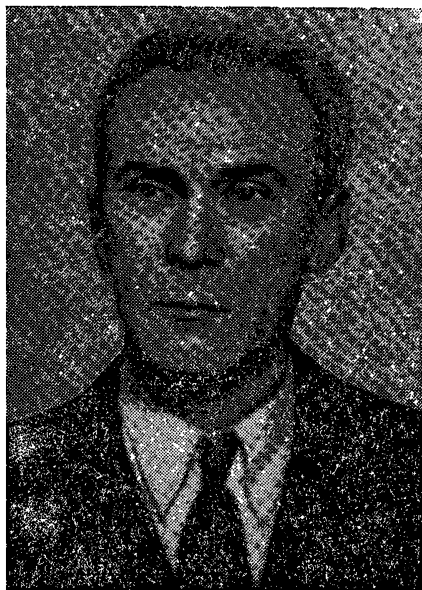
С помощью плотностного метода в 1946 г. Ю. В. Линник нашел новый способ оценки суммы с простыми числами  $\sum_{p < N} \exp 2\pi i \alpha p$  и новое

доказательство теоремы Виноградова о решениях тернарной проблемы Гольдбаха. Далее он занимался аддитивными задачами с простыми числами и с помощью этого же плотностного метода исследовал уравнение, не поддававшееся трактовке ранее известными методами:  $N = p + p' + g^{x_1} + \dots + g^{x_k}$ , где  $p, p'$  — простые числа;  $g \geq 2$  — фиксированное целое число;  $N \equiv kg \pmod{2}$ . Им доказано, что при  $k > k_0(g)$ ,  $N > N_0(g)$  это уравнение разрешимо, и выведена сравнительно несложная асимптотическая формула для числа решений. Им же получен следующий результат. Существует константа  $k_0$ , для которой выполняется условие: если записать какое-либо большое четное число  $N$  в двойной системе счисления, то достаточно не более чем в  $k_0$  местах заменить цифру 0 на 1 или цифру 1 на 0, чтобы получить сумму двух простых чисел.

А. И. Виноградов значительно усовершенствовал методы рассмотренного исследования Ю. В. Линника и получил следующую теоре-

му: если достаточно большое число  $N$  записать в  $p$ -ичной системе счисления,  $N = a_0 + a_1 p + \dots + a_r p^r$ , то для того чтобы получить сумму двух простых чисел, достаточно изменить ограниченное абсолютной константой число коэффициентов, каждый по выбору на  $+1$  или  $-1$ .

В 1958—1961 гг. Ю. В. Линник разработал «дисперсионный метод» для решения некоторых бинарных задач. Его основные результаты в этом направлении изложены в монографии «Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах» (1961 г.). Линник рассмотрел бинарные уравнения вида  $n = \varphi + D'v$ , где  $\varphi$ ,  $D'$ ,  $v$  пробегает некоторые «слабозависимые» системы чисел. Для таких уравнений им введено понятие дисперсии и ковариации количества решений и соединены элементы корреляционной теории (в частности, неравенства типа Чебышева), обычные для теории вероятностей, с идеями И. М. Виноградова и А. Вейля. В результате появилась возможность решать некоторые ранее недоступные задачи. Этим способом решена, в частности, проблема Харди — Литтлвуда о решении уравнения  $n = p + \xi^2 + \eta^2$ , где  $p$  — простое число. Для числа решений этого уравнения  $Q(n)$  получена формула



Э. К. Фогелс.

$$Q(n) = \pi A_0 \frac{n}{\ln n} \prod_{p|n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} + R(n),$$

где

$$A_0 = \prod_p \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right); \quad R(n) = O\left(\frac{n}{(\ln n)^{1.028}}\right).$$

Эта формула (без остаточного члена) была предложена в 1923 г. Харди и Литтлвудом в качестве эвристической догадки. Из нее следует, что все большие числа — суммы простого и двух квадратов чисел. Б. М. Бредихин улучшил остаточный член:

$$R(n) = O\left(\frac{n}{(\ln n)^{1.041}}\right).$$

Далее этим же методом Ю. В. Линник решил аддитивную проблему делителей, т. е. нашел асимптотику уравнения  $xy - x_1 x_2 \dots x_k = 1$  ( $x, y, x_1, \dots, x_k$  — положительны,  $xy \leq n$ ), и вместе с тем — проблему делителей сдвинутых простых чисел Е. С. Титчмарша (1930 г.), т. е. нашел асимптотику для суммы  $\sum_{p \leq n} \tau(p-1)$ , а также решил некоторые другие бинарные задачи.



Б. М. Бредихин значительно развил и усовершенствовал дисперсионный метод. Им доказана асимптотическая формула для числа решений уравнения  $p = x^2 + y^2 + a$ , чем, в частности, решен старый вопрос о существовании бесконечно многих простых чисел вида  $p = x^2 + y^2 + a$ , дана асимптотика для  $\sum_{p \leq n} \tau(p - a)$  при любом  $a$  и асимп-

тотика числа решений уравнения  $xy - x_1 \dots x_k = a$ ;  $xy \leq n$ . Наиболее значительным успехом Бредихина является исследование обобщенного уравнения Харди — Литтлвуда:  $n = p + Q(\xi, \eta)$ , где  $Q$  — квадратичная форма, определенная или неопределенная. Им доказано существование большого числа решений, а в последнее время найдена и асимптотика.

А. И. Виноградов применил дисперсионный метод к исследованию обобщенного уравнения типа Клостермана — к задаче представления чисел в виде сумм двух норм идеалов заданных классов заданных полей. А. О. Гельфонд ввел в теорию простых чисел новый интересный объект — цепочки линейных подстановок и для них аналоги  $\zeta$ -функции. Он развил также новый элементарный метод в теории простых чисел. И. П. Кубилюсу принадлежит ряд важных результатов по асимптотической геометрии распределения простых идеалов для полей алгебраических чисел, в частности для гауссовых простых чисел.

Много важных работ посвящено теории решета Эратосфена и его приложениям к бинарной проблеме Гольдбаха. А. А. Бухштаб доказал, что всякое большое четное число представимо в виде  $2n = P_1 + P_2$ , где  $P_1$  и  $P_2$  имеют не более четырех простых множителей. В. А. Тартаковский ввел «метод избирательного приближенного решета», позволивший получить аналогичные результаты. В 1957 г. А. И. Виноградов сделал следующий шаг в решении бинарной проблемы Гольдбаха. Он доказал, что достаточно большие четные числа  $2n$  представимы в виде  $2n = P + P'$ , где  $P$  и  $P'$  имеют не более трех простых множителей. В одной из работ он рассмотрел решения некоторых линейных уравнений в простых числах. В самое последнее время (1967 г.) А. И. Виноградовым получен фундаментальный результат — опровергнута известная гипотеза Э. Куммера (высказанная Куммером более 100 лет назад) о разделении аргумента кубических сумм Гаусса. М. Б. Барбан и Б. Я. Левин в 1963 г. получили весьма существенный результат:  $2n = p + P_2$ , где  $p$  — простое число, а  $P_2$  имеет не более четырех простых делителей. Барбан в своем исследовании употребил плотностные методы и применил их, в частности, при выводе асимптотической формулы для  $\sum_{1 \leq m \leq x} (h(-m))^k$ , где  $n \geq 1$  — любое целое число;

$h(-m)$  — число классов идеалов  $h(\sqrt{-m})$ . В 1964 г. А. А. Бухштаб получил замечательное улучшение теоремы Барбана и Левина, доказав, что число  $P_2$  можно выбрать так, чтобы оно имело не более трех простых множителей.

## Теоретико-числовые задачи теории функций. Трансцендентные числа

Направление теории чисел, включающее теоретико-числовые задачи теории функций и теорию трансцендентных чисел, создано и развито в СССР А. О. Гельфондом и широко разработано им совместно с его учениками А. Б. Шидловским, Н. И. Фельдманом и др.

Теоретико-числовые исследования А. О. Гельфонда по функциям комплексного переменного первоначально касались теории целочисленных функций. В 1929 г. он показал, что если целая функция  $g(x)$  принимает целые комплексные значения в целых числах Гаусса и максимум модуля ее  $M(r)$  на окружности  $|x| \leq r$  не превосходит  $\exp(\alpha_1 r^2)$ , где  $\alpha_1 < \alpha = \frac{\pi}{2} \left(1 + e^{\frac{164}{\pi}}\right)^{-2}$ , то  $g(x)$  есть полином. В 1933 г. им был рассмотрен вопрос о функциях целочисленных в точках геометрической прогрессии, а в 1934 г. — установлена связь между вопросами целочисленности функций и теорией простых чисел.

В сравнительно недавнее время А. О. Гельфонд вернулся к вопросу о целочисленности аналитических функций и на основании нового понятия «нормальной целочисленности» функций доказал весьма общий результат, охватывающий его ранние и многие другие результаты. Исследование глубоких связей теории аналитических функций и теории целых чисел привело А. О. Гельфонда к разработке метода исследования трансцендентности чисел, который явился самым значительным вкладом в эту область со времени доказательства (1882 г.) Ф. Линдеманом трансцендентности числа  $\pi$  и тем самым невозможности решения задачи квадратуры круга с помощью циркуля и линейки. Еще в исследованиях 1929 г. Гельфонд указал весьма общий подход к выяснению арифметической природы значений аналитических функций при алгебраических значениях аргумента, если эти функции имеют алгебраические значения при аргументе, взятом из определенного алгебраического поля. Так, для функции  $\alpha^z$  при алгебраическом  $\alpha \neq 0, 1$  он рассмотрел разложение в интерполяционный ряд Ньютона в целых точках  $x_0, x_1, x_2, \dots$  алгебраического поля  $k(\sqrt{-D})$ ,  $D > 0$ :

$$\alpha^z = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - x_0) \dots (z - x_{n-1}).$$

Если считать, что число  $\alpha^{i\sqrt{D}}$  и тем самым все числа  $\alpha^{x_m}$  — алгебраические, то можно показать, что, с одной стороны, числа  $A_n$ , в силу аналитических причин, должны быстро убывать, с другой, в силу сделанного предположения, — должны обратиться в нуль, что противоречиво. Этим доказана трансцендентность числа  $\alpha^{i\sqrt{D}}$ . Результат А. О. Гельфонда продолжил Р. О. Кузьмин, показавший, что числа вида  $\alpha^{\sqrt{D}}$  ( $D > 0$ ), где  $\sqrt{D}$  — иррационально (например,  $2^{\sqrt{2}}$ ), являются трансцендент-



А. О. Гельфонд.

ными. Можно также указать исследования в этом аспекте природы эллиптических функций, осуществленные немецким математиком К. Л. Зигелем, и некоторые работы других ученых.

Новый этап в теории трансцендентных чисел составляют работы А. О. Гельфонда, выполненные в 1934—1939 гг. В них введены новые идеи: идея рассмотрения вспомогательной функции  $\sum_{k,l} c_{kl} \alpha^{kx} \beta^{lx}$  ( $\alpha$  — алгебраическое число, отличное от 0 и 1, а  $\beta$  — иррациональное алгебраическое число) при исследовании функции  $\alpha^x$ , идея «накопления нулей», новые способы оценок и др. В 1934 г. Гельфондом была решена классическая седьмая проблема Гильберта: доказано, что для упомянутых выше значений  $\alpha$  и  $\beta$  числа  $\alpha^\beta$  трансцендентны. Это открытие получило ши-

рокую известность и привело к появлению многих работ. Развивая свой метод, Гельфонд доказал ряд важных теорем о приближениях алгебраическими числами. В частности, он показал, что при алгебраических  $\alpha$  и  $\beta$ , иррациональном  $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$  и алгебраическом  $Q$ , удовлетворяющем уравнению степени  $n$  и высоты  $H$ , где  $n$  постоянно и  $H \rightarrow \infty$ , справедливо неравенство

$$\left| \frac{\ln \alpha}{\ln \beta} - Q \right| > \exp - (\ln^{3+\varepsilon} H),$$

если  $H > H_0(\varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$  — сколь угодно малая константа.

В одной из работ 1940 г. А. О. Гельфонд применил свой метод к функциям  $p$ -адического переменного и получил замечательную теорему: уравнение  $\alpha^x + \beta^y = \gamma^z$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  — вещественные алгебраические числа, не равные 0 и  $\pm 1$ , из которых хотя бы одно не есть алгебраическая единица, может иметь лишь конечное число решений в целых числах  $x, y, z$ , за исключением случая  $\alpha = \pm 2^{n_1}$ ;  $\beta = \pm 2^{n_2}$ ;  $\gamma = \pm 2^{n_3}$ , где  $n_1, n_2, n_3$  — рациональные числа. В работах, подытоженных в известной книге «Трансцендентные и алгебраические числа» (1952 г.), он усиливает свой метод приемами, которые дают возможность решать задачи о взаимной алгебраической независимости чисел и находить новые классы трансцендентных чисел. Приведем некоторые из полученных им теорем.

1. Пусть  $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \alpha_1, \alpha_2$  — такие действительные или комплексные числа, что  $\eta_0, \eta_1, \eta_2, 1, \alpha_1, \alpha_2$  линейно независимы над рациональным полем. Пусть, далее,  $\tau, x'$  — такие положительные константы, что

$$|x_0 \eta_0 + x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2| > \exp(-\tau x \ln x)$$

для всех целых  $x_0, x_1, x_2$  при условии

$$x = \max |x_i| > x'.$$

Тогда хотя бы два из 11 чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \exp(\eta_i \alpha_k) \quad (i = 0, 1, 2; \\ k = 0, 1, 2; \quad \alpha_0 = 1)$$

алгебраически независимы над полем рациональных чисел  $R$ .

2. Пусть  $\eta_0, \eta_1, \alpha_1, \alpha_2$  — такие числа, что  $\eta_0 \neq 0$ ;  $\eta_1 \eta_0^{-1}$  — иррационально;  $1, \alpha_1, \alpha_2$  — линейно независимы над полем  $R$ . Пусть  $\tau, \alpha' > 0$  таковы, что  $|x_0 + x_1 \frac{\eta_1}{\eta_0}| > \exp(-\tau x' \ln x)$  для целых  $x_0, x_1$  с  $\max |x_i| > x'$ . Тогда хотя бы два из чисел  $\eta_0, \eta_1, \alpha_1, \alpha_2, \exp(\eta_i \alpha_k)$  алгебраически независимы над полем  $R$ .

Частным случаем этих теорем и некоторых их усилений являются следующие две теоремы.

3. Если  $\alpha, a \neq 0$  — алгебраические числа выше третьей степени, то по крайней мере два из чисел  $a^\alpha, a^{\alpha^2}, a^{\alpha^3}, a^{\alpha^4}$  алгебраически независимы. Если  $\alpha$  третьей степени, то  $a^\alpha$  и  $a^{\alpha^2}$  алгебраически независимы.

4. Если  $v \neq 0$ , то хотя бы одно из чисел  $\exp(\pi^{kv+1})$  ( $k = 1, 2, 3$ ) трансцендентно.

Далее А. О. Гельфондом получены важные неравенства для линейно независимых над полем  $R$  трех и более логарифмов алгебраических чисел  $\ln \alpha_1, \ln \alpha_2, \dots, \ln \alpha_n$  ( $n \geq 3$ ), а именно  $|x_1 \ln \alpha_1 + \dots + x_n \ln \alpha_n| > e^{-\epsilon x}$ , если  $x_i$  — целые, а  $x = \max(x_i)$  достаточно велик. К сожалению, эта глубокая оценка не эффективна. В совместном исследовании А. О. Гельфонда и Ю. В. Линника показано, что из эффективизации этой оценки вытекало бы решение известной проблемы об эффективизации счета одночленных мнимых полей. Этим последняя была связана с известной проблемой эффективизации неравенства Туэ — Зигеля в теории диофантовых приближений.

Важные результаты в теории трансцендентных чисел принадлежат А. Б. Шидловскому. Рассмотрим полученное им значительное усиление теоремы Зигеля об известных в теории трансцендентных чисел  $E$ -функциях.

Пусть система  $E$ -функций  $f_1(z), \dots, f_m(z)$  есть решение системы

$$\frac{dy_n}{dt} = Q_{n,0}(z) + \sum_{i=1}^m Q_{ni}(z) y_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где  $Q_{ni}(z)$  — рациональные функции с алгебраическими коэффициентами. Пусть  $z$  не равно нулю или полюсу  $Q_{ni}(z)$ . Для алгебраической



А. Б. Шидловский.

независимости чисел  $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$  необходимо и достаточно, чтобы  $f_1(z), \dots, f_m(z)$  были алгебраически независимыми над полем рациональных функций.

До этого исследования А. Б. Шидловского были изучены лишь некоторые частные случаи. Полученные им результаты значительно развиты в его работах 1961—1962 гг. Мерой взаимной трансцендентности чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  называется выражение  $\Phi(H, n_1, n_2, \dots, n_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \min |P(\alpha_1, \dots, \alpha_s)|$ , где  $P(x_1, \dots, x_s)$  — целочисленный полином высоты, не большей  $H$ , и степеней по  $x_i$ , не превосходящих  $n_i$ . В 1960 г. Н. И. Фельдман получил ряд глубоких результатов, касающихся меры взаимной трансцендентности чисел. Он установил, в частности, новую оценку меры трансцендентности числа  $\pi$ , доказав существование константы  $\Lambda_0 > 0$ , такой, что для любого алгебраического числа  $\xi$  степени  $n$  и высоты  $H$ , при некотором  $\ln H > n^2 \ln^4(n+2)$ , верно неравенство

$$|\pi - \xi| > H^{\Lambda_0 n \ln(n+2)}.$$

### 3

#### Метрическая теория чисел. Эргодические методы

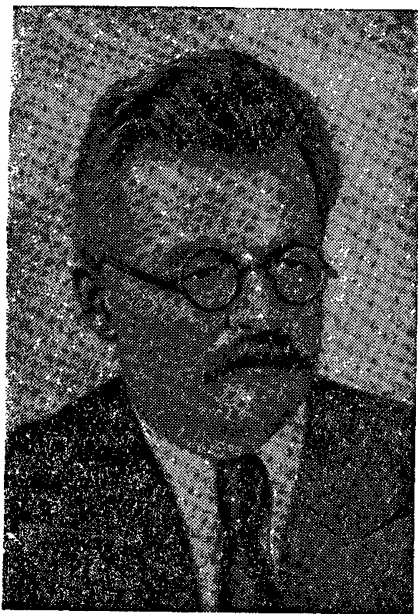
В метрической теории чисел многие важные работы принадлежат А. Я. Хинчину, Р. О. Кузьмину, И. П. Кубилюсу и В. Г. Спринджуку.

А. Я. Хинчин в 1935 г. доказал, что если  $\alpha$  иррационально и вещественно,  $\varphi(t) > 0$  — такая функция, что  $t^2\varphi(t)$  монотонно убывает при  $t \rightarrow \infty$ , то почти для всех  $\alpha$  неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \varphi(t) \text{ при } q \leq t \text{ имеет бесконечно много решений, если интеграл}$$

$$\int_a^\infty t\varphi(t) dt \text{ расходится, и лишь конечное число решений, если он сходится. Им получены существенные результаты в метрической теории цепных дробей, значительно уточненные И. А. Ибрагимовым.}$$

Р. О. Кузьмин также занимался подобными вопросами. В 1928 г. ему удалось решить известную проблему Гаусса о цепных дробях. Пусть  $\alpha \in (0,1)$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  — последовательность неполных частных  $\alpha$ ;  $r_n$  — число, для которого последовательностью неполных частных будет  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ . Пусть  $m_n(x)$  — мера множества точек  $\alpha \in (0,1)$ , для которых  $r_n - a_n < x$ . К. Ф. Гаусс в письме



Р. О. Кузьмин.

к Лапласу высказал гипотезу о том, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Кузьмин доказал это предположение. В дальнейшем он показал даже, что

$$\left| m_n(x) - \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \right| = O\left(\left(\frac{7}{10}\right)^n\right).$$

В 1963—1964 гг. важных результатов в метрической теории чисел добился В. Г. Спринджук, доказавший гипотезу К. Малера.

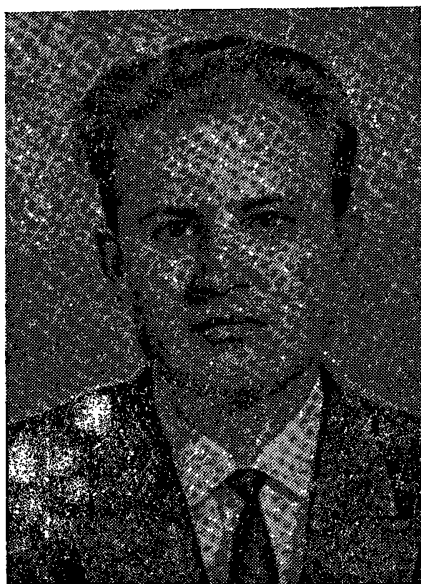
Рассмотрим целочисленные полиномы  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  высоты  $h$  ( $h = \max_i |a_i|$ ). Для данного числа  $\omega$  обозна-

чим  $Q_n(\omega)$  точную нижнюю грань тех  $\lambda$ , для которых  $|P(\omega)| > ch^{-n\lambda}$  ( $c$  не зависит от  $h$ ). Гипотеза Малера состояла в том, что  $Q(\omega) = 1$  почти для всех веществен-

ных чисел и  $Q(\omega) = \frac{1}{2}$  почти для всех комплексных чисел. Частный случай этой гипотезы при  $n = 2$  был доказан Й. П. Кубилюсом в 1949 г.

Вероятностная теория чисел в СССР, начавшая свое развитие с работ Б. А. Венкова, в широком плане разрабатывалась Й. П. Кубилюсом. В монографии Кубилюса «Вероятностные методы в теории чисел» (1962 г.) на семейства сильно аддитивных арифметических функций распространены теоремы и асимптотические оценки теории сложения независимых величин и некоторые результаты теории марковских процессов. Особенно замечателен найденный им аналог для теории простых чисел теоремы А. Н. Колмогорова о выходе марковских блужданий за предписанные допуски.

Исследования Й. П. Кубилюса продолжали Р. В. Уждавинис и М. Б. Барбан. Они расширили применяемые ими методы так, что появилась возможность перенесения результатов Кубилюса на множество сдвинутых простых чисел и другие интересные множества. В 1955 г. Ю. В. Линник, обобщая свои работы по теории неопределенных тернарных квадратичных форм, обнаружил применимость концепций эргодической теории к арифметике целочисленных матриц и исследо-



В. Г. Спринджук.



Й. П. Кубилюс.

ванию некоторых асимптотических свойств алгебраических полей. Необходимые для этого асимптотические теоремы арифметики целочисленных матриц разработали совместно Ю. В. Линник и Б. Ф. Скубенко. Последний значительно расширил эти теоремы, связав их с вычислением объемов некоторых фактор-пространств. В упоминавшейся выше монографии Постникова получены весьма ценные результаты. Ученики А. Г. Постникова Л. П. Усольцев, М. П. Минеев и другие продолжили его работы.

## Квадратичные формы. Геометрия чисел

Арифметика квадратичных форм — один из самых традиционных разделов теории чисел. Значительная часть отдельных результатов, относящихся к этой области, принадлежит Ферма, Эйлеру и Лежандру. Лагранж и Гаусс разработали арифметику бинарных квадратичных форм. Тернарные формы исследовали Гаусс, Эйзенштейн и Смит. Смит и Минковский перенесли методику их исследований на произвольные квадратичные формы. Зигель развил аналитическую арифметику квадратичных форм и существенно обобщил результаты Смита и Минковского. Большой вклад в теорию приведения квадратичных форм внес также Эрмит.

Арифметическая теория квадратичных форм была излюбленной темой исследований русских математиков. Ей посвящали свои работы А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев, А. А. Марков и Г. Ф. Вороной (по теории арифметических минимумов квадратичных форм). Подробно арифметика квадратичных форм изложена, например, в монографиях П. Бахмана <sup>1</sup> и М. Эйхлера <sup>2</sup>. С детальной историей арифметики квадратичных форм вплоть до 1920 г. можно ознакомиться по третьему тому книги Л. Диксона <sup>3</sup>.

### 1

#### Число классов бинарных квадратичных форм

Приведем несколько необходимых для дальнейшего изложения определений. Пусть

$$f = f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{i,j=1}^s a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

есть квадратичная форма с целыми коэффициентами. Если  $m$  — целое число, то всякое целочисленное решение уравнения

$$f(x_1, \dots, x_s) = m$$

называется представлением числа  $m$  формой  $f$ .

<sup>1</sup> P. Bachmann. Die Arithmetik der quadratischen Formen. Т. 1, 2. Leipzig, 1898—1923.

<sup>2</sup> M. Eichler. Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin, 1952.

<sup>3</sup> L. E. Dickson. History of the number theory. V. 3. Washington, 1920.

Основная задача арифметики квадратичных форм может быть сформулирована так: выяснить, представимо ли данное число  $m$  данной формой  $f$  или нет; в первом случае найти (или описать) все представления. К этой задаче сводится и вопрос о решении в целых числах общего уравнения второй степени с несколькими неизвестными.

Для решения диофантова уравнения

$$f(x_1, \dots, x_n) = m$$

известны алгоритмы, позволяющие, по крайней мере в принципе, решить основную задачу арифметики квадратичных форм. Однако часто достаточно знать, разрешимо это уравнение или нет, хотя бы для того, чтобы не применять «вхолостую» громоздкие алгоритмы, когда решений заведомо нет. Более детальную информацию доставляет количество представлений  $R(f, m)$  числа  $m$  формой  $f$ , а также количество тех представлений числа  $m$  формой  $f$ , которые удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, например такому условию: учитываемые представления лежат в заданной области пространства  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

Функция  $R(f, m)$  и ей родственные являются основными функциями арифметики квадратичных форм (предполагается, что рассматриваемые функции принимают лишь конечные значения; это всегда будет, в частности, если  $f$  — положительно определенная форма). Исследование этих функций и их обобщений занимает центральное место в современной арифметической теории квадратичных форм.

Изложение исследований советских математиков по арифметике квадратичных форм мы начинаем с одного из самых выдающихся достижений в этой области — элементарного доказательства формул Дирихле для числа классов <sup>4</sup> положительных бинарных квадратичных форм, полученного Б. А. Венковым.

Пусть  $m \neq 0$  — целое число. Обозначим  $h(-m)$  — число классов собственно примитивных <sup>5</sup> целочисленных бинарных квадратичных форм определителя  $m$ ; при этом, если  $m > 0$ , то рассматриваются только положительные формы. Общее число классов данного определителя сравнительно просто выражается этой важной арифметической функцией. Можно также заметить, что при изучении  $h(-m)$  достаточно ограничиться случаем, когда число  $m$  бесквадратно (т. е. не делится ни на какой квадрат целого числа, отличного от единицы), ибо есть формула, выражающая  $h(-ms^2)$  посредством  $h(-m)$ .

Дирихле с помощью разработанного им аналитического метода дал в 1839 г. следующие формулы для  $h(-m)$ , где  $m$  — бесквадратно.

Пусть  $m > 1$ . Тогда, если  $m \equiv 1 \pmod{4}$  или  $m \equiv 2 \pmod{4}$ ,

$$h(-m) = \sum \left( \frac{-m}{a} \right),$$

<sup>4</sup> Под классом форм понимается совокупность форм, преобразующихся одна в другую линейными унимодулярными целочисленными подстановками. Известно, что число классов целочисленных квадратичных форм данного определителя конечно.

<sup>5</sup> Форма  $ax^2 + 2bxy + cy^2$ , где  $a, b, c$  — целые числа, называется собственно примитивной, если общий наибольший делитель  $(a, 2b, c)$  равен единице.



где суммирование ведется по всем целым числам  $a$  с условиями

$$0 < a < m, \text{ онд } (a, 2m) = 1;$$

если же  $m \equiv 3 \pmod{4}$ , то

$$h(-m) = \sum \left( \frac{b}{m} \right),$$

где суммирование ведется по всем целым числам  $b$  с условиями

$$0 < b < \frac{m}{2}, \text{ онд } (b, m) = 1,$$

и  $\left( \frac{r}{s} \right)$  — символ Якоби.

Пусть  $m < 0$ . Тогда, если  $m \equiv 1 \pmod{4}$ ,

$$h(-m) = - \frac{2 - \left( \frac{2}{m} \right)}{\ln(T + U\sqrt{m})} \sum \left( \frac{b}{m} \right) \ln \sin \frac{\pi b}{m},$$

где суммирование ведется по всем целым числам  $b$  при условиях

$$0 < b < m, \text{ онд } (b, m) = 1;$$

если же  $m \equiv 2 \pmod{4}$  или  $m \equiv 3 \pmod{4}$ , то

$$h(-m) = - \frac{1}{\ln(T + U\sqrt{m})} \sum \left( \frac{a}{m} \right) \ln \sin \frac{\pi a}{m},$$

где суммирование ведется по всем целым числам  $a$  с условиями

$$0 < a < 4m, \text{ онд } (a, 2m) = 1,$$

и  $(T, U)$  — наименьшее целое положительное решение диофантова уравнения Пелля

$$t^2 - mu^2 = 1.$$

Б. А. Венков дал элементарное доказательство формул Дирихле для случаев  $m > 1$  и  $m \not\equiv 7 \pmod{8}$ . Это достижение было совершенно неожиданным для специалистов. В монографии Венкова «Элементарная теория чисел» (1937 г.) весьма подробно излагается классическая арифметика квадратичных форм и элементарное доказательство формул Дирихле для случаев  $m \equiv 1 \pmod{4}$  или  $m \equiv 2 \pmod{4}$ .

Рассмотрим другие работы, в которых исследуется функция  $h(-m)$ . В случае  $m < 0$  из формул Дирихле для  $h(-m)$  трудно вывести суждение об арифметической природе, а тем более о поведении  $h(-m)$ : в то время как  $h(-m)$  есть целое число, в формулы Дирихле входят трансцендентные функции  $\ln$  и  $\sin$ . Поэтому их интересно преобразовать к «рациональному» виду. Это удастся сделать, если в равенствах перейти к сравнениям по любому наперед заданному модулю (очевидно, что при достаточно большом модуле сравнение равносильно исходному равенству). Подобные исследования проводили А. А. Киселев и его ученик И. Ш. Славутский (а также параллельно иностранные ученые). Подробное изложение результатов и литература опубликованы в их

совместной работе «Преобразование формул Дирихле и арифметическое вычисление числа классов идеалов квадратичных полей». Приведем для примера простейший результат:

Пусть  $m = -p$ , где  $p$  — простое число вида  $4k + 1$ . Тогда

$$h(p)U \equiv TB_{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

где  $B_k$  — так называемое число Бернулли, определяемое рекуррентно символической формулой<sup>6</sup>

$$(B + 1)^k = B^k \quad (k = 2, 3, \dots)$$

с начальным условием  $B_0 = 1$  ( $B_0 = 1$ ,

$$B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, \dots).$$



Б. А. Венков.

Представление о росте  $h(-m)$  при  $m \rightarrow +\infty$  дает замечательная теорема Зигеля:

$$\ln h(-m) \sim \frac{1}{2} \ln m.$$

Ее новое доказательство по методу И. М. Виноградова было дано в 1950 г. Ю. В. Линником.

О поведении «в среднем»  $h(-m)$  дает возможность судить формула Виноградова с весьма сильным остаточным членом

$$\begin{aligned} h(-m) + h(-2) + h(-3) + h(-4) + \dots + h(-N) = \\ = \frac{4\pi}{21 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \right)} N^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\pi^2} N + O\left(N^{\frac{11}{16} + \varepsilon}\right), \end{aligned}$$

где  $\varepsilon > 0$  — сколь угодно малая величина. Первый член этой формулы был известен еще Гауссу, но ее доказательство никогда не было опубликовано.

В заключение упомянем о разнообразных рекуррентных соотношениях для числа классов бинарных квадратичных форм, которые начал получать еще Кронекер с помощью теории эллиптических функций (1857 г.). Я. В. Успенский, используя краткие указания Лиувилля, развил элементарный метод, по которому он получил как все ранее

<sup>6</sup> В этой формуле левую часть надо возвести в степень по биному Ньютона, а затем степени  $B$  сделать индексами:  $B^l \rightarrow B_l$ .

известные, так и новые формулы. Этими же вопросами занимался Б. А. Венков. В названной выше его монографии ясно изложен метод Успенского и приведены важнейшие соотношения (в том числе принадлежащие Венкову). По методике исследования, а также по содержанию тематика соотношений для числа классов тесно связана с тематикой «точных формул» для числа представлений, рассмотренной в следующем параграфе.

## 2

### Точные и асимптотические формулы для числа представлений.

#### Распределение целых точек на поверхностях второго порядка

Рассмотрим работы, в которых изучается поведение функции  $R(f, m)$  при фиксированной форме  $f$  и изменении представляемого числа  $m$ . При исследовании можно идти двумя путями: строить для  $R(f, m)$  асимптотические (при  $m \rightarrow \infty$ ) формулы с главными членами, выражающимися относительно простыми функциями и с возможно более точными остаточными членами, или получать для  $R(f, m)$  точные формулы. Однако точные формулы для  $R(f, m)$  имеют простой вид лишь тогда, когда род формы  $f$  состоит ровно из одного класса.

Пожалуй, наиболее замечательным примером такой формулы служит формула Гаусса для количества примитивных представлений  $r(m)$  положительного числа  $m$  суммой трех квадратов  $f = x^2 + y^2 + z^2$

$$r(m) = \begin{cases} 12h(-m) & \text{при } m \equiv 1 \pmod{4} \text{ или } 2 \pmod{4} \\ 8h(-m) & \text{при } m \equiv 3 \pmod{8} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Гаусс получил этот результат как следствие разработанной им в «Disquisitiones Arithmeticae» («Арифметических исследованиях») теории бинарных и тернарных квадратичных форм. Совершенно оригинальное новое доказательство было дано Б. А. Венковым, с помощью развитой им арифметики кватернионов.

Если же род формы содержит более одного класса<sup>7</sup>, то точная формула для  $R(f, m)$  распадается на два слагаемых: главный член, равный среднему количеству представлений числа  $m$  формами рода, и допол-

<sup>7</sup> Говорят, что две формы родственны или принадлежат одному роду, если одна из них преобразуется в другую линейной рациональной подстановкой определителя 1, причем общий знаменатель коэффициентов этой подстановки можно выбрать взаимно простым с любым наперед заданным натуральным числом. Совокупность таких форм называется родом форм. Род форм состоит из конечного числа классов одного и того же определителя. Таким образом, понятие родственности является более «грубым», чем понятие эквивалентности. Преимущество первого понятия перед вторым заключается в том, что существует простой критерий родственности двух форм: с каждой формой можно связать такие числа, называемые ее инвариантами или характерами, что две формы оказываются родственными тогда и только тогда, когда эти числа совпадают.

нительный член, имеющий сложную арифметическую природу (он выписывается как коэффициент степенного ряда, определяемого формой  $f$ ). Как правило, с помощью асимптотических формул можно заключить, что при  $m \rightarrow \infty$  дополнительный член бесконечно мал по сравнению с главным. Если же этого нет, то правильнее говорить не о «точной формуле», а о «соотношении» для  $R(f, m)$ .

Большое количество точных формул опубликовал в середине прошлого века Лиувилль (как правило, без доказательств). Впоследствии все формулы Лиувилля были доказаны различными способами. В частности, в доказательстве Я. В. Успенского развивается элементарный метод, основанный на тождествах Лиувилля. С помощью этого метода В. Я. Успенский доказал ряд формул Лиувилля, а также несколько новых точных формул для количества представлений формами с четырьмя и шестью переменными.

Значительная часть как ранее известных (но данных без доказательства), так и новых формул была получена с помощью одного элементарного метода Якоби А. З. Вальфишем. Ученик Вальфиса Г. А. Ломадзе, развивая известные методы, дал единый общий прием нахождения точных формул для количества представлений чисел произвольными положительными квадратичными формами. В частности, он получил новые формулы для количества представлений чисел диагональными формами с двумя, тремя и четырьмя переменными.

Точные формулы совершенно нового типа для представления чисел некоторыми положительными квадратичными формулами получены А. Н. Андриановым. Остаточные члены этих формул выражаются посредством следов эндоморфизмов Фробениуса для некоторых эллиптических кривых, определенных над конечными полями. Например, для  $f = x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 + 9x_4^2$  и простого числа  $p \equiv 1 \pmod{6}$

$$R(f, p) = \frac{3}{4}(p+1) - \sum_{x=0}^{p-1} \left( \frac{x^3+1}{p} \right),$$

где  $\left( \frac{a}{p} \right)$  — символ Лежандра.

Рассмотрим работы советских математиков, в которых получены и исследованы асимптотические формулы для  $R(f, m)$  и родственных ей функций. Любопытно, что толчком для этих исследований послужила одна из основных задач кристаллографии — задача определения кристаллической решетки по ее расстояниям. Эта задача равносильна следующей задаче теории квадратичных форм от трех переменных ( $n=3$ ): определить квадратичную форму по представляемым ею числам. В случае  $n=2$  (плоская кристаллическая решетка) задача была исчерпывающе решена Б. Н. Делоне<sup>8</sup>. Он показал, что для определения такой решетки достаточно знать первые пять наименьших расстояний между ее вершинами. В одном частном случае две существенно различ-

<sup>8</sup> См. обзор Б. Н. Делоне «Геометрия положительных квадратичных форм». Первоначально работа Делоне была помещена в «Журнале минералогического общества» (1933 г.).



А. В. Малышев.

ные решетки принципиально не различимы по расстояниям.

К сожалению, наиболее интересный случай пространственной решетки ( $n = 3$ ) до сих пор не рассмотрен с такой же полнотой. Однако сама проблема явилась источником исследований В. А. Тартаковского, а затем Ю. В. Линника и его учеников, где первоначальная кристаллографическая задача отступает на второй план, а основную роль начинает играть исследование функции  $R(f, m)$  и ее обобщений. Эти исследования важны в первую очередь для собственно арифметики квадратичных форм. Однако из полученных результатов можно извлечь и следствия, интересные для кристаллографии. Например, из исследований Линника (1940 г.) вытекает, что существует большое количество пространственных решеток, не

различимых по их расстояниям, если ограничиться рассмотрением достаточно больших расстояний. Если бы не было последнего условия, то исходная кристаллографическая задача была бы решена практически полностью.

Рассмотрим более подробно чисто арифметические результаты по исследованию  $R(f, m)$ . В. А. Тартаковский впервые получил и исследовал асимптотическую формулу, с некоторым остаточным членом, для  $R(f, m)$ , где  $f$  — положительная целочисленная форма с четырьмя и более переменными. При этом он использовал известный аналитический метод Харди — Литтлвуда, уточненный для случая квадратичных форм Клостерманом. Из асимптотической формулы Тартаковского, в частности, следует, что достаточно большое число  $m$  представимо формой  $f$ , коль скоро оно представимо хотя бы одной из форм рода, к которому принадлежит  $f$ . Более того, оказывается, что  $R(f, m)$  для всех форм рода имеет (при  $m \rightarrow \infty$ ) «примерно» одно и то же значение. Подобные результаты уже не распространяются на бинарные формы, принадлежащие многоклассным родам. Случай положительных тернарных форм находится как раз на границе, где явление качественно изменяется: как правило, здесь могут быть асимптотические формулы, хотя и известны примеры положительных тернарных форм  $f$ , когда таких формул заведомо нет. Случай тернарных форм не поддается исследованию методом Харди — Литтлвуда — Клостермана.

Ю. В. Линник, используя упомянутые исследования Б. А. Венкова по арифметике кватернионов и асимптотику Зигеля для  $\ln h(-m)$ , развил весьма своеобразный метод, с помощью которого доказал представимость достаточно больших чисел  $m$  формой некоторого рода (удобного рода, по терминологии Линника), коль скоро они представимы хотя бы одной из форм рода. Линнику принадлежит также план перенесения этого результата на более общие формы.

Ученик Ю. В. Линника А. В. Малышев показал, что метод Линника может быть уточнен так, чтобы с его помощью можно было получать асимптотические формулы для  $R(f, m)$ , где  $f$  — тернарная форма, и для аналогичных функций. А. В. Малышев разработал также пути применения метода Линника к общим положительным тернарным квадратичным формам.

Более полную информацию о решении основного диофантова уравнения арифметики квадратичных форм

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = m$$

по сравнению с функцией  $R(f, m)$  дает ее уточнение — функция  $R(\Omega_{f,m})$ , представляющая собой количество тех решений этого уравнения, которые удовлетворяют заданному комплексу условий  $\Omega_{f,m}$ . Эти условия могут быть самого различного типа: требуется, чтобы представление  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  принадлежало заданной области  $n$ -мерного пространства (т. е., говоря аналитически, удовлетворяло некоторым неравенствам), или требуется, чтобы  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  принадлежало определенному классу вычетов по заданному модулю, или же ставится задача, чтобы  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  было примитивным, и т. д. Если никакие условия не налагаются, то следует вернуться к функции  $R(f, m)$ .

Для более удобного формулирования полученных в этом направлении результатов будем пользоваться «геометрическим» языком. Рассмотрим  $n$ -мерное пространство. Уравнение  $f(x_1, \dots, x_n) = m$  изображает в нем поверхность второго порядка: эллипсоид, если форма  $f$  положительна и  $m > 0$ , гиперboloид того или иного типа, если форма  $f$  неопределенная. Точку  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  нашего пространства с целыми координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  назовем целой. По этой терминологии  $R(f, m)$  есть количество целых точек на поверхности  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = m$ , а  $R(\Omega_{f,m})$  — количество тех целых точек, для которых выполняется комплекс условий  $\Omega_{f,m}$ . Оказалось, что метод Линника применим и для изучения  $R(\Omega_{f,m})$ , где  $f$  — тернарная форма. Прежде всего отметим следующий результат.

Если  $m > 0$  и  $m \equiv 1 \pmod{4}$  или  $m \equiv 2 \pmod{4}$ , или  $m \equiv 3 \pmod{8}$  (т. е. если  $m$  примитивно представимо суммой трех квадратов), то при  $m \rightarrow +\infty$  целые точки асимптотически равномерно распределены по поверхности сферы  $x^2 + y^2 + z^2$ . Иными словами, если  $f = x^2 + y^2 + z^2$  и  $\Omega_{f,m}$  есть выпуклая область на поверхности сферы, то при  $m \rightarrow +\infty$

$$R(\Omega_{f,m}) \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} R(f, m),$$

где  $\lambda$  — площадь области  $\Omega_{f,m}$ , а  $\lambda_0$  — площадь всей сферы. Этот результат является ценным дополнением к формулам Гаусса для количества примитивных представлений числа  $m$  суммой трех квадратов.

В монографии А. В. Малышева «О представлении целых чисел положительными квадратичными формами» (1962 г.) функция  $R(\Omega_{f,m})$  исследуется в ее самом общем виде для всех положительных форм с числом переменных  $n \geq 3$ . Для этой функции получены асимптотические формулы, из которых, в частности, следует, что для  $n \geq 3$  при  $m \rightarrow$

$\rightarrow +\infty$ , во-первых, функции  $R(f, m)$  асимптотически одинаковы для всех форм рода  $n$ , во-вторых, целые точки распределены по поверхности эллипсоида  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = m$  асимптотически равномерно — в смысле эллиптической (точнее,  $f$ -эллиптической) метрики. Случай  $n = 3$  здесь рассматривается с помощью дальнейшего развития метода Линника. К случаю  $n \geq 4$  оказался применимым метод Харди — Литтлвуда — Клостермана в комбинации с несколькими аналитическими приемами Виноградова. Подробные формулировки и доказательства изложены в указанной монографии Малышева, где, в частности, содержатся и все ранее упомянутые результаты по асимптотическим формулам. В 1964 г. Малышев перенес эти результаты при  $n \geq 4$  на неопределенные формы.

Метод Линника применим и для неопределенных тернарных форм. Ю. В. Линник, в случае  $m > 0$ , Б. Ф. Скубенко, в случае  $m < 0$ , рассмотрели простейшую форму  $xz - y^2$ , тесно связанную с теорией приведения бинарных квадратичных форм. Грубо говоря, их результат можно формулировать так. При  $|m| \rightarrow \infty$  целые точки распределены по поверхности гиперboloида  $xz - y^2 = m$  асимптотически равномерно в смысле гиперболической метрики (метрики Лобачевского).

В последнее время в ленинградской школе теории чисел исследуются вопросы получения возможно более точных остаточных членов в асимптотических формулах для функции  $R(f, m)$  и родственных ей функций. Отправной точкой в этих исследованиях послужила выдающаяся работа швейцарского математика Эйхлера<sup>9</sup>, в которой выведена неулучшаемая асимптотическая формула для  $R(f, m)$ , в случае положительных кватернарных квадратичных форм  $f$ ,

$$R(f, m) = C(f, m) + O\left(m^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\right),$$

где  $C(f, m)$  — главный член, имеющий обычный вид. Метод Эйхлера включает использование весьма тонких и глубоких средств алгебраической геометрии.

А. Н. Андрианов обобщил результат Эйхлера на случай функции  $R'(f, m)$ , дающей количество представлений числа  $m$  формой  $f$ , принадлежащих заданному классу вычетов по данному модулю. Он же показал, что изучение зависимости  $R(f, mt^2)$  от  $t$  в случае положительной формы  $f$  с нечетным числом переменных приводит к вопросам, возникающим при изучении квадратичных форм с числом переменных на единицу больше. Это сведение в комбинации с результатом Эйхлера дает возможность в случае положительной тернарной квадратичной формы  $f$  оптимально оценить зависимость остаточного члена  $R(f, mt^2)$  от  $t$ .

О. М. Фоменко выявил зависимость остаточного члена формулы Эйхлера для положительных кватернарных форм от определителя  $d$  формы  $f$ . В частности, он доказал, что если  $m > cd^{14,01}$ , где  $c$  — абсо-

<sup>9</sup> M. Eichler. Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion. — Arch. für Math., 1954, Bd 5, S. 355—366.

лютная постоянная, и выполняются известные необходимые конгруэнциальные условия, то число  $m$  представимо формой  $f$ .

Обзор работ этого направления содержится в докладе Ю. В. Линника «Некоторые применения неевклидовых геометрий к теории характеров Дирихле, аналоги эргодических теорем», прочитанном на III Всесоюзном математическом съезде (1956 г.). В нем также намечены пути дальнейшего развития направления.

Другой круг вопросов связан с асимптотическими формулами усреднения  $R(f, m)$  по  $m$ .

Если  $f$  положительна, то сумма

$$S(f, M) = R(f, 0) + R(f, 1) + R(f, 2) + \dots + R(f, M)$$

есть количество целых точек в эллипсоиде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M.$$

Для  $S(f, M)$  легко записать асимптотическую формулу

$$S(f, M) \sim V(f, M) \quad (M \rightarrow \infty),$$

где  $V(f, M)$  — объем эллипсоида  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M$ .

Основная трудность исследования заключается в изучении остаточного члена

$$W(f, M) = S(f, M) - V(f, M),$$

в первую очередь в его оценках сверху.

Еще до приезда в СССР А. З. Вальфшпигель получил (1924 г.) оценку для  $n \geq 8$ :

$$W(f, M) = O\left(M^{\frac{n}{2}-1}\right).$$

В дальнейшем им были опубликованы многочисленные работы на эту тему, отраженные в его монографии «Целые точки в многомерных шарах» (1959 г.).

И. М. Виноградов с помощью своего метода получил очень точную асимптотическую оценку остаточного члена в случае  $f = x^2 + y^2 + z^2$ :

$$S(x^2 + y^2 + z^2, M) = \frac{4}{3} \pi M^{\frac{3}{2}} + O\left(M^{\frac{11}{16}+\varepsilon}\right).$$

### 3

#### Геометрия квадратичных форм. Теория приведения

Рассмотрим работы советских математиков по одному из основных отделов геометрии квадратичных форм — теории приведения. В частности, на теории приведения основывается алгоритм для решения диофантовых уравнений второй степени. Проблеме приведения исследовали еще Лагранж и Гаусс (в случае бинарных форм) и Зеебер (в случае положительных тернарных форм). Для



общих форм (как положительных, так и неопределенных) основы теории приведения в середине прошлого века заложил Эрмит. Он предложил новый метод, названный им методом непрерывного параметра. В дальнейшем Минковский и Вороной внесли в этот метод существенно новые идеи. В их трудах он превратился в новый метод теории чисел — геометрию чисел. Другим стимулом для разработки этого направления послужила математическая кристаллография. Исследования по общей геометрии чисел и ее приложениям к кристаллографии рассмотрены ниже (§ 5). В этом и следующем параграфах рассматриваются приложения геометрии чисел, относящиеся к теории квадратичных форм: теории приведения и ее разделу — теории арифметических минимумов квадратичных форм. Теория приведения квадратичных форм тесно связана с основной задачей математической кристаллографии — задачей правильного деления пространства.

В первую очередь остановимся на упоминавшемся выше обзоре Б. Н. Делоне, посвященном геометрии положительных квадратичных форм. Во второй главе этого обзора критически рассмотрены с единой точки зрения все важнейшие способы приведения положительных квадратичных форм, существовавшие ранее. Делоне сформулировал узловые задачи теории приведения, нуждавшиеся в разрешении. Заметим, что еще до сих пор проблематика Делоне не исчерпана полностью. Несомненно, этот обзор стимулировал исследования советских ученых, и прежде всего глубокие исследования Венкова, по теории приведения.

Рассмотрим теорию приведения (в узком смысле) положительных квадратичных форм, т. е. задачу установления эквивалентности двух форм и отыскания хотя бы одной подстановки, переводящей первую форму во вторую. Геометрия чисел предлагает следующий подход к этой проблеме. Будем рассматривать квадратичные формы

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

с произвольными вещественными (а не только целыми) коэффициентами  $a_{ij}$  ( $i, j=1, \dots, n$ ). Каждой такой форме взаимно однозначно отвечает точка  $(a_{11}, \dots, a_{nn}, a_{12}, \dots, a_{n-1,n})$   $\frac{n(n+1)}{2}$ -мерного пространства, которое в дальнейшем будем называть пространством коэффициентов. Совокупность положительно определенных форм образует открытый конус  $\mathfrak{K}$  этого пространства. На границе конуса лежат положительные формы нулевого определителя, следовательно, замыкание  $\mathfrak{K}$  нашего конуса (т. е. множество  $\mathfrak{K}$  вместе с его границей) есть совокупность положительных форм.

Обозначим  $\Gamma$  совокупность линейных целочисленных преобразований  $n$  переменных с определителем, равным  $\pm 1$ . Применим какое-либо преобразование из  $\Gamma$  к квадратичной форме  $f$ , преобразующее ее в какую-то другую форму. Соответственно этому преобразуются точки пространства коэффициентов, причем точки конуса  $\mathfrak{K}$  непременно преобразуются в точки этого же конуса. Будем говорить, что две точ-

ки пространства коэффициентов эквивалентны по  $\Gamma$ , если соответствующие квадратичные формы преобразуются одна в другую некоторой подстановкой переменных из  $\Gamma$ .

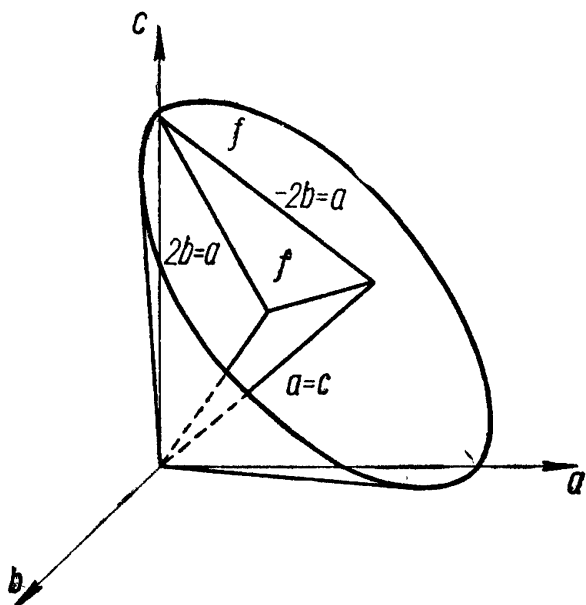
Область  $\mathfrak{F}$  пространства коэффициентов называется областью приведения положительных квадратичных форм, или фундаментальной областью конуса по группе  $\Gamma$ , если выполняются следующие условия:  $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{R}$ ; всякая точка области  $\mathfrak{R}$  эквивалентна по  $\Gamma$  точке области  $\mathfrak{F}$  (т. е. области  $\mathfrak{F}$ , взятой с ее границей); две различные точки области  $\mathfrak{F}$  не эквивалентны по  $\Gamma$ . При этом предполагается, что когда отыскивается в области  $\mathfrak{F}$  точка, эквивалентная по  $\Gamma$  заданной точке из  $\mathfrak{R}$ , то отыскивается также соответствующая подстановка. Иными словами, область приведения положительных квадратичных форм — это такая совокупность положительных форм, для которой каждая положительная форма эквивалентна форме этой совокупности, в то время как формы самой совокупности не эквивалентны одна другой, за исключением относительно малого числа особых «граничных» форм.



Б. Н. Делоне.

Из сказанного выше ясно, что построение области приведения равносильно решению основной задачи теории приведения. Действительно, если даны две формы, то при сопоставлении им соответствующих точек области приведения  $\mathfrak{F}$  видно, что если хотя бы одна из этих точек лежит внутри области  $\mathfrak{F}$ , то для эквивалентности форм необходимо совпадение точек. При этом отыскивается и соответствующее преобразование. Если же обе точки находятся на границе  $\mathfrak{F}$ , то возникают некоторые технические трудности, которые все же можно преодолеть. Конечно, для удобства решения задачи приведения желательно, чтобы область приведения имела возможно более простой вид. Пожалуй, простейшим возможным типом области приведения является множество внутренних точек многогранного угла с конечным числом граней пространства коэффициентов. Аналитически это означает, что форма принадлежит области приведения, коль скоро ее коэффициенты удовлетворяют конечному числу наперед выписанных линейных неравенств.

Специальная область приведения положительных квадратичных форм для любого числа переменных была построена Эрмитом. Минковский дал ей другое, более наглядное определение. Область Эрмита — Минковского представляет собой внутренность выпуклого многогранного угла с конечным числом граней. Подробно область приведения Эрмита — Минковского, а также другие специальные области приведения рассмотрены в обзоре Делоне. Например, для  $n = 2$ , т. е. для положительных бинарных форм  $ax^2 + 2bxy + cy^2$ , пространство коэффициен-



Специальная область приведения положительных бинарных квадратичных форм.

тов  $\{a, b, c\}$  трехмерно. Конус определяется неравенством  $ac - b^2 > 0$ , а область приведения  $\mathfrak{F}$  — линейными неравенствами  $|2b| < a < c$ . Таким образом, здесь областью приведения является трехгранник с гранями  $a = c$ ,  $2b = a$  и  $-2b = a$  (см. рисунок).

Написанные выше неравенства, определяющие  $\mathfrak{F}$ , совпадают с условиями приведения положительных бинарных квадратичных форм, данными Лагранжем и Гауссом. Это совпадение оказалось не случайным. С помощью весьма простого рассуждения Делоне для случая  $n = 2$  показал, что если две односвязные области приведения имеют общую внут-

реннюю точку, то они совпадают. Таким образом, для бинарных форм область приведения по-существу единственна (точнее, единственна с точностью до эквивалентности по группе  $\Gamma$ ).

Делоне поставил вопрос о справедливости подобного утверждения и для  $n > 2$ . Б. А. Венков дал отрицательный ответ на этот вопрос и этим сделал важный вклад в теорию приведения. Он построил весьма обширный класс областей приведения  $V(\varphi)$ , зависящих от некоторой вещественной формы  $\varphi$  как от параметра. К сожалению, пока не ясно, является ли  $V(\varphi)$  наиболее общим видом области приведения, или существуют области приведения, выходящие за рамки конструкции  $V(\varphi)$ . Область  $V(\varphi)$  оказывается внутренностью многогранного угла с конечным числом граней. В своих построениях Венков использовал конструкцию Г. Ф. Вороного, предварительно упростив ее и геометризовав. Если непрерывно изменять параметр  $\varphi$ , то в случае  $n > 2$  область  $V(\varphi)$  непрерывно изменяется. Это и дает, в частности, отрицательный ответ на вопрос Делоне.

Подобно тому как в арифметике положительных форм центральную роль играет теория приведения (в узком смысле), в арифметике неопределенных форм ведущее место занимает теория автоморфизмов. Так же, как и в теории приведения, для исследования автоморфизмов геометрия чисел предлагает использовать построение фундаментальных областей. Пусть  $G_f$  — совокупность всех автоморфизмов (целочисленных, что далее оговаривается) формы  $f$ . Рассмотрим  $n$ -мерное пространство, которое, в соответствии с предыдущим, можно назвать пространством переменных. Множество  $f(x_1, \dots, x_n) > 0$  представляет собой совокупность всех внутренних точек бесконечного конуса. Одну из его плоскостей обозначим  $K$ . Говорим, что  $F$  есть фундаментальная область

совокупности автоморфизмов  $G_f$  в конусе  $K$ , если 1)  $F \subset K$ ; 2) всякая точка из  $K$  эквивалентна по  $G_f$  точке из  $F$  (две точки эквивалентны по  $G_f$ , если найдется преобразование из  $G_f$ , переводящее одну точку в другую); 3) никакие две различные точки из  $F$  не эквивалентны по  $F$ .

Б. А. Венков впервые построил фундаментальную область группы автоморфизмов  $G_f$  для неопределенной целочисленной формы  $f$  от  $n$  переменных, которая вещественной подстановкой может быть преобразована в форму вида  $x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$ . Эта область строится в виде внутренности выпуклого  $n$ -мерного многогранника с конечным числом граней. Здесь также используется конструкция Г. Ф. Вороного.

Что касается неопределенных форм с произвольной сигнатурой, то впоследствии немецкий математик Зигель построил и для них фундаментальную область, но существенно более сложную — с криволинейной границей.

Исследования советских математиков по геометрии квадратичных форм, как по теории приведения, так и по теории арифметических минимумов, с единой точки зрения теории правильного деления пространства рассмотрены Венковым в его обзоре «Метрика Лобачевского и метрика Вороного в геометрии чисел», доложенном на III Всесоюзном математическом съезде (1956 г.).

## 4

### Теория арифметических минимумов

Пусть  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  — квадратичная форма с вещественными коэффициентами и определителем  $d(f) = \det f$ . Арифметическим минимумом формы  $f$  будем называть величину

$$M(f) = \inf |f(x_1, \dots, x_n)|,$$

где точная нижняя граница берется по всем целочисленным значениям аргумента  $(x_1, \dots, x_n)$ , отличным от  $(0, \dots, 0)$ . В наиболее интересных случаях, например в случае, когда  $f$  — положительная форма, эта точная нижняя граница фактически достигается, и функция имеет минимум в полном смысле слова. Заметим, что арифметический минимум можно понимать в гораздо более широком смысле, а именно: это точная нижняя граница значений заданной функции, когда аргумент пробегает некоторое множество целых точек. Однако такое общее понятие арифметического минимума нам в дальнейшем не потребуется.

Исследование  $M(f)$  существенно важно для теории приведения, в связи с чем теория арифметических минимумов естественным образом включается в теорию приведения. Однако функционал  $M(f)$  представляет и общий интерес для арифметики квадратичных форм. В частности, для любого числа  $M > M(f)$  диофантово неравенство

$$|f(x_1, \dots, x_n)| < M$$

имеет решение в целых числах  $x_1, \dots, x_n$ , не равных одновременно нулю.

Эрмит в середине прошлого века доказал, что существует постоянная  $c_n$ , которая зависит только от  $n$  и для которой

$$M(f) \leq c_n \sqrt[n]{|d(f)|}.$$

Он показал, что можно взять  $c_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ . Эта постоянная неулучшаема лишь в случае положительных бинарных форм, т. е. существует положительная бинарная форма  $f_0$ , для которой  $M(f_0) = \sqrt[n]{\frac{4}{3}} \sqrt[n]{d(f_0)}$  (можно положить  $f_0 = x^2 + xy + y^2$ ). Лучшую для больших  $n$  (но заведомо неточную) постоянную  $c_n$  указал Минковский с помощью доказанной им основной теоремы геометрии чисел — теоремы о выпуклом теле в решетке.

Большое внимание отысканию точных постоянных  $c_n$  уделили русские математики А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, Г. Ф. Вороной (для определенных форм) и А. А. Марков (для неопределенных форм). Коркин и Золотарев ввели важное понятие предельной или экстремальной формы, т. е. такой положительной формы  $f$ , для которой величина  $\frac{M(f)}{\sqrt[n]{d(f)}}$  достигает локального максимума в пространстве коэффициентов формы. Оказалось, что для каждого  $n$  есть лишь конечное число существенно различных предельных форм. Они нашли все предельные формы для  $n \leq 5$  и точные значения  $c_4$  и  $c_5$ . Точные значения  $c_2$  и  $c_3$  были известны еще Гауссу и Зееберу. Вороной построил алгоритм для отыскания всех предельных форм с данным числом переменных, решив тем самым в принципе полностью задачу исследования арифметических минимумов положительных квадратичных форм. Весьма подробное изложение исследований Коркина, Золотарева, Вороного и Маркова с интересными комментариями содержится в книге Делоне «Петербургская школа теории чисел»<sup>10</sup>.

Глубокие исследования по арифметическим минимумам неопределенных квадратичных форм от двух, трех и четырех переменных проводил А. А. Марков. Все советские исследования по теории арифметических минимумов квадратичных форм продолжали именно это направление.

Основополагающим исследованием по теории арифметических минимумов неопределенных бинарных квадратичных форм является магистерская диссертация А. А. Маркова «О бинарных квадратичных формах положительного определителя»<sup>11</sup> (1880 г.).

Марков доказал существование такой бесконечно убывающей последовательности положительных чисел

$$N_1 = \frac{4}{5}, \quad N_2 = \frac{1}{2}, \quad N_3 = \frac{100}{221}, \quad N_4 = \frac{676}{1517}, \dots$$

<sup>10</sup> Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947.

<sup>11</sup> Наша терминология отличается от терминологии Маркова. Для нас определитель неопределенной бинарной формы — отрицательное число.

и соответствующей ей последовательности неопределенных бинарных форм

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= x^2 - xy - y^2, & \varphi_2 &= x^2 - 2xy - y^2, \\ \varphi_3 &= 5x^2 - 11xy - 5y^2, & \varphi_4 &= 13x^2 - 29xy - 13y^2, \dots,\end{aligned}$$

что 1) для любой неопределенной бинарной формы справедливо неравенство

$$M(f) \leq \sqrt{N_1} \sqrt{|d(f)|},$$

которое достигается для  $f = \varphi_1$ ; 2) если не существует такого вещественного числа  $\lambda$ , что  $f \sim \lambda\varphi_1$ , то

$$M(f) \leq \sqrt{N_2} \sqrt{|d(f)|},$$

причем неравенство достигается для  $f = \varphi_2$ ; 3) если не существует такого вещественного числа  $\lambda$ , что  $f \sim \lambda\varphi_1$ , или  $f \sim \lambda\varphi_2$ , то

$$M(f) \leq \sqrt{N_3} \sqrt{|d(f)|},$$

причем неравенство достигается для  $f = \varphi_3$ ; 4) если не существует такого вещественного числа  $\lambda$ , что  $f \sim \lambda\varphi_1$ , или  $f \sim \lambda\varphi_2$ , ..., или  $f \sim \lambda\varphi_{k-1}$ , то

$$M(f) \leq \sqrt{N_k} \sqrt{|d(f)|},$$

причем неравенство достигается для  $f = \varphi_k$ , и т. д. Он предложил способ построения чисел  $N_k$  и соответствующих им форм  $\varphi_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ):

$$N_k = \frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{Q_k^2}},$$

где  $N_k$  пробегают упорядоченные по абсолютной величине решения диофантова уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

С помощью решений этого уравнения строятся также формы  $\varphi_k$ . Все это в высшей степени тонкое исследование базируется на изучении некоторых цепных дробей специального вида. Эти же дроби позволяют решить и записанное выше диофантово уравнение.

Последовательность чисел

$$\sqrt{N_1}, \sqrt{N_2}, \sqrt{N_3}, \dots$$

будем называть последовательными арифметическими минимумами или спектром Маркова арифметических минимумов, неопределенных бинарных квадратичных форм. Заметим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{N_k} = \frac{2}{3}.$$

Пусть  $\lambda > \frac{2}{3}$ . Тогда существует лишь конечное количество классов

неопределенных бинарных форм  $f$  данного определителя  $d(f)$ , для которых

$$M(f) = \lambda \sqrt{|d(f)|}.$$

Этим неопределенные формы отличаются от определенных. Марков показал, что существует бесконечное множество классов форм  $f$  с заданным определителем  $d(f)$ , для которых

$$M(f) = \frac{2}{3} \sqrt{|d(f)|}.$$

Совершенно оригинальная конструкция на плоскости Лобачевского, с помощью которой получено новое геометрическое и весьма прозрачное доказательство всех результатов Маркова о минимумах неопределенных бинарных форм, принадлежит Д. С. Горшкову<sup>12</sup>. Метод Горшкова приложим и к некоторым другим вопросам теории арифметических минимумов.

П. Г. Когония и Б. Н. Делоне со своими учениками А. М. Виноградовым и И. М. Фуксом получили интересные результаты о структуре спектра Маркова между 0 и  $\frac{2}{3}$ , т. е. о минимумах неопределенных бинарных квадратичных форм, не эквивалентных формам вида

$$\lambda\varphi_1, \lambda\varphi_2, \lambda_3\varphi_3, \dots$$

Марков рассмотрел также вопрос о минимумах неопределенных тернарных и кватернарных квадратичных форм. И в этом случае оказалось, что спектр арифметических минимумов (определяемый аналогично предыдущему), по крайней мере вначале, — дискретный. Однако Маркову не удалось получить таких исчерпывающих результатов, как в случае бинарных форм. Для неопределенных тернарных форм он нашел лишь первые три последовательных минимума. Диксон и Оппенгейм добавили к ним четвертый. Венков с помощью разработанного им метода «внешней вершины» нашел первые 11 арифметических минимумов неопределенных тернарных квадратичных форм — четыре ранее известных и семь новых.

## 5

### Правильное деление пространства

Рассмотрим исследования советских математиков по «общей» геометрии чисел и ее приложениям к математической кристаллографии<sup>13</sup>. В геометрии чисел, основы которой заложены трудами Эрмита, Минковского и Вороного, систематически, с единой

<sup>12</sup> См. его докторскую диссертацию «Геометрия Лобачевского в связи с некоторыми вопросами арифметики», в основных чертах выполненную еще до 1947 г. и защищенную в Ленинградском университете в 1954 г. Краткие сведения о ней даны в упомянутом обзоре Б. А. Венкова. Впоследствии независимо от Горшкова идейно близкий, но более частный метод предложил Кон (Н. Cohn. Approach to Markoff's minimal forms through modular functions.— Ann. of Math., 1955, v. 61 p. 1—12).

<sup>13</sup> Исследования по математической кристаллографии подробно освещены в кн.: Б. Делоне, Н. Падуров, А. Александров. Математические

точки зрения, геометрические методы прилагаются к решению задач из различных разделов теории чисел, в первую очередь из теории диофантовых приближений.

Важнейшие работы советских математиков в этой области относятся к теории правильного деления пространства. Эта теория, с одной стороны, является базой математической кристаллографии, с другой — обобщает основные понятия геометрической теории квадратичных форм (см. обзор Делоне).

Пусть  $G$  — дискретная группа движений  $n$ -мерного евклидова пространства  $R^n$  с ограниченной фундаментальной областью («федоровская группа»). Выпуклый ограниченный многогранник  $S$  называется стереоэдром, если образы  $S$  при движениях группы покрывают все пространство и не имеют попарно общих внутренних точек. При этом допускается существование движений из группы  $G$ , переводящих  $S$  в себя. Такое разбиение  $R^n$  на стереоэдры называется правильным делением пространства. Разбиение называется нормальным, если стереоэдры, входящие в него, соприкасаются один с другим по целым граням. Если  $G$  есть группа параллельных переносов, то стереоэдр называют параллелоэдром. Наиболее важным частным случаем нормального стереоэдра является область Дирихле — Вороного, т. е. множество точек пространства, отстоящих от фиксированной точки  $A$  не далее, чем от всякого образа  $A$  при движении группы  $G$ .

Теорией правильного деления трехмерного пространства в связи с вопросами кристаллографии занимался русский ученый Е. С. Федоров. Глубокую теорию параллелоэдров в  $n$ -мерном пространстве построил Вороной. Советские математики успешно продолжали эти исследования.

Фундаментальный результат Делоне заключается в следующем: число топологически разных правильных нормальных разбиений  $n$ -мерного евклидова пространства ограничено в зависимости только от  $n$ . Еще в 1928 г. Делоне развил метод «пустого шара», имеющий многочисленные применения в теории правильного деления пространства. С помощью этого метода существенно упрощаются исследования Вороного по теории параллелоэдров<sup>14</sup>. Метод пустого шара позволил построить алгоритм для вычисления всех стереоэдров, являющихся областями Дирихле — Вороного. Делоне нашел все параллелоэдры в четырехмерном пространстве. В трехмерном пространстве эта задача была решена Е. С. Федоровым.

Замечательный результат по теории правильного деления пространства принадлежит Венкову. Он доказал, что всякий параллелоэдр является нормальным, т. е. что ему отвечает нормальное разбиение пространства. Обзор работ этого направления дан в

---

основы структурного анализа кристаллов и определение основного параллелепипеда повторяемости при помощи рентгеновских лучей. ГТТИ, Л.— М., 1934; см. также главы I—III упомянутого выше обзора Б. Н. Делоне. Мы ограничимся лишь основой вопроса — теорией правильного деления пространства.

<sup>14</sup> Более подробно об этом см.: Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел.



упомянутом выше докладе Венкова на III Всесоюзном математическом съезде.

Остановимся кратко на других работах по геометрии чисел. Делоне разработал алгоритм «разделенных параллелограммов», позволивший ему, в частности, дать геометрически прозрачное доказательство теоремы Минковского о произведении двух линейных неоднородных форм.

Если даны формы

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x + \beta y + \gamma, \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma', \end{array} \right\} \delta = \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  — вещественные числа, то существуют целые числа  $x$  и  $y$ , для которых

$$|(\alpha x + \beta y + \gamma)(\alpha' x + \beta' y + \gamma')| \leq \frac{1}{4} |\delta|.$$

Б. Н. Делоне и С. С. Рышков доказали, что минимум плотности решетчатого покрытия четырехмерного пространства равными шарами осуществляется покрытием с решеткой, метрическая форма которой

$$4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$$

есть главная форма Вороного 1-го типа. Тем самым была впервые вычислена плотность редчайшего покрытия.

И. Н. Санов и А. В. Малышев получили новые варианты доказательства одной из основных теорем геометрии чисел — теоремы Минковского — Главка. Малышев обобщил эту теорему на бесконечные звездные тела.

## Алгебраическая теория чисел

Алгебраическая теория чисел всегда занимала важное место в работах русских математиков. Достаточно вспомнить труды Н. Е. Золотарева по теории идеалов, Г. Ф. Вороного — о кубическом поле, А. А. Маркова — о бинарных квадратичных формах. Советские ученые особенно интенсивно изучают поля алгебраических чисел и неопределенные уравнения. Для современного развития этих направлений характерна их глубокая связь с алгебраической геометрией и вытекающим отсюда применением аналитических и топологических средств исследования. В алгебраической теории чисел советскими математиками получены выдающиеся достижения. Некоторые из них кратко излагаются в настоящем разделе. Более подробный обзор исследований по алгебраическим числам дан в докладе И. Р. Шафаревича «Поля алгебраических чисел», прочитанном на Стокгольмском международном конгрессе математиков (1962 г.). Систематическое изложение многих вопросов теории алгебраических чисел и неопределенных уравнений можно найти в книге З. И. Боровича и И. Р. Шафаревича «Теория чисел» (1964 г.).

## Поля алгебраических чисел

Одной из фундаментальных теорем теории распределения простых чисел является знаменитая теорема Дирихле (1837 г.) о прогрессиях, устанавливающая, что арифметическая прогрессия  $mx + n$ ,  $(m, n) = 1$  имеет бесконечно много простых чисел. Н. Г. Чеботареву принадлежит весьма широкое обобщение этой теоремы Дирихле, связанное с полями алгебраических чисел. Обобщение Чеботарева оказало большое влияние на последующее развитие теории алгебраических чисел. Всякое поле алгебраических чисел  $k$ , нормальное над полем рациональных чисел  $Q$ , позволяет естественным образом разбить множество всех простых чисел на конечное число непересекающихся классов. Для этого отбрасывают сначала конечное число простых чисел — делителей дискриминанта поля  $k$ . Если  $p$  — какое-нибудь из оставшихся простых чисел, то пусть  $\wp$  — простой делитель  $p$  в поле  $k$ . В группе Галуа  $G$  поля  $k$  над  $Q$  найдется только один элемент  $\sigma$ , такой, что для всех целых чисел  $\alpha$  поля  $k$  будет выполняться сравнение

$$\sigma(\alpha) \equiv \alpha^{\wp} \pmod{\wp}.$$

Когда  $\wp$  пробегает все делители числа  $p$ ,  $\sigma$  пробегает класс сопряженных элементов в группе  $G$ , который обозначим  $\left(\frac{k}{p}\right)$ . Естественно возникает два вопроса: всякий ли класс сопряженных элементов в группе  $G$  имеет вид  $\left(\frac{k}{p}\right)$  и сколько существует простых чисел  $p$  с фиксированным классом  $\left(\frac{k}{p}\right)$ .

Если поле является полем деления круга на  $m$  частей  $k = Q(\xi)$ ,  $\xi^m = 1$ , то класс  $\left(\frac{k}{p}\right)$  состоит из элемента  $\sigma$ , такого, что  $\sigma(\xi) = \xi^p$  (так как поле  $k$  абелево). Поэтому указанное выше разбиение простых чисел является в данном случае разбиением на прогрессии  $mx + a$ . Теорема Дирихле о прогрессиях является для кругового поля ответом на оба вопроса: всякий элемент группы Галуа имеет вид  $\left(\frac{k}{p}\right)$  и существует бесконечно много простых чисел с заданным  $\left(\frac{k}{p}\right)$ . Более того, Дирихле установил, что все простые числа распределены по прогрессиям равномерно в смысле плотности. При этом плотностью множества простых чисел  $\{p_i\}$  называется такое число  $\lambda$ , что величина

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i^{-s} - \lambda \ln \frac{1}{s-1}$$

ограничена при  $s \rightarrow 1$  справа. Множество всех простых чисел обладает плотностью, равной единице, поэтому плотность любого множества

простых чисел не превосходит единицу. Дирихле показал, что множество простых чисел в прогрессии  $mx + a$  имеет положительную плотность  $\frac{1}{\varphi(m)}$ , где  $\varphi$  — функция Эйлера.

Вопросом о плотности множества простых чисел с заданным классом сопряженных элементов  $\left(\frac{k}{p}\right)$  в случае произвольного нормального расширения до Чеботарева занимался Фробениус. Ему удалось получить некоторые результаты. Назовем обобщенным классом сопряженных элементов группы  $G$  множество элементов, сопряженных с  $s^q$ , где  $s$  — фиксированный элемент,  $q$  — взаимно просто с порядком элемента  $s$ . Обобщенный класс состоит из нескольких классов. Фробениус доказал, что множество простых чисел  $p$ , у которых  $\left(\frac{k}{p}\right)$  содержится в фиксированном обобщенном классе, обладает плотностью и эта плотность равна отношению числа элементов в обобщенном классе к порядку группы. В случае кругового поля теорема Дирихле не является следствием теоремы Фробениуса, а представляет собой более тонкий факт.

Чеботареву удалось полностью решить вопрос о плотностях простых чисел с заданным классом  $\left(\frac{k}{p}\right)$ . Согласно теореме Чеботарева множество простых чисел с заданным классом сопряженных элементов в группе Галуа обладает плотностью и эта плотность равна отношению числа элементов в классе к порядку группы Галуа. Доказательство теоремы основано на приеме, который оказался очень полезным и в других вопросах теории алгебраических чисел. Он состоит в расширении заданного поля с помощью подходящего поля деления круга. Точнее: можно найти такое поле деления круга  $K$ , что простые числа, принадлежащие некоторому обобщенному классу в поле  $k$  и классу в поле  $K$ , принадлежат к одному классу в поле  $k$ . Это позволяет свести изучение простых чисел в заданном классе поля  $k$  к изучению распределения простых чисел в обобщенном классе и изучению классов и обобщенных классов в поле деления круга. Поскольку ответы на эти вопросы дают теоремы Фробениуса и Дирихле, то отсюда и следует теорема Чеботарева.

Метод расширения с помощью полей деления круга, предложенный Чеботаревым, нашел весьма важные применения в теории полей классов. Теория полей классов состоит в описании всех абелевых расширений поля алгебраических чисел  $k$  в терминах самого поля  $k$ . Она была создана трудами Гильберта, Фуртвенглера и Такаги. Согласно Такаги каждому абелеву расширению  $K$  поля  $k$  можно сопоставить некоторый идеал  $\mathfrak{q}$  поля  $k$  (ведущий идеал). Фактор-группа группы дробных идеалов поля  $k$ , взаимно простых с ведущим идеалом  $\mathfrak{q}$  по подгруппе главных идеалов вида  $(\alpha)$ , где  $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{q}}$ , называется группой классов идеалов  $(\text{mod } \mathfrak{q})$ . Группа Галуа поля  $K$  изоморфна фактор-группе классов идеалов  $(\text{mod } \mathfrak{q})$  по подгруппе, порожденной нормами идеалов из поля  $K$ . Изоморфизм этих двух групп доказывается с помощью вычисления их инвариантов, а не путем построения естественного изоморфизма. Этот недостаток теории Такаги был уст-

ранен Артином. Вначале (1924 г.) Артин предположил, что между указанными группами существует естественный изоморфизм: если взять в качестве представителя фактор-группы группы классов идеалов  $(\text{mod } \mathfrak{q})$  простой идеал  $\mathfrak{p}$  поля  $k$  и сопоставить ему символ Фробениуса  $\left(\frac{k}{\mathfrak{p}}\right)$ , который является элементом группы Галуа, а не смежным классом, из-за абелевости, то это и будет требуемым изоморфизмом. Однако он не смог сразу доказать эту теорему. У него возникли такие же трудности, как и при переходе от теоремы Фробениуса к теореме Чеботарева, т. е. просто получить, что это соответствие является взаимно однозначным на обобщенных классах обеих групп, но трудно перейти к отдельным элементам. В 1927 г. Артин доказал эту теорему (ныне она называется законом взаимности Артина). Его доказательство основано на идее расширения поля с помощью поля деления круга, принадлежащей Чеботареву. Артиновский закон взаимности вызвал коренную перестройку теории полей классов. Его значение состоит в том, что он устанавливает самую непосредственную связь между арифметикой поля и его группой Галуа.

Между полями алгебраических чисел и полями алгебраических функций существуют весьма далеко идущие аналогии. Например, простые идеалы в полях алгебраических чисел играют такую же роль, как и точки римановой поверхности, простые делители дискриминанта соответствуют точкам ветвления римановой поверхности, неразветвленные расширения полей алгебраических чисел соответствуют геометрическим накрытиям. Уже Кронекер понимал, как важно переносить в теорию алгебраических чисел результаты из теории алгебраических функций, которые можно получать аналитическими средствами. Одной из самых важных частей теории алгебраических функций является теория абелевых дифференциалов. Аналогами вычетов абелевых дифференциалов в полях алгебраических чисел являются символы норменных вычетов. В каждом поле алгебраических чисел  $k$ , содержащем корень степени  $n$  из единицы, вводится символ  $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ , сопоставляющий двум числам  $\alpha$  и  $\beta$  из поля  $k$  и простому идеалу  $\mathfrak{p}$  корень степени  $n$  из единицы. При фиксированных  $\alpha$  и  $\beta$  между величинами  $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$  выполняется фундаментальное соотношение

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1,$$

где произведение берется по всем простым идеалам поля  $k$ . Это соотношение является теоретико-числовым аналогом теоремы о том, что сумма вычетов абелева дифференциала во всех точках римановой поверхности равна нулю.

Теория символа норменного вычета была создана Гильбертом для случая  $n = 2$  и затем, главным образом в работах Хассе, перенесена на произвольное  $n$ . Однако, хотя символ норменного вычета  $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ ,

как и вычета абелева дифференциала  $\alpha d\beta$ , зависит только от поведения  $\alpha$  и  $\beta$  в точке  $p$ , определение символа норменного вычета глобально, т. е. зависит от поля  $k$  в целом.

Принципиальные результаты по теории символов норменного вычета принадлежат И. Р. Шафаревичу, который дал явную локальную конструкцию для символа  $\left(\frac{\alpha, \beta}{p}\right)$ , полностью аналогичную определению вычета абелева дифференциала. Оказалось, что разложению алгебраической функции в окрестности точки римановой поверхности соответствует разложение алгебраического числа в некоторое произведение. Если над произведениями, в которые разлагаются числа  $\alpha$  и  $\beta$ , произвести те же самые действия, которые производятся над разложениями функций в ряды при нахождении вычета, то получается значение  $\left(\frac{\alpha, \beta}{p}\right)$ . Самым трудным является доказательство независимости символа от выбора локальных унифицирующих. Определение символа норменного вычета дало возможность Шафаревичу найти самый общий закон взаимности в полях алгебраических чисел. Общий закон взаимности выражает в явном виде отношение символов степенных вычетов  $n$ -й степени  $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$  посредством  $\alpha$  и  $\beta$ . Однако это отношение выражается посредством символа норменного вычета

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \prod_{p/n} \left(\frac{\alpha, \beta}{p}\right),$$

что и является общим законом взаимности.

Другим важным применением теории Шафаревича является более естественное построение теории полей классов, основанное на локальной теории полей классов и на теории символа норменного вычета. Такое построение теории полей классов было предложено А. И. Лапиным в 1954 г.

Одним из самых замечательных последних достижений в теории алгебраических чисел является отрицательное решение классической проблемы башни полей классов. Чтобы понять эту проблему, рассмотрим следующую задачу.

Можно ли погрузить произвольное конечное поле алгебраических чисел в такое, тоже конечное, поле алгебраических чисел, в котором выполнялась бы обычная арифметика, т. е. в котором всякий идеал был бы главным. Если бы это было возможно, то в принципе арифметике алгебраических чисел можно было бы строить не вводя идеалов. Указанная проблема интересовала многих крупных математиков, начиная от Куммера и Дедекинда. Однако первый существенный шаг в решении проблемы был сделан только Гильбертом и Фуртвенглером, которые с помощью созданной ими теории полей классов свели ее, собственно говоря, к другой, так называемой проблеме башни. Согласно теории полей классов, над всяким полем алгебраических чисел  $k$  существует вполне определенное расширение поля  $K$ , являющееся абелевым расширением поля  $k$  с группой Галуа, изоморфной группе классов идеалов

поля  $k$ , и такое, что всякий идеал из поля  $k$  становится главным в поле  $K$ . Поле  $K$  является максимальным неразветвленным абелевым расширением поля  $k$  и называется полем классов для поля  $k$ . Башней полей классов называется цепочка включений  $k = k_0 \subset k_1 \subset \dots \subset k_n \subset \dots$ , в которой каждое поле является полем классов для предыдущего. Поле  $K$ , являющееся объединением всех полей  $k$ , будет максимальным неразветвленным расширением поля  $k$ , и в нем всякий идеал будет главным. Если башня полей классов стабилизируется, то поле  $K$  является искомым конечным одноклассным расширением поля  $k_0$ . Верно и обратное. Таким образом, вопрос о погружаемости поля  $k_0$  в конечное одноклассное поле эквивалентен вопросу о конечности максимального неразветвленного расширения поля  $k_0$ .



Б. Б. Венков.

И. Р. Шафаревич в исследовании «Расширения с заданными точками ветвления» (1963 г.) изучает группу Галуа  $G_s$  максимального  $l$ -расширения поля  $k_0$ , неразветвленного вне конечного множества  $s$  простых точек поля  $k_0$  ( $l$  — фиксированное простое число). Группа  $G_s$  является топологической нульмерной  $l$ -группой (проективным пределом конечных  $l$ -групп) с  $d(G_s)$ -минимальным числом образующих и  $r(G_s)$ -минимальным числом соотношений между минимальной системой образующих. В работе вычисляется  $d(G_s)$  в терминах основного поля  $k_0$ , а для  $r(G_s)$  даются оценки сверху. Например, если  $(S, l) = 1$  (т. е. элементы из  $S$  не делят  $l$ ) и  $S \neq \emptyset$ , то  $r(G_s) \leq d(G_s) + (k_0 : Q)$ . Эти оценки показывают, что разность  $r(G_s) - d(G_s)$  «мала».

С другой стороны, как показали Е. С. Голод и И. Р. Шафаревич в 1964 г., для конечной  $l$ -группы  $G$  разность  $r(G) - d(G)$  ограничена снизу величиной порядка  $\frac{1}{4} d(G)^2$ . Точнее:

$$r(G) > \left( \frac{d(G) - 1}{2} \right)^2.$$

Э. Б. Винберг улучшил эту оценку до  $\frac{d(G)^2}{4}$ . Поскольку легко строятся примеры полей, для которых  $d(G_s) \rightarrow \infty$ , то тем самым получают примеры полей, для которых группа  $G_s$  бесконечна. Например, если  $S = \emptyset$ ,  $l = 2$ ,  $k_0 = Q\sqrt{-D}$  и  $D$  разлагается не менее чем на семь различных простых множителей, то максимальное неразветвленное расширение поля  $k_0$  бесконечно и поле  $k_0$  не погружается в одноклассное поле.

Техника вычисления числа образующих и числа соотношений в группе Галуа оказалась весьма полезной и при изучении других во-

просов теории алгебраических чисел, особенно локальных полей. К этому кругу вопросов относится результат Шафаревича, доказывающий, что группа Галуа  $G$  максимального  $l$ -расширения локального поля является свободной топологической  $l$ -группой (т. е.  $r(G) = 0$ ) с  $(k : Q_l) + 1$  образующей, если  $k$  не содержит первообразный корень  $\zeta$  степени  $l$  из единицы. Д. К. Фаддеев и А. И. Скопин дали в 1959 г. простое доказательство теоремы Кавада о том, что группа  $G$  имеет  $(k : Q_l) + 1 + 2$  образующих и одно соотношение, если  $\zeta \in k$ . Это соотношение было найдено С. П. Демущкиным в 1961 г. При  $p \neq 2$  оно имеет вид  $s_1^{\mu} (s_1, s_2) \dots (s_{v+1}, s_{v+2}) = 1$ , где  $(s, t) = sts^{-1}t^{-1}$ ,  $\mu$  — наибольшее число, такое, что  $k$  содержит первообразный корень степени  $l^{\mu}$  из единицы.

## 2

### Неопределенные уравнения

Исторически неопределенные уравнения изучались с двух точек зрения. Во-первых, многие такие уравнения можно сводить к задачам об алгебраических числах (это точка зрения Куммера на уравнение Ферма). Во-вторых, к неопределенным уравнениям возможен более геометрический подход, согласно которому их решения — это рациональные (или целочисленные) точки на алгебраическом многообразии. Разумеется, эти две концепции очень сходны между собой. Особенно просто сводятся к алгебраическим числам неопределенные уравнения вида  $f(x_1, \dots, x_m) = a$ , где  $f$  — разложимая форма с рациональными коэффициентами, т. е. однородный многочлен, неприводимый над полем рациональных чисел и разлагающийся на линейные множители над некоторым полем алгебраических чисел. Такое уравнение целочисленно эквивалентно уравнению вида

$$N(x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_m x_m) = a,$$

где  $\mu_i$  — алгебраические числа,  $N$  — норма алгебраического числа в поле  $K = Q(\mu_i)$ . Таким образом, задача сводится к нахождению в поле  $K$  алгебраических чисел с заданной нормой (обычно единиц). Однако, если  $\mu_i$  — линейно зависимы над полем рациональных чисел, например некоторые из них равны нулю, то для решения исходного неопределенного уравнения требуется искать алгебраические числа с заданной нормой и специального вида. Это чрезвычайно усложняет задачу, и о таких неопределенных уравнениях известно очень мало. Неопределенным уравнениям такого вида посвящены некоторые ранние работы Делоне и Фаддеева.

В одной из работ (1922 г.) Делоне исследовал неопределенные уравнения  $qx^3 + y^3 = 1$ , решение которых эквивалентно отысканию двучленных единиц вида  $x\sqrt[3]{q} + y$  в кольце алгебраических чисел  $\{1, \sqrt[3]{q}, \sqrt[3]{q^2}\}$ . По теореме Дирихле все единицы этого кольца являются степенями одной основной единицы  $\varepsilon$ . Таким образом, уравнение

сводится к показательному уравнению  $\varepsilon^m = x\sqrt[m]{q} + y$ . Частными соображениями показывается, что  $m$  не может делиться на два и на три, и, кроме того,  $m \not\equiv 1 \pmod{6}$  при  $m \neq 1$ . Итак, для  $m$  остается только одно возможное значение  $m = 1$ , т. е. неопределенное уравнение  $qx^3 + y^3 = 1$  может иметь не более одного нетривиального решения. Позднее (1930 г.) Делоне рассмотрел неопределенные уравнения вида  $f(x, y) = 1$ , где  $f(x, y)$  — кубическая форма с целыми коэффициентами и отрицательным дискриминантом. С помощью «алгоритма повышения» он показал, что эти уравнения имеют не более пяти решений в целых числах. Фаддеев рассмотрел уравнения  $x^4 - Ay^4 = \pm 1$  (ранее изучавшиеся Тартаковским). В этом случае задача сводится к нахождению трехчленных единиц в кольце целых чисел поля  $Q(\sqrt[4]{-4A})$ . Частными соображениями (но весьма нетривиальными) показывается, что квадрат единицы в этом поле не может быть трехчленной единицей, а нечетная степень, кроме первой, основной единицы, не может быть трехчленной единицей. Это приводит к заключению о том, что трехчленной единицей может быть только основная единица.

Подробное изложение рассмотренных работ можно найти в монографии Делоне и Фаддеева «Теория иррациональностей третьей степени» (1940 г.). Разумеется, не все приложения алгебраических чисел к неопределенным уравнениям укладываются в намеченную выше схему. Многие такие уравнения можно решать, если хорошо знать арифметику соответствующих полей алгебраических чисел. Классическим примером такого подхода к неопределенным уравнениям являются исследования Куммера по уравнению Ферма. К этой тематике примыкают интересные работы П. Н. Реморова.

С точки зрения алгебраической геометрии решения неопределенного уравнения  $f(x, y) = a$  — это просто рациональные точки аффинной алгебраической кривой, определенной над полем рациональных чисел. Важным геометрическим инвариантом кривой является ее род  $g$ . Если отбросить не очень интересный случай  $g = 0$ , то рациональные точки на кривой ведут себя совершенно по-разному при  $g = 1$  и  $g > 1$ . При  $g = 1$  кривая может быть приведена к виду  $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$  и с помощью эллиптических функций на ней может быть задана рациональная групповая структура. Рациональные точки на такой кривой образуют группу, которая, согласно теореме Морделла, порождена конечным числом образующих. К сожалению, теорема Морделла не эффективна, она не позволяет найти образующие этой группы. Очень много усилий было приложено к эффективному отысканию рациональных точек на кривых рода  $g = 1$  (см. работы Шафаревича 1957—1959 гг.). Интересно и важно для неопределенных уравнений изучение эллиптических кривых над функциональными полями. Работы в этом направлении принадлежат И. Р. Шафаревичу, А. И. Лапину и Ю. И. Манину. Шафаревич изучал (1961 г.) главные однородные пространства для кривых рода  $g = 1$  над функциональными полями, используя, в случае простой характеристики, результаты Гротендика о фундаментальной группе алгебраической кривой. На языке диофантова уравнения



это приблизительно означает зависимость между глобальной и локальной разрешимостями уравнения. Лапин строит (1964 г.) кривые рода  $g = 1$ , определенные над полем рациональных функций со сколь угодно большим рангом группы рациональных точек. Для числового случая ситуация не известна. Лапину принадлежит также результат об ограниченности порядка группы кручения. Числовой аналог этого результата пока ни доказан, ни опровергнут.

Если кривая имеет род  $g > 1$ , то во всех известных случаях на ней лежит лишь конечное число рациональных точек. Морделл высказал в 1922 г. гипотезу (не доказанную до настоящего времени) о том, что на такой кривой всегда есть лишь конечное число рациональных точек. Зигель доказал конечность числа целочисленных точек на таких кривых. В 1963 г. замечательного успеха в решении проблемы Морделла добился Манин. Он доказал аналог проблемы Морделла для функциональных полей. С помощью дифференцирования по параметру Манин строит гомоморфизмы группы рациональных точек якобиева многообразия данной кривой в аддитивную группу основного поля. Далее он вычисляет пересечение ядер этих гомоморфизмов, которое оказывается небольшим, применяет гомоморфизмы к точкам кривой, погруженной в якобиево многообразие. Из явного вида операторов Манин получает достаточно много соотношений между значениями гомоморфизмов на точках кривой. Для этого приходится рассматривать наряду с заданной кривой также и ее неразветвленные накрытия. После этого он применяет информацию о пересечении ядер гомоморфизмов (уже на якобиевом многообразии). Для случая кривой рода  $g = 1$  эта техника дает очень сильный вариант теоремы Малера о целых точках. Числовой аналог этой теоремы уже не верен.

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

### АЛГЕБРА

#### Общий обзор развития алгебры в СССР

В XIX и начале XX в. алгебраические исследования в нашей стране не приобрели сколько-нибудь значительного размаха и их результаты не были сравнимы с выдающимися вкладами русских математиков того времени в математический анализ, теорию чисел, теорию вероятностей и геометрию. Конечно, отдельные ценные работы были опубликованы. Достаточно вспомнить создание Е. И. Золотаревым одновременно с Дедекиндом теории делимости целых алгебраических чисел, подготовившей теорию  $p$ -адических чисел, и исследования Ф. Э. Молина по теории гиперкомплексных систем, подготовившие создание Фробениусом, Диксоном и Веддербарном теории конечномерных линейных алгебр. Однако эти работы не привели ни к формированию алгебраических традиций, ни к появлению алгебраических школ.

В годы, непосредственно предшествовавшие первой мировой войне и Великой Октябрьской социалистической революции, Д. А. Граве создал в Киеве первую в нашей стране алгебраическую школу. Ее интересы были сосредоточены на теории полей алгебраических чисел и теории Галуа, с одной стороны, и теории конечных групп — с другой. Эта школа явилась колыбелью алгебры в Советском Союзе — к ней принадлежали такие советские алгебраисты старшего поколения, как Б. Н. Делоне, Н. Г. Чеботарев и О. Ю. Шмидт. Научные направления, разрабатывавшиеся в школе Граве, оставались основными для алгебры в СССР в первый период ее развития. Впрочем, развитие теории полей было подготовлено также в Одессе работами С. О. Шатуновского.

20-е годы XX в. были периодом формирования советской алгебраической школы и первых выходов ее на международную арену. К этому времени относятся исследования Н. Г. Чеботарева, работавшего в Казани. Они явились существенным вкладом во многие разделы теории Галуа и теории полей алгебраических чисел, в частности в теорию полей классов. Особенно известна его теорема о плотностях (1923 г.), обобщающая теорему Дирихле о бесконечности множества простых чисел в арифметической прогрессии. Методы, развитые Чеботаревым для доказательства этой теоремы, позднее использовал Э. Артин при доказательстве общего закона взаимности для абелевых расширений полей.



Семинар О. Ю. Шмидта. 1-й ряд (слева направо): С. Е. Аршон, А. А. Кулаков, О. Ю. Шмидт, А. Г. Курош; 2-й ряд: В. К. Туркин, А. П. Дицман, Л. Я. Окунев. 30-е годы.

Интересы Б. Н. Делоне, работавшего в Ленинграде, были сосредоточены на вопросах, находящихся на стыке между теорией числовых полей и теорией диофантовых уравнений. Его исследования развивались в духе классических интересов петербургской школы теории чисел, и в первую очередь продолжали традиции Г. Ф. Вороного, а по методам относились к геометрии чисел.

О. Ю. Шмидт продолжал свои изыскания по конечным группам и опубликовал несколько работ, оказавших существенное влияние на развитие исследований советских математиков в этой области. В 1928 г. вышла его работа о прямых разложениях групп, обладающих главным рядом, — первая советская работа по теории бесконечных групп. В ней доказана знаменитая теорема Шмидта, называемая также теоремой Ремака — Шмидта или Крулля — Шмидта.

Некоторые из названных выше учеников Д. А. Граве начали в этот период создание своих школ. Сначала в Ленинграде сформировалась школа Б. Н. Делоне, в это время по существу теоретико-числовая (В. А. Тартаковский), а в самом конце рассматриваемого периода в Москве — школа О. Ю. Шмидта по теории конечных групп (А. А. Кулаков, В. К. Туркин, А. П. Дицман, С. А. Чунихин). Отметим работу А. А. Кулакова о конечных  $p$ -группах (1930 г.).

Исследования советских алгебраистов в 20-х годах не исчерпываются указанными выше. К этому периоду относятся исследования А. К. Сускевича, работавшего в Воронеже, а затем в Харькове. Его работы, посвященные различным вопросам теории полугрупп, положили начало исследованиям в этой области алгебры, а работа 1929 г.,

в которой рассматривалось одно обобщение закона ассоциативности, явилась одним из первых в мировой литературе исследованием по теории квазигрупп. Некоторые вопросы линейной алгебры разрабатывались М. Ф. Кравчуком, Я. С. Дубновым, позднее — Г. Б. Гуревичем и А. М. Лопшицем, а в самом конце 20-х годов Ф. Р. Гантмахером и М. Г. Крейном. Велись также изолированные исследования по алгебре многочленов.



Д. А. Граве.

В 30-х годах советская алгебраическая школа испытала серьезную перестройку в связи с возникновением общей, или, как тогда говорили, абстрактной алгебры, которая привела к значительному расширению тематики исследований, хотя продолжали развиваться и те направления, о которых было сказано выше. Именно в эти годы наша алгебра заняла одно из основных мест в мировой алгебраической науке, и это положение она сохраняет до настоящего времени. Любопытно, что география ее в нашей стране в этот период почти не изменилась. Лишь в самом конце 30-х годов начал складываться новый алгебраический центр в Свердловске.

Расширение исследований было подготовлено теми новыми точками зрения на алгебру как на теоретико-множественную, аксиоматическую науку, которые разрабатывались в 20-х годах в Германии под руководством Эмми Нетер и Э. Артина и были оформлены в книге Ван-дер-Вардена «Современная алгебра», опубликованной в начале 30-х годов. Московская математика благодаря развитию своих старых теоретико-множественных традиций оказалась наиболее подготовленной к восприятию идей абстрактной алгебры (в настоящее время ее предпочитают называть общей алгеброй). Особенно много для пропаганды этих идей в Москве сделал П. С. Александров.

К 30-м годам относится начало исследований по общей алгебре А. Г. Куроша, ученика П. С. Александрова: в первые годы периода — по теории бесконечных групп (развитие работ О. Ю. Шмидта о прямых произведениях, работа 1934 г. о свободных произведениях), в середине 30-х годов — по теории структур, оформившейся незадолго до этого в работах Г. Биркгофа и О. Орэ как самостоятельная ветвь общей алгебры, а в конце периода — по теории колец. В конце 30-х годов в Москве начинает формироваться школа А. Г. Куроша по общей алгебре — появляются первые работы по теории групп С. Н. Черникова (1939 и 1940 гг.), О. Н. Головина, Л. Е. Садовского, работы по теории колец А. И. Узкова.

Весной 1930 г. в Московском университете начал работать организованный О. Ю. Шмидтом семинар по теории групп. Его первыми

участниками были ученики О. Ю. Шмидта, а также А. Г. Курош. Позднее он стал центром, объединявшим почти всех московских алгебраистов, работавших в области общей алгебры. В частности, с семинаром был тесно связан П. Г. Конторович, начавший в это время свои исследования по теории групп, относящиеся к расщеплениям и покрытиям групп. С семинаром связано начало важных исследований Л. Я. Куликова по теории абелевых групп (опубликованы в 1941 и 1945 гг.), явившихся важным этапом в развитии теории бесконечных абелевых групп. В работе семинара участвовал и А. И. Мальцев, ученик А. Н. Колмогорова, начавший во второй половине 30-х годов глубокие исследования по теории колец (работа 1937 г., содержащая решение проблемы о вложении колец в тела), теории полугрупп (условия вложимости полугруппы в группу) и теории групп. Семинар продолжает работать и в настоящее время (семинар по общей алгебре). В его работе принимают участие многие советские алгебраисты, а также зарубежные ученые.

В 30-х годах в Москве велись также алгебраические исследования, не связанные с семинаром О. Ю. Шмидта. Это выдающиеся работы Л. С. Понтрягина, ученика П. С. Александрова, по топологическим телам и топологическим группам, выросшие из его исследований по комбинаторной топологии (в частности, в работе 1934 г. Л. С. Понтрягин построил теорию характеров топологических абелевых групп) и в значительной мере определившие дальнейшее развитие топологической алгебры. Важное значение имели и его работы по гомологиям лиевых групп. Широкую международную известность приобрела вышедшая в 1938 г. монография Понтрягина «Непрерывные группы». Исследованием полупростых лиевых групп занимался Ф. Р. Гантмахер, в теории структур работал В. И. Гливенко.

В рассматриваемый период Н. Г. Чеботаревым была создана алгебраическая школа в Казани. Она разрабатывала, наряду с теорией полей и теорией Галуа, теорию лиевых групп и алгебр (И. Д. Адо — работа 1934 г. о представлениях конечномерных лиевых алгебр, В. В. Морозов) и алгебру многочленов (Н. Н. Мейман). В середине 30-х годов вышли монографии Н. Г. Чеботарева «Основы теории Галуа» и «Теория Галуа».

Начал свои исследования по теории Галуа в середине 30-х годов и Д. К. Фаддеев, ученик Б. Н. Делоне (Ленинград). В конце этого периода в Ленинграде сложилась теоретико-групповая школа В. А. Тартаковского: И. А. Грушко (в его работе 1940 г. доказана известная теорема о свободных разложениях конечнопорожденных групп), Д. И. Фуко-Рабинович, Е. С. Ляпин, И. Н. Санов.

В 1937 г. в Харькове вышла монография А. К. Сушкевича «Обобщенные группы».

Первая половина 40-х годов (т. е. период Великой Отечественной войны) не могла быть временем широкого развития алгебраических исследований. Наша наука потеряла в годы войны многих молодых ученых, успешно начавших свою творческую работу. Так, на фронтах и во время блокады Ленинграда погибло большинство участников ленинградского семинара В. А. Тартаковского. Тем не менее работа

продолжалась и в это трудное время, а во второй половине 40-х годов в СССР вновь началось бурное развитие алгебры, связанное с расширением ее тематики и с появлением новых алгебраических центров.

В 40-х годах дальнейшее развитие получили исследования по теории бесконечных групп. Этому способствовал выход в 1944 г. монографии А. Г. Куроша «Теория групп», получившей позднее, особенно после выхода в свет второго издания (1953 г.), широкую международную известность. Укажем работы Куроша о прямых произведениях групп (1943 и 1946 гг.) и его учеников О. Н. Головина — о правильных произведениях групп (1947 и 1950 гг.; эти исследования положили начало новой главе общей теории групп), Л. Е. Садовского — о структурных изоморфизмах групп (1947 г.), П. А. Гольберга — о силовских подгруппах (1946 г.). Исследования по теории обобщенных разрешимых и нильпотентных групп, начатые в названных выше работах С. Н. Черникова и работе Бэра 1940 г. и продолженные О. Ю. Шмидтом (1940 и 1945 гг.), развивались в дальнейшем преимущественно в Свердловске. В 1946 г. вышла работа С. Н. Черникова о полных группах с возрастающим центральным рядом, в 1948 г. — П. Г. Конторовича о группах с однозначным извлечением корня, т. е. о вполне расщепляемых группах без кручения. П. Г. Конторович и С. Н. Черников в 40-х годах начали создание в Свердловске большой теоретико-групповой школы. К концу периода относятся первые работы В. М. Глушкова, В. С. Чарина (учеников С. Н. Черникова) и Б. И. Плоткина (ученика П. Г. Конторовича). Программа исследований этой школы довольно долго определялась обзором А. Г. Куроша и С. Н. Черникова (1947 г.).

В московской школе общей алгебры продолжала развиваться теория колец, как ассоциативных (работа 1948 г. В. А. Андрунакиевича, ученика А. Г. Куроша, о полурадикальных кольцах), так и неассоциативных. Начались исследования по теории частично упорядоченных групп (работа Е. П. Шимбиревой 1947 г., вызвавшая многочисленные отклики) и теории недезарговых проективных плоскостей. Первое из этих направлений было подготовлено исследованиями ленинградцев Л. В. Канторовича и его сотрудников Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера по теории структурно упорядоченных пространств, а также работой Г. Биркгофа (1942 г.) по теории структурно упорядоченных групп. Интерес ко второму направлению вызвала работа М. Холла (1943 г.). К концу 40-х годов относится начало исследований учеников А. П. Дидмана по теории структур, в частности А. Х. Лившица.

А. И. Мальцев, работая в эти годы в Иванове, занимался исследованиями во многих областях общей алгебры — по теории колец и алгебр (работа 1942 г. о расщеплении алгебр), теории групп (работа 1942 г. о нильпотентных группах без кручения), теории упорядоченных групп (работа 1949 г.). В последнем направлении в конце 40-х годов начали работать в Иванове и ученики А. И. Мальцева. В частности, Н. Н. Мягкова опубликовала в 1949 г. работу о группах конечного ранга, вызвавшую многочисленные отклики. Особенно важное значение имела работа Мальцева «Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп» (1941 г.). В ней методы математической



А. И. Мальцев.

логики применены, впервые в мировой литературе, для получения алгебраических теорем. В эти годы А. И. Мальцев работал также в области топологической алгебры и особенно много в области теории лиевых групп и алгебр (работы 1944 и 1945 гг. о полупростых подгруппах лиевых групп и о разрешимых лиевых алгебрах).

Теория топологических групп продолжала развиваться в Ленинграде — в исследованиях А. А. Маркова (о периодических связных группах, 1944 г., и о свободных топологических группах, 1945 г.) и в Москве — в работах Д. А. Райкова, а во второй половине 40-х годов в работах Н. Я. Виленкина и М. И. Граева, учеников А. Г. Куроша. Теория унитарных представлений топологических и лиевых групп была развита в Москве в ис-

следованиях И. М. Гельфанда, М. А. Наймарка и Д. А. Райкова, по существу относящихся к функциональному анализу. От работы И. М. Гельфанда (1941 г.) ведет начало теория нормированных колец, т. е. банаховых алгебр, сыгравшая выдающуюся роль в развитии функционального анализа. Во второй половине 40-х годов в Москве начал свои исследования по лиевым группам и алгебрам ученик А. Н. Колмогорова Е. Б. Дынкин, давший в 1946 г. классификацию простых лиевых групп.

Теории Галуа в эти годы были посвящены работы Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева (в частности, их совместная работа о геометрии теории Галуа, 1944 г.). И. Р. Шафаревич (Москва) начал свои исследования работой о нормированиях топологических полей (1943 г.), а во второй половине 40-х годов относятся его работы по теории полей и теории Галуа.

В Ленинграде помимо работ, названных выше, А. А. Марков вел исследования по алгоритмическим вопросам теории полугрупп — 1947 г., а Д. К. Фаддеев в этом же году опубликовал работу, явившуюся (наряду с исследованиями С. Эйленберга и С. Маклейна) одним из истоков гомологической алгебры. Во второй половине 40-х годов начал исследования по теории полугрупп Е. С. Ляпин, а в конце периода в этой области работали также его ученики. К концу 40-х годов относятся работы В. А. Тартаковского по теоретико-групповой проблеме тождества.

В 40-х годах в Томске С. А. Чунихин вел широкие исследования по силовским свойствам конечных групп.

Рассмотрим достижения советских алгебраистов в 50-х и первой половине 60-х годов. В эти годы продолжал свои исследования в различных областях алгебры А. И. Мальцев. В 1951 г. вышла работа А. И. Мальцева о разрешимых группах. В первые годы периода начал

теоретико-групповые исследования также его ученик Д. М. Смирнов. Весьма значительны работы А. И. Мальцева в новой для советской алгебры области — теории универсальных алгебр (работы 1954 и, о свободных топологических универсальных алгебрах, 1957 гг.). Начало этой ветви алгебры положили исследования Биркгофа, относящиеся к 30-м годам. Позднее исследования по универсальным алгебрам переросли у А. И. Мальцева в исследования по теории моделей — ветвь математики, которая находится на стыке между алгеброй и логикой и развитие которой было подготовлено работой А. И. Мальцева 1941 г., а также более поздними работами А. Тарского и А. Робинсона. После переезда в конце 50-х годов в Новосибирск Мальцев организовал широкие коллективные исследования по теории моделей, конструктивной алгебре и алгебре логики; в них включились, в частности, А. Д. Тайманов и ученик Мальцева Ю. Л. Ершов. В этот период в Новосибирске сложился весьма сильный коллектив алгебраистов.



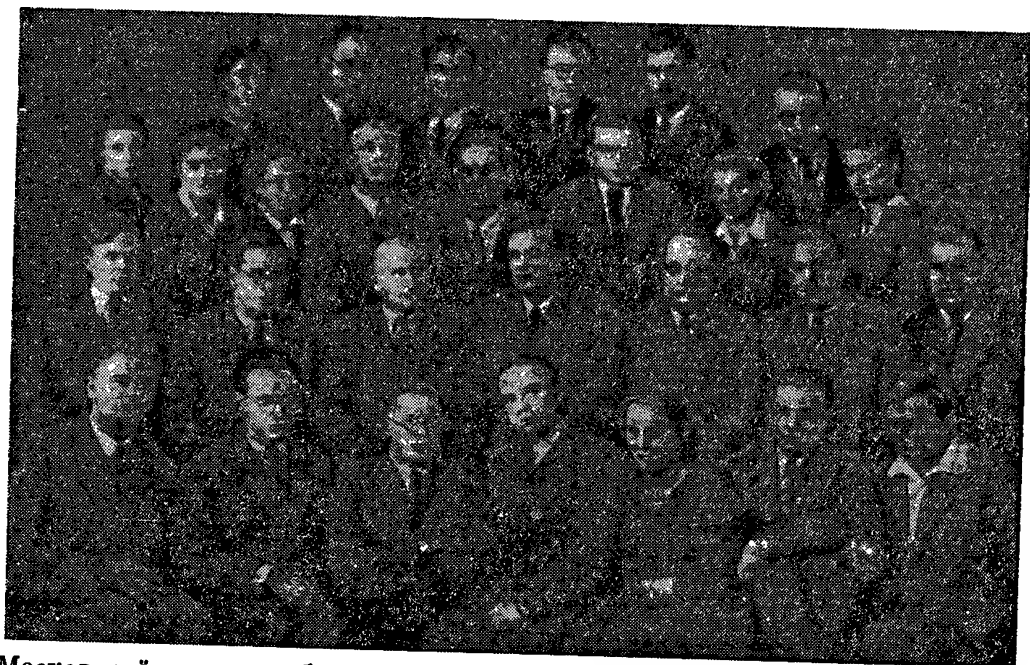
А. Г. Курош.

В московской школе общей алгебры из направлений, рассмотренных выше, в 50-х годах на одно из первых мест вышла теория колец. В этой области работают А. Г. Курош (работа 1953 г. о радикалах в кольцах) и его ученики Л. А. Скорняков (работы 1950 г. об альтернативных телах и 1958 г. — о Т-свободных разложениях тел) и А. И. Ширшов (работы 1953 г. о подалгебрах свободных левых алгебр и 1956 г. — о жордановых кольцах). Упорядоченные кольца и полугруппы исследовал Я. В. Хюн (Тарту). Более молодые ученики А. Г. Куроша работали как в теории колец, так и в теории групп, топологической алгебре, теории структур, теории полугрупп.

Новыми для московской школы областями исследований являются теория категорий, возникшая в работах Эйленберга и Маклейна в связи с гомологической алгеброй, и теория универсальных алгебр. Тематика исследований в этих двух направлениях хорошо отражает характерную для рассматриваемой школы черту — сближение различных разделов общей алгебры на некоторых общих темах. Так, теория прямых разложений разрабатывалась на языке групп, колец, структур, частично упорядоченных групп, категорий, полугрупп. Теория свободных разложений строилась для групп, неассоциативных алгебр, неассоциативных тел, проективных плоскостей, мультиоператорных групп, алгебр и тел, универсальных алгебр.

Л. А. Скорняков (Москва) работал в теории колец, теории проективных плоскостей, теории структур, в области топологической алгебры, а в последние годы — в теории модулей. В некоторых из названных областей работают и его ученики. А. И. Ширшов сначала в Москве,





Московский семинар общей алгебры и кафедра алгебры МГУ. 1-й ряд (слева направо): А. Сулинский, Е. Б. Дынкин, А. И. Ширшов, А. П. Мишина, М. Г. Зайцева, Ю. И. Соркин, Л. А. Скорняков; 2-й ряд: А. И. Узков, Н. Я. Виленкин, А. Г. Куроп, И. Р. Шафаревич, Л. Я. Окунев, А. П. Дидман, И. В. Проскуряков; 3-й ряд: Е. П. Шимбирева, З. М. Кишкина, Н. Н. Мякова, П. А. Гольдберг, О. Н. Головин, М. М. Постников, Л. И. Головина, Л. М. Махарадзе; 4-й ряд: Ц. Е. Дидидзе, В. М. Курочкин, Л. Е. Садовский, Я. В. Хион, Э. Б. Кикодзе, В. А. Андрунакиевич. 1955 г.

а затем в Новосибирске развивал теоретико-кольцевые исследования, привлек к ним ряд молодых алгебраистов и создал успешно работающую школу. О. Н. Головин (Москва) и его ученики, в том числе А. Л. Шмелькин, широко развернули в последние годы исследования по операциям в классе групп и многообразиям групп.

В рассматриваемый период в Москве сложились и другие коллективы алгебраистов. Весьма важную работу о неразрешимости теоретико-групповой проблемы тождества опубликовал в 1955 г. П. С. Новиков. Это алгоритмическое исследование, вызвавшее многочисленные отклики, получило развитие в других работах П. С. Новикова и его учеников, в том числе С. И. Адяна.

И. Р. Шафаревич продолжал исследования по теории Галуа. В работах 1954 г. он решил обратную задачу теории Галуа для разрешимых групп. Вместе с тем во второй половине 50-х годов его научные интересы в значительной мере передвинулись в сторону алгебраической геометрии и связанных с ней областей математики. Возрождение интереса к алгебраической геометрии произошло за рубежом в 40-х годах, причем переплетение алгебраической геометрии, алгебраической топологии, гомологической алгебры и теории аналитических функций многих переменных привело к созданию новой области матема-

тики, одной из наиболее определяющих лицо мировой математики середины нашего века. И. Р. Шафаревич первым среди советских алгебраистов начал исследования в этой области, привлекая к ним и своих учеников. Из многочисленных его учеников, работающих как в алгебраической геометрии, так и в других разделах алгебры, можно назвать А. И. Кострикина, решившего в 1959 г. ослабленную проблему Бернсайда для простых показателей, Ю. И. Манина, занимающегося алгебраической геометрией с конца 50-х годов, Е. С. Голода, решившего (1964 г.) проблему Бернсайда о периодических группах, проблему о локальной конечности алгебраических алгебр и другие проблемы бернсайдовского типа.



И. Р. Шафаревич.

Исследования по теории лиевых групп и однородных многообразий, в том числе по топологии лиевых групп, продолжали Е. Б. Дынкин и его ученики Ф. И. Карпелевич, А. Л. Онищик, Э. Б. Винберг. В 1952 и 1953 гг. вышли работы Е. Б. Дынкина о максимальных подгруппах классических групп и о гомологиях компактных лиевых групп, в 1955 г. — написанная им совместно с А. Л. Онищиком работа о компактных лиевых группах в целом. Вел исследования в этой области и геометр П. К. Рашевский, ученик В. Ф. Кагана.

Свердловская школа общей алгебры, работавшая в 50-х годах в основном под руководством П. Г. Конторовича, весьма расширила свою тематику и включила в круг своих исследований теорию упорядоченных групп, теорию структур (работа П. Г. Конторовича и Б. И. Плоткина, 1954 г.), теорию колец, а также теорию полугрупп и их структурных изоморфизмов (работы Л. Н. Шеврина, ученика П. Г. Конторовича). Теория групп оставалась, однако, основной областью интересов свердловчан. Важные исследования о радикальных группах (1955 и 1957 гг.) принадлежат Б. И. Плоткину. В настоящее время Плоткин работает в Риге, занимаясь, в частности, теорией групп автоморфизмов и групповых пар и привлекая к теоретико-групповым исследованиям своих учеников.

С другой стороны, В. М. Глушков, работавший сначала в области общей теории групп (в частности, работы 1952 г. о локально нильпотентных группах без кручения), в середине 50-х годов переключился на топологическую алгебру и построил содержательную теорию локально нильпотентных локально бикомпактных топологических групп (работы 1955 и 1956 гг.). Позднее теорией топологических групп начал заниматься и В. С. Чарин, изучавший до этого в основном локально нильпотентные и разрешимые группы (работы 1960 и 1961 гг. о разрешимых группах).



В. М. Глушков.

С. Н. Черников в этот период работал преимущественно в Перми, где продолжал теоретико-групповые исследования, а также занимался теорией линейных неравенств. В эти годы у Черникова появилось много новых учеников, работающих в названных двух разделах алгебры. Один из них — М. И. Каргаполов, решивший ряд теоретико-групповых проблем. Позднее, в Новосибирске, М. И. Каргаполов включил в круг своих исследований и теорию упорядоченных групп. Здесь начали свои публикации и его ученики.

После длительного перерыва крупным алгебраическим центром вновь становится Киев. С середины 50-х годов здесь работает Л. А. Калужнин, опубликовавший до этого (во Франции и Германии) вызвавшие многочисленные отклики ра-

боты по теории Галуа сепарабельных расширений (1942 г.), о силовых подгруппах симметрических групп (1945 г.), о группах автоморфизмов (1950 г.). Калужнин продолжает свои исследования по расширениям групп, линейным группам и группам подстановок, привлекая к работе в этих областях алгебры и своих учеников. Со второй половины 50-х годов в Киеве работает В. М. Глушков. Предметом его исследований являются алгебраическая теория автоматов и другие разделы кибернетики. В самое последнее время в Киев переехали также С. Н. Черников и В. С. Чарин, продолжающие исследования по своей тематике предшествующего периода.

В Ленинграде Д. К. Фаддеев и его ученик З. И. Борович разрабатывают теорию гомологий в группах (работы 1956 и 1959 гг.). В школе Д. К. Фаддеева ведутся также исследования по целочисленным представлениям групп. Л. Я. Куликов занимался исследованием абелевых групп (работы 1952 г.; со второй половины 50-х годов он продолжает свои исследования в Москве). Ленинградская теоретико-полугрупповая школа Е. С. Ляпина расширила свою тематику, включив в нее, в частности, теорию представлений полугрупп и теорию топологических полугрупп. В 1955 г. вышла работа Ляпина о полугруппах преобразований, а в 1960 г. — его монография «Полугруппы». Интересные исследования по теории полугрупп ведет также Л. М. Глушкин, ученик А. К. Сушкевича, в настоящее время работающий в Харькове (работы 1959 и 1961 гг. об идеалах полугрупп и о полугруппах преобразований линейных пространств).

С начала 50-х годов в Саратове ученик В. Ф. Кагана В. В. Вагнер, а затем и его ученики, в частности Б. М. Шайн, ведут исследования по теории полугрупп, теории упорядоченных полугрупп и алгебре отношений. Исследования Вагнера 1953 г. и Престона 1954 г. положили

начало теории инверсных полугрупп. С. Р. Когаловский занимался теорией моделей.

В. А. Андрунакиевич в 50-х годах (в основном в Москве) вел широкие исследования по теории ассоциативных колец (работы 1956 г. о кольцах с аннуляторным условием и бирегулярных кольцах и 1958 г. — о радикалах ассоциативных колец). В последние годы он работает в Кишиневе, занимается теорией радикалов в кольцах и модулях, привлекая своих учеников к исследованиям как в этой области, так и по теории топологических колец. В Кишиневе работает также В. Д. Белоусов, ведущий, начиная с работы 1955 г. о дистрибутивных системах операций, исследования по теории систем квазигрупп (работа 1958 г. об ассоциативных системах квазигрупп). Теорией квазигрупп и луп занимаются и ученики В. Д. Белоусова.

Исследования по теории конечных групп развивают (сначала в Томске, а затем в Гомеле) С. А. Чунихин (работа 1956 г. о факторизации конечных групп), а также его ученики. В Минске с середины 40-х годов в теории разрешимых и нильпотентных групп подстановок и линейных групп работает Д. А. Супруненко (работа 1957 г. о разрешимых линейных группах). У него уже сложилась своя алгебраическая школа, разрабатывающая теорию линейных групп и некоторые вопросы теории топологических групп (В. П. Платонов) и теории колец.

Представлениям конечных групп посвящены исследования алгебраистов Ужгорода — С. Д. Бермана (ученика Я. Б. Лопатинского) и его учеников.

Начиная с работы 1950 г. о регулярных  $r$ -группах ведет в Батуми теоретико-групповые исследования Ш. С. Кемхадзе. В Иванове в последние годы работает М. Д. Гриндлингер. Его исследования, к которым он привлек и некоторых своих учеников, относятся к алгоритмическим вопросам теории групп. В Красноярске под руководством С. Л. Эдельмана, ученика С. А. Чунихина, работает коллектив алгебраистов, занимающийся теорией структур и теорией структурных изоморфизмов групп.

## Теория полей и теория Галуа

Как уже упоминалось, отправной точкой развития алгебры в СССР естественно считать киевскую школу академика Д. А. Граве. В частности, одно из тех направлений, которое плодотворно разрабатывалось советскими алгебраистами, — теория Галуа и теория полей особенно многим обязана этой школе.

В начале столетия, когда формировался семинар Д. А. Граве, теория Галуа и теория полей алгебраических чисел находились в центре внимания алгебраистов всего мира. Особенно сильное влияние на развитие этой области оказывали тогда исследования крупного немецкого математика Д. Гильберта. В его «Отчете о теории чисел» (1894 г.) были подытожены результаты исследований предшествующего периода и сформулированы задачи, во многом предопределившие дальнейшее развитие этих исследований. К ним, в частности, относилась задача



Н. Г. Чеботарев.

обозрения абелевых расширений полей алгебраических чисел, которая получила решение в так называемой теории полей классов. Д. А. Граве в лекциях и семинарах привлекал внимание своих учеников к теории Галуа и к теории полей алгебраических чисел. Из киевских алгебраистов этой областью начали заниматься В. П. Вельмин, Б. Н. Делоне и Н. Г. Чеботарев.

Почва для углубленного изучения теории Галуа и теории полей была хорошо подготовлена предшествующим развитием алгебры и теории чисел в России. В вопросах обоснования теории Галуа заметное влияние оказала монография С. О. Шатуновского «Алгебра, как учение о сравнениях по функциональным модулям» (1917 г.), идеи которой Н. Г. Чеботарев в дальнейшем использовал в своей моно-

графии «Основы теории Галуа» (т. 1 — 1934 г., т. 2 — 1937 г.). Для развития теории алгебраических чисел важное значение имели в первую очередь работы Г. Ф. Вороного и Е. И. Золотарева. Методы Г. Ф. Вороного, относящиеся к геометрии чисел, были развиты Б. Н. Делоне и Б. А. Венковым. Идея обоснования теории идеалов в арифметике целых алгебраических чисел, высказанная Е. И. Золотаревым и состоящая в рассмотрении делимости в кольце  $p$ -целых чисел, предвосхитила позже возникшую теорию  $p$ -адических чисел К. Гензеля. Эту идею широко использовал Н. Г. Чеботарев.

Из работ Н. Г. Чеботарева особое значение и всемирное признание приобрела статья «Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок» (1923 г.). Речь идет о следующей задаче. Пусть  $K$  — конечное нормальное расширение степени  $n$  поля  $P$  рациональных чисел;  $G$  — группа Галуа расширения  $K/P$ ;  $\Gamma$  — кольцо всех целых величин из  $K$ . Пусть  $p$  — некритическое простое число (т. е. не делящее дискриминант поля  $K$ ). Тогда, как известно,  $p$  разлагается в произведение  $p = p_1 p_2 \dots p_g$  различных простых идеалов кольца  $\Gamma$ , сопряженных между собой автоморфизмами из группы  $G$ . Поле  $\Gamma/p_i$  вычетов по модулю  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, g$ ) является полем Галуа из  $p^f$  элементов, где  $f = \frac{n}{g}$ . Каждый автоморфизм  $\alpha$  поля  $K$  из группы  $G$ , оставляющий на месте  $p_i$ , индуцирует в поле  $\Gamma/p_i$  автоморфизмы этого поля Галуа. Но все автоморфизмы поля  $\Gamma/p_i$  являются автоморфизмами вида  $A \rightarrow A^{p^a}$ , где  $a$  пробегает вычеты по модулю  $f$ . Существует однозначно определенный один автоморфизм  $\alpha_i \in G$ , который оставляет  $p_i$  на месте и индуцирует в поле  $\Gamma/p_i$  автоморфизм  $A \rightarrow A^{p^i}$ . Оказывается, что  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, g$ ) образуют в группе  $G$  класс  $\mathfrak{F}$  сопряженных элементов. Говорят, что простое число  $p$  принадлежит классу  $\mathfrak{F}$ .

Это понятие ввел еще Г. Фробениус. Класс  $\mathfrak{F}$  сопряженных элементов в группе  $G$  был определен, исходя из рассмотрения простого числа  $p$ , некритического для расширения  $K/P$ . Если, наоборот, рассматривать произвольный класс  $\mathfrak{F}$  сопряженных элементов в группе Галуа  $G$ , то возникает вопрос, существует ли хотя бы одно простое число  $p$ , принадлежащее этому классу  $\mathfrak{F}$ . В работе Чеботарева этот вопрос решен положительно. Более того, показано, что множество простых чисел  $p$ , принадлежащих классу  $\mathfrak{F}$ , имеет положительную плотность. При этом под плотностью некоторого множества  $\mathfrak{F}$  простых чисел понимается неотрицательная величина

$$\Pi(\mathfrak{F}) = \lim_{s \rightarrow 1+} \frac{\sum_{p_i \in \mathfrak{F}} p_i^{-s}}{\lg \frac{1}{s-1}}.$$

Чеботарев показал также, что плотность  $\mathfrak{F}_{\mathfrak{P}}$  множества простых чисел, принадлежащих классу  $\mathfrak{P}$ , равна отношению числа элементов в этом классе к степени  $n$  расширения  $K/P$ . Этот результат является далеко идущим обобщением теоремы Дирихле о плотностях простых чисел в арифметических прогрессиях. Теорема Дирихле соответствует тому случаю, когда поле  $K$  является полем деления круга. Теорема Чеботарева обобщается на случай расширений произвольных полей алгебраических чисел.

Как сам факт, установленный Н. Г. Чеботаревым, так и, особенно, примененные им методы оказали большое влияние на развитие теории полей классов в исследованиях Э. Артина и К. Шевалле. Работа о плотности простых чисел, принадлежащих классу сопряженных элементов группы Галуа нормального поля алгебраических чисел, сразу выдвинула Чеботарева в ряды ведущих алгебраистов мира.

В 20-х годах Н. Г. Чеботарев продолжал успешно работать над различными проблемами теории Галуа и теории полей. Кроме работы о плотности особенно большой интерес вызвали его исследования по так называемой проблеме Гильберта — Клейна (см. ниже). Признание молодой советской алгебраической школы и Н. Г. Чеботарева как одного из ведущих специалистов по теории Галуа выразилось, в частности, в том, что в 1932 г. на Международном математическом съезде в Цюрихе Чеботареву был поручен обзорный доклад по теории Галуа. Этот доклад в несколько видоизмененной форме был повторен на II Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде (1934 г.) и опубликован в виде статьи «Проблемы современной теории Галуа» в швейцарском математическом журнале «*Commentarii Mathematici Helvetici*» (1934 г.). В «Проблемах» Чеботарев набросал широкую картину состояния теории Галуа, теории полей и особенно теории полей алгебраических чисел в начале 30-х годов и, что более важно, наметил дальнейшие пути развития этих теорий. Сформулированные им задачи во многом предопределили исследования советских алгебраистов следующего поколения. Многие из высказанных Чеботаревым проблем и по сей день ждут своего решения.

Более подробно развитие теории Галуа подытожено Н. Г. Чеботаревым в двухтомной монографии «Основы теории Галуа». К теории полей относится также его книга «Теория алгебраических функций» (1948 г.).

Рассмотрим кратко некоторые ранние работы Чеботарева по теории Галуа на основании его собственного обзорного изложения в указанных монографиях и «Проблемах».

Прежде всего следует сказать несколько слов о том, какую проблематику относит Чеботарев к теории Галуа. Дело в том, что термин «теория Галуа» понимается современными алгебраистами по-разному и для дальнейшего нам важно выяснить точку зрения Чеботарева.

Во введении к «Проблемам» по этому поводу он пишет так: «... Я понимаю термин „теория Галуа“ в несколько более широком смысле, чем это принято при приложении теории групп к алгебраическим уравнениям. Именно, я включаю в него все вопросы, которые противопоставляют понятие „рациональное“ понятию «алгебраически иррациональное»<sup>1</sup>. И несколько ниже: «Я кладу в основу выбора материала для настоящего обзора, главным образом, свой личный вкус, в силу чего не имею никаких притязаний на объективность этого выбора»<sup>2</sup>.

Сопоставляя приведенное выше (умышленно) несколько расплывчатое определение «теория Галуа» с тематикой, нашедшей отражение в «Проблемах», «Основах теории Галуа» и оригинальных работах Чеботарева, следует считать, что теория Галуа в смысле Чеботарева является теорией алгебраических расширений произвольных полей, причем особый упор делается на случай алгебраических расширений поля рациональных чисел (т. е. на поля алгебраических чисел) и — в несколько меньшей мере — на алгебраические расширения полей рациональных функций, т. е. на поля алгебраических функций.

Как известно, группа Галуа, или ее естественные обобщения, является основным, но далеко не единственным инвариантом расширения. Например, уже для описания расширений полей алгебраических чисел естественно возникают арифметические вопросы и, таким образом, согласно указанной точке зрения, теорию целых алгебраических чисел по праву можно считать составной частью теории Галуа. Не удивительно поэтому, что и в «Проблемах» и в «Основах теории Галуа» арифметике алгебраических чисел отведено большое место. В частности, второй том «Основ» полностью посвящен теории идеалов и аналитическому аппарату теории алгебраических чисел. Чеботарев намечал, как он указывает в предисловии ко второму тому «Основ», продолжить монографическое изложение теории Галуа, включив в нее теорию полей классов и теорию алгебр. К сожалению, он это намерение не успел выполнить.

*«Задача, обратная задаче Чирнгаузена» (1922 г.).* Задача Чирнгаузена состоит, как известно, в следующем: пусть  $f(x)$  — полином с рацио-

<sup>1</sup> Н. Г. Чеботарев. Проблемы современной теории Галуа. — В кн.: Н. Г. Чеботарев. Собр. соч. Т. 3. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950, стр. 4—46.

<sup>2</sup> Там же, стр. 4.

нальными коэффициентами;  $\zeta$  — его корень;  $\eta = r(\zeta)$  — рациональное выражение от  $\zeta$  с рациональными коэффициентами; найти полином  $g(y)$  с рациональными коэффициентами, для которого  $\eta$  является корнем. Обратная же задача Чирнгаузена формулируется Чеботаревым так: пусть  $f(x)$  и  $g(y)$  — два неприводимых полинома степени  $n$  с рациональными коэффициентами; требуется установить, можно ли выразить корень  $g(y)$  посредством корня  $f(x)$  рационально с рациональными коэффициентами и если можно, то найти такое выражение. Вообще говоря, оказывается, что решение указанной задачи сводится к нахождению рационального корня некоторого уравнения степени  $n!$ , что представляет собой довольно трудоемкую задачу. Чеботарев показывает, как эта задача может быть упрощена, если группы Галуа уравнений  $f(x) = 0$  и  $g(y) = 0$  обладают нормальными делителями. Задача особенно упрощается в случае уравнений с разрешимыми группами.

«О квадратуемых луночках» (1933 г.). Как известно из теории Галуа, геометрическая задача на построение разрешима с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда она сводится к решению некоторого уравнения, разрешимого последовательным решением квадратных уравнений. На этом пути еще в прошлом столетии была доказана неразрешимость с помощью циркуля и линейки задач о трисекции угла и об удвоении куба, а также установлено, какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой.

Возможность построения циркулем и линейкой многих задач до сих пор не известна. К ним относится задача о квадратуемых луночках. Под луночкой понимается фигура, ограниченная дугами двух окружностей. Луночка называется квадратуемой, если ее можно построить циркулем и линейкой и если равновеликий ей квадрат также можно построить с помощью циркуля и линейки. Луночки могут быть выпуклыми и вогнутыми. Нетрудно доказывается, что выпуклые луночки не квадратуемы. Примеры квадратуемых вогнутых луночек указал еще древнегреческий математик Гиппократ. Дальнейшие результаты в этом направлении были получены в XIX и XX вв. немецкими математиками Клаузеном и Э. Ландау, а также болгарским математиком Л. Чкаловым. Они показали, что если  $\alpha$  и  $\beta$  — центральные углы дуг, ограничивающих луночку, соизмеримы и равны соответственно  $m\theta$  и  $n\theta$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа, то луночка квадратуема тогда и только тогда, когда уравнение

$$n(x^m - 1)^2 - mx^{m-n}(x^n - 1)^2 = 0$$

разрешимо в квадратных радикалах (см., например, в книге М. М. Постникова «Теория Галуа»). Клаузен высказал гипотезу, что это справедливо только в следующих пяти случаях:

$$m = 2, \quad n = 1; \quad m = 3, \quad n = 1;$$

$$m = 3, \quad n = 2; \quad m = 5, \quad n = 1;$$

$$m = 5, \quad n = 3.$$



Н. Г. Чеботарев, используя глубокие результаты теории Галуа и теории  $p$ -адических чисел, доказал гипотезу Клаузена в предположении  $m = n \pmod{2}$ .

«Обобщение теоремы Минковского» (1924 г.)<sup>3</sup>. Н. Г. Чеботарев существенно уточнил результаты Минковского о разложении простых рациональных чисел в произведение идеалов в полях алгебраических чисел, нормальных над полем рациональных чисел. Для формулировки соответствующего результата напомним вкратце некоторые понятия. Пусть  $K$  — конечное расширение поля  $P$  рациональных чисел,  $p$  — простое рациональное число и

$$p = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_g^{e_g} \quad (1)$$

является разложением  $p$  в произведение простых идеалов в поле  $K$ . Число  $p$  называется критическим простым числом, если по меньшей мере один из показателей степеней  $e_i$  больше единицы. Как известно, критические простые числа — это в точности простые делители дискриминанта поля  $K$  (их, следовательно, — конечное число).

Возникает вопрос, существуют ли критические простые числа для всякого расширения поля  $P$ . Положительный ответ содержится в знаменитой теореме Минковского, согласно которой дискриминант всякого поля алгебраических чисел отличен от  $\pm 1$ . Чеботарев обобщил эту теорему в следующем направлении.

Пусть  $K$  — нормальное расширение поля рациональных чисел (в этом случае справедливы равенства  $e_1 = e_2 = \dots = e_g = e$ );  $G$  — группа Галуа расширения  $K/P$ . Под группой инерции простого идеала  $\mathfrak{p}$  из поля  $K$  понимается группа  $G_T^{\mathfrak{p}}$  тех автоморфизмов  $\alpha$  поля  $K$ , для которых

$$a\alpha \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}$$

при всех целых  $a \in K$ . Нетрудно показать, что если  $p$  — критическое простое число, а равенство (1) — его разложение, то показатель степени  $e = e_i$  равен порядку группы инерции простого идеала  $\mathfrak{p}_i$ . Тем самым теорему Минковского можно понимать как утверждение о том, что нормальное расширение содержит простые идеалы, группа инерции которых отлична от единичной группы. В рассматриваемой работе Чеботарев показывает больше, а именно: группы инерции простых идеалов поля  $K$  порождают всю группу Галуа  $G$  поля  $K$ . Эту теорему он называет арифметической теоремой монодромии по аналогии с теоремой монодромии в теории полей алгебраических функций.

Рассмотрим развитие исследований *обратной задачи теории Галуа* — одной из основных задач теории Галуа, которой начиная с 30-х годов занимались советские алгебраисты. Задача допускает различные формулировки. Самая общая состоит в том, чтобы для некоторого поля  $K$  обозреть совокупность всех расширений  $L/K$  с заданной группой Галуа  $G$ . Этот вопрос исследуется в первую очередь в случае, когда расширяемое поле  $K$  есть поле  $P$  рациональных чисел или, в более общем случае, поле алгебраических чисел. До сих пор неизвестно

<sup>3</sup> См. также «К теории групп поля классов» (1929 г.).

даже, существует ли для всякой конечной группы  $G$  расширение поля алгебраических чисел  $K$ , группа Галуа которого изоморфна группе  $G$ . В решение этого вопроса и более общей проблематики обратной задачи теории Галуа большой вклад внесли Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, И. Р. Шафаревич и их ученики. Но прежде чем подробно изложить эти исследования, скажем несколько слов о важных работах Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева, относящихся к геометрии теории Галуа и к геометрии чисел, так как они, с одной стороны, явились продолжением традиций арифметико-геометрических исследований петербургской школы теории чисел, с другой — оказали немалое влияние на дальнейшее развитие теории Галуа.

В небольшой работе «К геометрии теории Галуа» (1940 г.) Делоне предложил новое обоснование теории Галуа. Полностью теория изложена в работе Делоне и Фаддеева «Исследования по геометрии теории Галуа» (1944 г.).

Идея предложенного построения состоит в следующем. Рассматривается  $n$ -мерное векторное пространство  $K_n$  над некоторым полем  $K$ . Ввиду применений к теории полей алгебраических чисел, удобно считать, что  $K$  — поле комплексных чисел. В пространстве  $K_n$  фиксируется некоторый репер  $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , который в дальнейшем называется исходным, и наряду с векторным сложением рассматривается умножение, определенное по координатам для координат в репере  $E$ . Таким образом пространство  $K_n$  становится коммутативной алгеброй над полем  $K$ . Если  $R$  — подполе поля  $K$  (например,  $R$  — поле рациональных или какое-либо поле алгебраических чисел), то в  $K_n$  рассматриваются так называемые  $R$ -алгебры. Это совокупности векторов из  $K_n$ , которые замкнуты относительно умножения и координаты которых в некотором репере  $\mathcal{E}$  (репер  $\mathcal{E}$ , вообще говоря, отличен от исходного репера  $E$ ) принадлежат полю  $R$ .

Согласно основной теореме, всякая  $R$ -алгебра разлагается в прямую сумму неприводимых алгебр, причем разложение определяется однозначно. Неприводимые алгебры являются полями над полем  $R$  и, следовательно, всякая  $R$ -алгебра есть полупростая алгебра над полем  $R$ . Привычным способом определяется также кронекерово произведение  $R$ -алгебр. Далее строится теория Галуа  $R$ -алгебр. Группа Галуа  $R$ -алгебры  $A$  определяется как группа подстановок осей исходного репера, отображающая алгебру  $A$  на себя. Оказывается, что группа Галуа неприводимой  $R$ -алгебры в пространстве  $K_n$  имеет порядок не больший  $n$ . Если этот порядок равен  $n$ , то алгебра  $A$  называется нормальной. Оказывается, что всякая неприводимая  $R$ -алгебра  $A$  погружаема в нормальную, а для нормальных  $R$ -алгебр, т. е. по сути для нормальных расширений поля  $R$ , может быть доказана теорема, равносильная теореме теории Галуа.

Таким образом, в первой части рассматриваемой работы авторы по-новому обосновывают классическую теорию Галуа в геометрических терминах  $n$ -мерного векторного пространства. Такое геометрическое изложение позволяет им получить прозрачное решение ряда проблем теории полей алгебраических чисел. В частности, решается задача о

существовании полей алгебраических чисел с данной сигнатурой и задача о погружении.

Пусть  $n$  — степень поля  $K$  алгебраических чисел, а среди сопряженных полей  $K = K^1, K^2, \dots, K^n$ ;  $\sigma$  — число вещественных полей и  $\tau$  — число комплексно-сопряженных полей ( $n = \sigma + 2\tau$ ), называемое сигнатурой поля  $K$ . Спрашивается, существует ли для всякого  $n$  и

$\tau \leq \frac{n}{2}$  поле порядка  $n$  и сигнатуры  $\tau$ . Используя понятия геометрии теории Галуа, Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеев дают положительный ответ на этот вопрос и показывают даже, что таких полей бесконечно много.

Большая часть работы посвящена так называемой задаче о погружении для случая полупрямого произведения абелевого нормального делителя  $N$  и некоторой группы  $F$ . В случае произвольного расширения с абелевым нормальным делителем устанавливается необходимое условие для того, чтобы задача о погружении допускала решение.

К обратной задаче теории Галуа относится следующая задача о погружении полей. Пусть  $k_0$  — некоторое поле и  $k$  — его нормальное расширение с группой Галуа  $F$ . Пусть, далее,  $G$  — группа с нормальным делителем  $N$ , таким, что  $G/N \cong F$ , причем гомоморфизм группы  $G$  на группу  $F$  с ядром  $N$  считается заданным. Ищется расширение  $K/k_0$  поля  $k_0$  с группой Галуа  $G$ , такое, что выполняются следующие условия:  $K \supset k \supset k_0$ ;  $k$  принадлежит в поле  $K$  к группе  $N$ ; ограничение автоморфизмов из группы  $G$  на поле  $k$  определяет гомоморфизм группы  $G$  на группу  $F$ , совпадающий с заданным.

Исследования о погружаемости полей проводились, в основном, для случая, когда поле  $k_0$  есть некоторое поле алгебраических чисел; в частности, оно может быть полем рациональных чисел. Далее предполагалось, что нормальный делитель  $N$  абелев. Заметим, что если бы задача о погружении с абелевым нормальным делителем всегда допускала решение, то отсюда сразу бы вытекало положительное решение обратной задачи теории Галуа для разрешимых групп в следующем смысле: для всякого поля алгебраических чисел  $k_0$  и для всякой конечной разрешимой группы  $G$  существует нормальное расширение  $K$  поля  $k_0$  с группой Галуа, изоморфной группе  $G$ . Действительно, достаточно было бы осуществить последовательные погружения, соответствующие факторам главного ряда группы  $G$ . Именно поэтому задача о погружении уже с 30-х годов привлекала внимание как зарубежных (А. Шольц, Х. Рейхардт, Х. Хассе), так и советских алгебраистов (Н. Г. Чеботарев, Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев).

В «Проблемах» Чеботарев формулирует задачу о погружении как одну из основных задач теории Галуа, относящихся к обратной задаче этой теории, и приводит пример, показывающий, что задача не всегда допускает решение. Это обстоятельство было установлено также в других работах, и дальнейшие исследования направлялись на выяснение необходимых и достаточных условий погружаемости. Они были начаты еще в 1929 г. немецким алгебраистом А. Шольцем, который изучал случай двустепенно разрешимых групп. Существенно углубил резуль-

таты этой работы Чеботарев в статье «Исследования об относительно абелевых числовых полях» (1931 г.).

В названных ранних работах выявилось, что погружаемость для полей алгебраических чисел всегда имеет место, если нормальный делитель  $N$  абелев, а расширение полупрямое. Общий метод решения описан в работе Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева «Исследования по геометрии теории Галуа». В этой же работе указаны необходимые условия погружаемости для общего случая, т. е. без предположения о том, что группа  $G$  есть полупрямое (распадающееся) расширение нормального делителя  $N$  (известные ныне как условия согласности). Эти условия в 1948 г. вновь открыл Х. Хассе. Он выдвинул гипотезу об их достаточности, которую вскоре опровергли контрпримерами Д. К. Фаддеев и И. Р. Шафаревич.



Ю. И. Манин.

И. Р. Шафаревичу принадлежит цикл работ, посвященных задаче погружения и обратной задаче теории Галуа. Им решены частные случаи, обеих задач. Например, он показал, что задача погружения допускает всегда решение, если нормальный делитель  $N$  есть  $p$ -группа, группа  $G$  — полупрямое расширение, причем класс нильпотентности  $c < p$  или индекс  $N$  в группе  $G$  взаимно прост с  $p$ . Это является существенным обобщением аналогичного результата А. Шольца, рассматривавшего случай полупрямого произведения абелевого нормального делителя  $N$ . Несмотря на то что задача погружения для случая полей алгебраических чисел полностью не решена, полученные далеко идущие частные результаты позволили Шафаревичу решить обратную задачу теории Галуа для разрешимых групп. Им доказано, что для всякого поля алгебраических чисел  $K$  и для всякой разрешимой группы  $G$  существует бесконечное число расширений  $L/K$ , группа Галуа которых изоморфна группе  $G$ .

С. П. Демушкин и И. Р. Шафаревич исследовали задачу погружения для случая локальных полей. Основным полученный ими результат состоит в том, что в случае локального поля условия согласности Фаддеева — Хассе являются не только необходимыми, но и достаточными условиями погружаемости.

С. П. Демушкин, отпавляясь от идей, лежащих в основе конструкции полей с заданной разрешимой группой, предложенной И. Р. Шафаревичем, нашел для полей алгебраических чисел условия, которые вместе с условием согласности необходимы и достаточны для решения задачи погружения в случае абелева нормального делителя. Эти дополнительные условия формулируются в терминах обращения в единицу некоторых инвариантов арифметического характера.

Значительный успех в теории погружения был достигнут А. В. Яковлевым. Именно, он нашел для произвольного основного поля, с характеристикой, не делящей порядок групп  $N$ , необходимые и достаточные условия погружения. Эти условия формулируются в терминах гомологической алгебры и оказываются очень удобными для применения в частных случаях.

Одно из самых полных решений обратной задачи теории Галуа для расширений некоторого поля  $K$  получается, если удастся достаточно обзримым способом описать группу Галуа  $G_{\bar{K}}^{\bar{K}}$  алгебраического замыкания  $\bar{K}$  поля  $K$ . Обыкновенно  $\bar{K}/K$  является бесконечным алгебраическим расширением, и тогда, согласно В. Круллю, группу Галуа  $G_{\bar{K}}^{\bar{K}}$  принято рассматривать как топологическую бикompактную группу, фундаментальная система окрестностей единицы которой состоит из подгрупп конечного индекса. Конечные нормальные расширения поля  $K$  соответствуют при этом взаимно однозначно замкнутым нормальным делителям конечного индекса в группе  $G_{\bar{K}}^{\bar{K}}$ . Если строение группы  $G_{\bar{K}}^{\bar{K}}$  описано, то тем самым обозрение всех расширений поля  $K$  с заданной группой  $G$  сводится к чисто теоретико-групповым вопросам, которые, впрочем, могут быть в свою очередь довольно сложными.

Удовлетворительное описание группы  $G_{\bar{K}}^{\bar{K}}$  получено пока для очень немногих классов полей. Из работ Е. Штейница, опубликованных в начале нашего столетия, эта группа известна для случая конечных полей  $K$ . Для случаев, когда поле  $K$  есть поле алгебраических чисел, поле алгебраических функций одной переменной над конечным полем или так называемое локальное поле (т. е. поле  $p$ -адических чисел или поле степенных рядов с коэффициентами из конечного поля), изучалась и удовлетворительное решение получила более ограниченная задача — задача описания группы Галуа  $G_K^{A(K)}$  максимального абелева расширения  $A(K)$  поля  $K$ . Описание группы  $G_K^{A(K)}$  было достигнуто в рамках теории полей классов в работах Д. Гильберта, Т. Такаги, Э. Артина, Н. Г. Чеботарева, Х. Хассе, К. Шевалле и др. Теория полей классов сводит описание группы  $G_K^{A(K)}$  к арифметическим свойствам поля  $K$ . Сведение строения группы  $G_K^{A(K)}$  к строению поля  $K$  осуществляется также с помощью так называемой теории куммеровских расширений.

На пути получения аналогичного описания для случая полного алгебраического замыкания полей вышеуказанных типов и тем самым решения проблемы охвата совокупности также неабелевых расширений возникали и возникают пока большие трудности. Тем более важным является результат, относящийся к неабелевым расширениям локальных полей, полученный И. Р. Шафаревичем в работе «О  $p$ -расширениях» (1947 г.). Шафаревич изучил максимальное  $p$ -расширение  $P(K)$  поля  $K_p$   $p$ -адических чисел, поля вычетов которого имеют характеристики  $p$ . При дополнительном предположении —  $K_p$  не содержит  $p$ -го корня из единицы — ему удалось описать группу  $G_{K_p}^{P(K_p)}$ . Оказалось, что  $G_{K_p}^{P(K_p)}$  по сути есть свободная топологическая  $p$ -группа с  $n_0 + 1$  образующих,

где  $n_0$  — степень  $K_p$  над полем рациональных  $p$ -адических чисел. Более точно,  $G_{K_p}^{P(K_p)}$  есть пополнение свободной группы  $F_{n_0+1}$  с  $n_0 + 1$  образующими в топологии, определенной некоторой серией нормальных делителей с  $p$ -фактор-группами в группе  $F_{n_0+1}$ .

Ограничение, согласно которому поле  $K_p$  не должно содержать  $p$ -х корней из единицы, было в дальнейшем снято в работах А. И. Скопина, японского алгебраиста К. Кавада и С. П. Демушкина. В этом более общем случае группа максимального  $p$ -расширения уже больше не является свободной топологической  $p$ -группой, а оказывается группой с  $n_0 + 2$  образующими, связанными одним определяющим отношением, явная форма которого найдена в работе Демушкина.

Для числовых полей Шафаревич исследовал группу Галуа максимального  $p$ -расширения с данными точками ветвления, т. е. с данными простыми делителями дискриминанта. Оказалось, что число образующих групп Галуа выражается посредством некоторых арифметических инвариантов основного поля, а минимальное число соотношений между образующими оценивается сверху. В частности, эти подсчеты применимы к неразветвленным расширениям.

Исследование неразветвленных расширений имеет длинную историю. Для каждого поля алгебраических чисел существует максимальное неразветвленное абелево расширение — так называемое абсолютное поле классов. Оно совпадает с исходным полем в том и только в том случае, когда все идеалы этого поля главные, т. е. когда в поле выполняется арифметика, подобная арифметике рациональных чисел. Для исходного поля можно строить «башню полей классов» — поле классов, поле классов поля классов и т. д. Долгие годы существовала гипотеза о конечности башни полей классов, справедливость которой означала бы, что всякое поле алгебраических чисел можно погрузить в поле с «хорошей» арифметикой. Таким полем было бы последнее поле «башни».

Подсчет Шафаревича показал, что для групп Галуа неразветвленных  $p$ -расширений число образующих может быть сколь угодно большим, число же соотношений может лишь незначительно превысить число образующих. В связи с этим обстоятельством становится неправдоподобной гипотеза о конечности башни для любого поля, так как трудно ожидать, что в группе с большим числом образующих сравнительно малое число соотношений может настолько сильно связать образующие, что группа окажется конечной. Во всяком случае, результат Шафаревича позволил редуцировать построение башни к четко поставленной задаче теории групп. Задача была решена учеником И. Р. Шафаревича Е. С. Голодом. Именно, он доказал, что топологическая  $p$ -группа с  $d$  образующими и числом соотношений  $S \leq \frac{(d-1)^2}{4}$  не может быть конечной. Это дало возможность построить примеры полей, для которых башни полей классов бесконечны. Такие поля не могут быть погружены в поля с «хорошей» арифметикой.

Своеобразную главу теории Галуа составляет недавно сформиро-

вавшаяся теория модулей Галуа. Модулем Галуа называется естественным образом (мы не определяем точное значение этих слов) связанная с нормальным расширением  $K$  поля  $k$  абелева группа, в которой элементы группы Галуа действуют как операторы. Примерами модулей Галуа могут служить аддитивная группа поля  $K$ , мультипликативная группа, аддитивная группа кольца целых чисел поля  $K$  (для полей алгебраических чисел и для локальных полей) и т. д.

М. Дойринг и Э. Нетер решили до конца вопрос о строении аддитивной группы нормального поля, как модуля Галуа, доказав теорему о существовании нормального базиса, из которой следует, что аддитивная группа, как модуль Галуа, изоморфна групповой алгебре группы Галуа над основным полем. Изучению строения мультипликативной группы нормального расширения локального поля посвящены отдельные работы М. Краснера, К. Ивасава, Д. К. Фаддеева и др. Наиболее полные результаты получены в последние годы З. И. Боровичем. Им исследованы в этом плане, почти исчерпывающе, циклические  $p$ -расширения локального поля, а также расширения с любой  $p$ -группой Галуа, но в предположении, что основное поле не содержит  $p$ -х корней из единицы.

С начала 30-х годов Н. Г. Чеботарев все вновь и вновь возвращался к одному важному циклу проблем теории Галуа — *проблемам Гильберта — Клейна и проблеме резольвент*. К этому циклу относятся несколько важных его работ, которые были отмечены Государственной премией. Одна из них — статья «Проблемы резольвент» — обзорная. Обзор этих работ Чеботарева содержится также в статье его ученика В. В. Морозова «О некоторых вопросах проблемы резольвент». Указанные обзоры положены в основу нашего обсуждения соответствующей проблематики.

Проблемы Гильберта — Клейна и проблема резольвент возникают естественным образом как обобщение проблемы разрешимости алгебраических уравнений с одним неизвестным в радикалах. Руффини и Абель показали, что общее уравнение степени выше четвертой в радикалах неразрешимо. Для произвольных уравнений Галуа показал, что уравнение разрешимо в радикалах тогда и только тогда, если группа Галуа этого уравнения разрешима. Теорема Руффини — Абеля о неразрешимости общего уравнения степени  $n \geq 5$  вытекает из этого результата Галуа как частный случай.

В задаче о разрешимости уравнения в радикалах особую роль играют биномиальные уравнения  $x^n - a = 0$ , зависящие только от одного параметра  $a$ . Отрицательный результат Руффини — Абеля наводит на мысль расширить постановку вопроса и попытаться не только сводить нахождение корня уравнения  $f(x) = 0$  к последовательности решения биномиальных уравнений, но и допустить использование других уравнений, коэффициенты которых зависят также от одного или вообще небольшого числа параметров. Такая возможность подсказывается примером общего уравнения пятой степени. Ф. Клейн показал, что нахождение корня общего уравнения пятой степени

$$x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$$

может быть сведено к решению квадратных уравнений и к решению уравнения пятой степени частного вида

$$y^5 + 15y^4 - 10\gamma y^2 + 3\gamma^2 = 0,$$

коэффициенты которого зависят только от одного параметра  $\gamma$ . Для общего уравнения степени  $n \geq 5$  сведение к однопараметрическому уравнению оказывается невозможным. Конкретные исследования в этом направлении велись в 20-х годах Гильбертом и Виманом: ими получены результаты, касающиеся уравнений степеней  $n = 6, 7, 8, 9$ . В общем случае задача очень трудная.

Н. Г. Чеботарев предложил два новых подхода к данной проблеме. Один сводится к теории непрерывных групп, другой — к алгебраической геометрии. Исходя из рассмотренных примеров, Чеботарев предположил, что возможность привести заданное уравнение  $f(x) = 0$  с помощью подходящего преобразования Чирнгаузену к уравнению  $g(y) = 0$  с коэффициентами, зависящими от  $k$  параметров, связано с возможностью погружения группы Галуа полинома  $f(x)$  в непрерывную группу преобразований, действующую в пространстве размерности  $k$ . Его дальнейшие исследования подтвердили эту гипотезу. Основным результатом был сформулирован в терминах одевающей группы<sup>4</sup>. Этот результат гласит, что если группа Галуа полинома  $f(x)$  обладает одевающей группой  $H$ , действующей в  $k$ -мерном пространстве, то  $f(x)$  допускает резольвенту с коэффициентами, зависящими от  $k$  параметров.

Другой подход Чеботарева сводится к рассмотрению так называемых многообразий совпадений. Пусть

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

есть уравнение, коэффициенты которого являются полиномами от некоторого числа параметров  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Корни уравнения зависят тогда непрерывным образом от этих параметров. Для некоторых значений параметров корни будут кратными; такие точки  $m$ -мерного пространства параметров  $u_i$  называются критическими; они образуют так называемое критическое многообразие  $R$ . Строение критического многообразия  $R$  более детально вскрывается введением в рассмотрение группы монодромии уравнения  $f(x) = 0$ . Если в пространстве параметров из некоторой некритической точки  $A$  описать замкнутый путь, возвращающийся в точку  $A$ , то корни  $f(x)$ , соответствующие точке  $A$ , испытают подстановку. Совокупность всех подобных подстановок, соответствующих всем путям, образует группу, называемую группой монодромии рассматриваемого уравнения. Она оказывается изоморфной группе Галуа этого уравнения, рассматриваемого как уравнение над полем рациональных функций от  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ . Пусть  $P$  — критическая точка, а  $\sigma$  — некоторая подстановка из группы монодромии уравнения. Если в любой окрестности точки  $P$  найдется путь, при котором корни уравнения испытывают подстановку  $\sigma$ , то, согласно

<sup>4</sup> Если  $G$  — конечная группа, то непрерывная группа  $H$  называется одевающей группой, если  $H$  содержит  $G$ , а никакая подгруппа и никакая фактор-группа группы  $H$  группы  $G$  не содержит.



Чеботареву, точка  $P$  принадлежит многообразию  $H_\sigma \subset R$ . В многообразии  $R$  рассматриваются подмногообразия  $H_\sigma$ , соответствующие всевозможным подстановкам  $\sigma$  из группы монодромии, и эти подмногообразия упорядочиваются по включению. Вопрос о существовании резольвент для  $f(x)$  с коэффициентами, зависящими от возможно меньшего числа параметров, Чеботарев связывает с длиной цепочек многообразий  $H_\sigma$ .

Обе идеи Н. Г. Чеботарева открывают интересный подход к рассматриваемой проблеме, более детальное обсуждение которого содержится в упомянутой статье В. В. Морозова.

## Теория групп

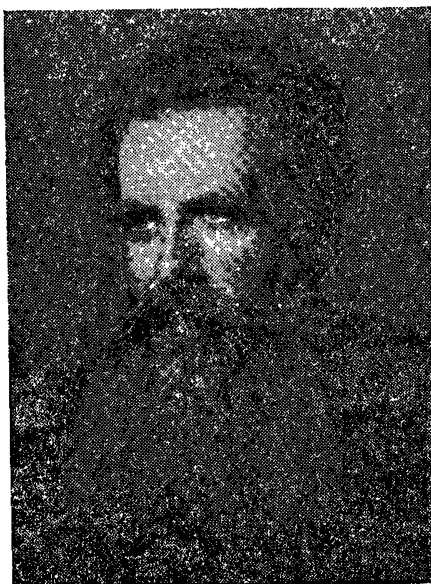
Теория групп занимает в советской алгебре особое место.

В силу благоприятных стечений обстоятельств, о которых сказано ниже, многие советские алгебраисты основную часть своего творчества посвящают развитию именно этой алгебраической дисциплины.

Теория групп сравнительно новая математическая дисциплина. Она сформировалась в начале нашего века, хотя само понятие группы появилось столетием раньше и в более или менее четкой форме употреблялось уже Абелем, Лагранжем и др. Большое значение понятие группы приобрело в гениальных исследованиях Галуа, посвященных проблеме разрешимости алгебраических уравнений произвольной степени с одним неизвестным в радикалах. Именно Галуа, опираясь на исследования Лагранжа, выявил значение групп подстановок корней уравнения, сохраняющих рациональное отношение между ними, для решения этой проблемы. Когда в середине и во второй половине прошлого столетия математики поняли всю глубину и плодотворность концепций Галуа, группы подстановок конечных множеств, а затем и более общие группы преобразований (линейные группы преобразований, непрерывные группы преобразований) и их свойства начали широко использоваться в алгебре, геометрии, анализе и других разделах математики (К. Жордан, Д. Клейн, С. Ли и др.). Параллельно с этим многие математики (К. Жордан, О. Гельдер, Г. Фробениус, Л. Силов, И. Шур и др.) начали изучать общие свойства конечных групп, абстрагируясь от их непосредственных применений.

До конца XIX в. предметом рассмотрения являлись группы преобразования как конечных, так и бесконечных множеств. В начале нашего столетия в изучении групп постепенно возникает новая точка зрения. Группа начинает рассматриваться как самостоятельный объект — некоторое множество  $G$ , на котором задана операция умножения, удовлетворяющая определенным аксиомам. Такое множество  $G$  с определенным на нем умножением называется абстрактной группой. Возникла задача изучения свойств абстрактных групп отвлекаясь от возможных их реализаций как групп преобразования, действующих в каких-либо множествах или структурах. На этом этапе развития

появились исследования по теории групп в нашей стране. В настоящее время термин «теория групп» принято понимать в смысле теории абстрактных групп, в отличие от теории групп подстановок и групп преобразования, имеющих свои специфические задачи, понятия и методы.



О. Ю. Шмидт.

Отправными исследованиями для развития теории групп в нашей стране послужили работы О. Ю. Шмидта, особенно его монография «Абстрактная теория групп», вышедшая в Киеве в 1916 г. Еще будучи студентом, О. Ю. Шмидт принимал участие в алгебраическом семинаре Граве. В связи с изучением теории Галуа он непосредственно занимался теорией групп подстановок и теорией абстрактных групп. В студенческой работе «О разложении конечных групп в прямые неразложимые сомножители» Шмидт дал новое доказательство одной из основных теорем теории конечных абстрактных групп, незадолго до этого доказанной немецким математиком Р. Ремаком. Задача заключалась в выяснении однозначности разложения абстрактной группы в произведение прямо неразложимых множителей. Ремак показал, что однозначность такого разложения выполняется для конечных групп в следующем смысле. Если конечная группа разложена двумя способами в прямое произведение прямо неразложимых множителей, то, возможно вплоть до порядка, множители обоих разложений попарно центрально изоморфны. Новыми упрощенными доказательствами этой теоремы Шмидт положил начало дальнейшим исследованиям существования однозначности прямых разложений.

К студенческим годам относится также обширный мемуар Шмидта «Об уравнениях, решаемых в радикалах, степень которых есть степень простого числа» (1913 г.). Уже по заглавию видно, что тема его исследований непосредственно примыкала к теории Галуа, хотя основная часть работы относилась к теории групп подстановок. Шмидт продолжил исследования К. Жордана, Л. Диксона и других, посвященные обзору разрешимых примитивных групп подстановок степени  $p^m$ , где  $p$  — простое число. В мемуаре разработан новый интересный подход к решению этой задачи, и приходится сожалеть, что тема не продолжена в работах советских алгебраистов. Вообще теория групп подстановок в дальнейшем не занимала в советских исследованиях по теории групп центрального места. Только почти 40 лет спустя Д. А. Супруненко и его ученики вновь обратились к теме, начатой О. Ю. Шмидтом.

Из всех исследований раннего периода творчества О. Ю. Шмидта самый глубокий след в развитии теории групп в СССР оставила книга

«Абстрактная теория групп», работу над которой он также начал в студенческие годы. Теория групп была представлена в то время лишь небольшим числом монографий зарубежных авторов. Книга Шмидта была написана на самом современном уровне. Доказательства основных теорем в ней во многом упрощены и сделаны более прозрачными, включены также новейшие результаты автора о прямых разложениях. В изложении теории представлений и теории характеров он следует новейшим работам И. Шура. Книга отличалась строгостью, простотой и доступностью изложения материала. Благодаря всем этим достоинствам она многие годы была настольной книгой советских алгебраистов, а также способствовала привлечению интересов начинающих алгебраистов именно к теории абстрактных групп.

В первые годы после Великой Октябрьской социалистической революции Шмидт все свои силы отдавал решению сложных организационных задач, стоявших перед молодым Советским государством. И все же в 20-х годах он находит время для написания нескольких работ по абстрактной теории групп. Остановимся вкратце на содержании некоторых из этих работ, поскольку трактуемые в них вопросы явились исходными для ряда исследований советских алгебраистов, занимающихся теорией групп.

«Группы, все подгруппы которых специальные» (1924 г.). Термин «специальные группы» устарел — ныне их принято называть нильпотентными. В работе устанавливаются все конечные группы, которые сами не нильпотентны, но все их собственные подгруппы этим свойством обладают.

В описываемую нами первую эпоху теории абстрактных групп основным объектом изучения были конечные группы. Вначале многим казалось, что основной естественной задачей теории конечных групп является описание всех неизоморфных групп любого конечного порядка  $n$ . Для не слишком больших  $n$  ( $n < 1000$ ) такая классификация успешно проводилась в начале столетия (особенно американским математиком Миллером). При этом был накоплен большой экспериментальный материал. Но постепенно выяснилось, что порядок группы, хотя и является очень существенным инвариантом, вообще говоря, далеко не достаточен как основа для описания строения группы. В силу этого обстоятельства исходная постановка задачи — классификация конечных групп по их порядкам — очень быстро оказалась тупиком. Ей на смену постепенно пришла другая тенденция: изучение классов групп, обладающих теми или иными свойствами. В смежных математических дисциплинах, особенно в теории чисел, как важный самостоятельный объект изучения выделился класс абелевых групп. В силу основной теоремы о конечных абелевых группах группы этого класса легко классифицируются, и их основные свойства хорошо обозримы. Другие классы, в каком-либо смысле близкие к абелевым, — разрешимые группы, нильпотентные группы — оказались более сложными: их исследования продолжаются и в настоящее время. На указанном пути для начала было очень важно выделить и описать хотя бы некоторые подклассы изучаемых классов. В упомянутой работе

Шмидт дает обозрение групп, указанных в заглавии. Их важность состоит хотя бы уже в том, что всякая конечная ненильпотентная группа должна содержать, по меньшей мере, одну подгруппу такого типа. К рассматриваемому направлению относится также работа «Группы, имеющие только один класс инвариантных подгрупп» (1926 г.).

Большое значение для дальнейшего развития теории групп имела работа Шмидта «О бесконечных группах с конечной цепью» (1929 г.). Она относится к новому направлению в теории абстрактных групп, сформировавшемуся в 20-х годах. До этого времени в теории абстрактных групп в основном изучались свойства конечных групп, в 20-х же годах постепенно начало выясняться, что требование конечности зачастую неестественно. Справедливость тех или иных основных теорем конечных групп не обязательно связана со свойством конечности группы, а часто является следствием какого-либо другого условия, которое всегда выполняется в конечной группе, но может выполняться и в группе бесконечного порядка. На примере указанной работы Шмидта очень удобно пояснить эту важную мысль. Речь в ней идет о выполнимости уже упомянутой теоремы Ремака об однозначности (вплоть до центрального изоморфизма) прямого разложения конечной группы в прямо неразложимые сомножители. Устанавливается, что теорема верна в более общей ситуации: группа не обязательно должна быть конечной; достаточно предположить, что любая возрастающая и любая убывающая цепь нормальных делителей содержит лишь конечное число членов. Это условие тривиально выполняется, если группа конечна. Но в доказательстве Шмидта используется только упомянутое условие обрыва восходящих и нисходящих цепей нормальных делителей. Более того, в работе рассматривается еще более общая ситуация: объектом исследования являются не группы, а так называемые группы с операторами. Для однозначности прямого разложения группы с операторами оказывается достаточным также условие обрыва цепей так называемых допустимых нормальных делителей. Для случая абелевых групп с операторами это положение уже установлено немецким алгебраистом В. Круллем. Общая же теорема содержится в работе Шмидта. Ныне она известна как теорема Ремака — Шмидта или Крулля — Шмидта. Ее дальнейшим обобщением и уточнением занимались многие алгебраисты, особенно советские.

В 30-х годах образовалась советская школа теории групп. В конце 20-х годов О. Ю. Шмидт начал читать в Московском университете спецкурсы по теории групп и привлек к этой тематике молодых математиков — А. П. Дидмана, А. А. Кулакова, А. Г. Куроша, В. К. Туркина, С. А. Чунихина. С весны 1930 г. на дому О. Ю. Шмидта начал работать семинар по теории групп. На нем докладывались результаты исследований и обсуждались планы дальнейшей работы. Этот семинар способствовал развитию теории групп в СССР в первой половине 30-х годов. В 1938 г. вышел сборник «Труды семинара по теории групп», посвященный 25-летию научной деятельности О. Ю. Шмидта. В нем дан обзор работ участников семинара, опубли-

кованных в различных советских и зарубежных журналах за 1929—1936 гг.

Большинство участников семинара О. Ю. Шмидта занималось теорией конечных групп, в основном абстрактных. Но определенный интерес привлекали у них свойства конечных групп подстановок (примером могут служить работы А. А. Кулакова). Наряду с методами чистой теории групп для решения поставленных задач широко применялись представления групп и теория характеров. В теории конечных групп особый интерес вызвала известная гипотеза В. Бернсайда о том, что всякая конечная группа нечетного порядка должна быть разрешимой<sup>5</sup>. В связи с этой гипотезой усилия А. П. Дидмана, А. А. Кулакова, В. К. Туркина и С. А. Чунихина были направлены на нахождение достаточных признаков непростоты групп нечетного порядка. А. П. Дидман установил ряд подобных критериев, формулируемых в терминах композиций классов сопряженных элементов. А. А. Кулаков вывел аналогичные критерии с помощью теории характеров. В. К. Туркин с помощью теории мономиальных представлений и смещения групп доказал разрешимость классов групп нечетного порядка, налагая определенные требования на разложение порядка на простые множители. Так, им установлена разрешимость групп, порядок которых является произведением семи простых чисел, отличных от двух. С. А. Чунихин установил ряд критериев непростоты групп, а также условий существования подгрупп определенного вида в заданной группе. В эти годы был накоплен ценный материал как в развитии методов исследований конечных групп, так и в установлении их свойств. Большую известность приобрела теорема А. А. Кулакова. Он доказал, что число подгрупп порядка  $p^n$  в нециклической группе порядка  $p^m$  ( $m > n$ ) сравнимо с  $1 + p$  по модулю  $p^2$ .

Особое место в кругу молодых московских алгебраистов из семинара О. Ю. Шмидта занимал А. Г. Курош. В отличие от других участников семинара он занимался теорией бесконечных групп. Его отчет о научных работах, опубликованный в «Трудах семинара», так и называется «О некоторых вопросах теории бесконечных групп». Работами Куроша 30-х годов открывается большой цикл исследований бесконечных дискретных групп, ставший характерным для советской теоретико-групповой школы. Рассмотрим эти работы более подробно.

Две важные работы А. Г. Куроша (1932—1936 гг.) относятся к усилению и обобщению теоремы Ремака — Шмидта. С одной стороны, ему удалось показать, что для единственности (вплоть до центрального изоморфизма) прямого разложения в прямо неразложимые множители достаточным является предположение об обрыве только убывающих нормальных цепей. Правда, соответствующей теоремой Куроша теорема Ремака — Шмидта не перекрывается. Последняя формулируется для групп с операторами, в доказательстве же Куроша существенно используются свойства примарных абелевых групп без операторов,

---

<sup>5</sup> Гипотеза решена положительно в 1962 г. в работе американских математиков Ж. Г. Томпсона и В. Фейта «Разрешимость групп нечетного порядка».

поэтому и сама теорема относится только к группам без операторов. В работе 1936 г., продолжая исследования немецких математиков Бэра и Фиттинга, Курош установил необходимые и достаточные условия для того, чтобы прямое разложение группы в произведение прямо неразложимых множителей было единственным.

Вторая важная тема исследований А. Г. Куроша в теории бесконечных групп относится к теории свободных произведений групп. Это понятие было определено Артином, но первая глубокая и в некотором смысле основная теорема о свободных произведениях доказана Курошем в работе 1934 г. Она констатирует: произвольная подгруппа свободного произведения групп представима как свободное произведение некоторой свободной группы и некоторого числа подгруппы со-

пряженных подгруппам свободных сомножителей. Наряду с этим основным фактом в работах Куроша доказана другая основная теорема, которой устанавливается изоморфизм двух свободных разложений группы в произведение свободно неразложимых сомножителей.

Третья из тем, которыми занимался в 30-е годы А. Г. Курош, — это теория решеток (структур) и применения теории решеток к теории групп. В связи с приложениями к теории групп особый интерес представляют так называемые дедекиндовы решетки. Важность этого понятия объясняется тем, что совокупности нормальных делителей группы для операций пересечения и порождения образуют дедекиндову решетку. Как показали работы А. Г. Куроша и О. Оре, в терминах дедекиндовых решеток естественно формулируются теоремы типа Жордана — Гельдера и типа Ремака — Шмидта. Эта тематика развита в дальнейших исследованиях Куроша, а также в работах его учеников и других советских и зарубежных алгебраистов.

Работа А. Г. Куроша об абелевых группах без кручения, относящаяся к этому периоду, рассмотрена ниже, в связи с другими советскими исследованиями по теории абелевых групп.

Из результатов по теории бесконечных групп, полученных участниками семинара О. Ю. Шмидта, важное значение имеет работа А. П. Дицмана о центре бесконечных  $r$ -групп. В ней установлен интересный критерий для существования нетривиального центра у бесконечной  $r$ -группы. Для этого оказывается достаточно, чтобы группа содержала по меньшей мере один конечный класс сопряженных элементов отличный от единичного. Доказательство опирается на следующую лемму Дицмана: конечное инвариантное (т. е. выдерживающее внутренние автоморфизмы) подмножество группы  $G$  порождает конечный



А. А. Кулаков.

нормальный делитель. Указанные теоремы и лемма Дицмана приобрели большое значение в дальнейших исследованиях бесконечных групп.

Начиная со второй половины 30-х годов исследовательская работа в области теории групп существенно расширяется, особенно в направлении теории бесконечных групп. Семинар О. Ю. Шмидта пополняется новыми участниками. Этому способствует педагогическая работа участников семинара, и в первую очередь А. Г. Куроша, привлекавшего к работе в семинаре студентов и аспирантов. С 1938 г. семинар работает в Московском университете. На его заседаниях выступают с докладами не только московские математики, но и алгебраисты из других научных центров. В конце 30-х и в 40-х годах формируются теоретико-групповые школы в других городах страны. Новым центром теоретико-групповых исследований становится Ленинград, где под руководством В. А. Тартаковского с 1934/35 г. работает семинар по теории групп. П. Г. Конторович и С. Н. Черников начали теоретико-групповые исследования в Свердловске. Начиная с конца 30-х годов большой вклад в теоретико-групповые исследования вносит А. И. Мальцев. В дальнейшем, работая в Ивановском педагогическом институте, он привлёк к этим исследованиям своих учеников (об А. И. Мальцеве подробно см. ниже). Некоторые молодые алгебраисты, работая в других городах, вели теоретико-групповые исследования в непосредственной связи с московской школой (В. Л. Нисневич — Минск, А. В. Товбин — Киев, Харьков).

В 1944 г. была издана монография А. Г. Куроша «Теория групп». Эта книга подводила итог развития главным образом теории бесконечных групп за годы до Великой Отечественной войны. В большой заключительной главе в общих чертах была начерчена программа дальнейших исследований и сформулированы конкретные проблемы, которые во многом предопределили развитие этой теории в нашей стране в послевоенные годы. Благодаря книге Куроша существенно повысился интерес к теоретико-групповым исследованиям и за рубежом. Исследования по теории групп в нашей стране развивались в тесной связи с аналогичными зарубежными исследованиями, особенно с английскими (К. Гирш, Б. Нейман, Ф. Холл и др.), американскими (Р. Бэр, С. Маклейн и др.), чехословацкими (В. Коржинек) и др. В ряде основных направлений советская школа теории групп занимала при этом ведущее место.

Охарактеризуем вкратце результаты исследований советских алгебраистов по теории групп в период примерно от второй половины 30-х до начала 50-х годов. Указанные границы, конечно, довольно условны, развитие традиционно сложившейся тематики продолжалось и продолжается после 50-х годов без перерывов, но в 50-х годах в советских работах по теории групп все более и более отчетливо проявляются новые тенденции, характерные для современной эпохи.

Дальнейшее развитие получили названные выше первые исследования по теории бесконечных групп О. Ю. Шмидта, А. Г. Куроша и А. П. Дицмана. Существенно расширилась проблематика по прямым разложениям групп. Наряду с классической постановкой вопроса об изоморфизме прямых разложений в произведение прямо неразложимых сомножителей большой интерес приобрела задача о возможности цен-

трально-изоморфных двух прямых разложений, вообще говоря, в прямо разложимые сомножители. Оказалось, что такая возможность во многом зависит от расположения центра внутри рассматриваемых групп. Одно достаточное условие для существования изоморфных продолжений установил О. Н. Головин в 1939 г. Хорошо приспособленным для исследования прямых разложений оказался аппарат теории дедекиндовых решеток. В рамках этой теории исследования вели М. И. Граев, А. Г. Курош, А. Х. Лившиц, а за рубежом — Р. Бэр (США). Значительно были продвинуты исследования по теории дедекиндовых решеток. Результатом этих исследований явилось установление весьма общего достаточного условия существования центрально-изоморфных продолжений прямых разложений для групп с операторами, формулируемого в терминах строения и расположения центра группы <sup>6</sup>.

В рассматриваемый период успешно изучались абелевы группы. Теория абелевых групп занимает в теории групп несколько обособленное место. Тонкие результаты этой теории с трудом допускают обобщение на некоммутативные группы. За последние десятилетия теория абелевых групп оказалась ближе к теории модулей, чем к теории некоммутативных групп.

Конечные абелевы группы и, более того, абелевы группы с конечным числом образующих давно хорошо изучены. В 20—30-х годах немецкими алгебраистами Г. Прюфером и Г. Ульмом была дана полная классификация счетных периодических абелевых групп. Группы без кручения оставались почти совсем неизученными. Советские алгебраисты достигли в этой области существенных успехов. В 1937 г. А. Г. Курош дал классификацию так называемых  $p$ -примитивных групп без кручения конечного ранга с помощью классов матриц с целыми  $p$ -адическими коэффициентами. К этому исследованию примыкают работы Д. Дэри и Л. А. Калужнина. Наконец, А. И. Мальцев (1938 г.) свел проблему классификации произвольных абелевых групп без кручения конечного ранга к проблемам своеобразного матричного исчисления бесконечных последовательностей целочисленных  $p$ -адических матриц (по всем простым  $p$ ). Результаты этих исследований нельзя рассматривать как окончательные: до выделения сколько-нибудь обозримых инвариантов даже для класса групп без кручения конечного ранга еще очень далеко. Для теоретико-числовых вопросов интерес могут представлять также кольца эндоморфизмов групп без кручения, исследование которых для одного частного случая было начато в работе З. М. Кишкиной (1945 г.). Проблеме разложения групп без кручения в прямую сумму групп ранга 1 посвящена работа Е. С. Ляпина (1939 г.).

Неожиданно трудной оказалась задача изучения бесконечных периодических, а по существу примарных, абелевых групп произвольной бесконечной мощности. Результаты Прюфера и Ульма на несчетные абелевы группы не переносятся. Продвижение здесь достигнуто в важных работах Л. Я. Куликова. Было известно, что в отличие от случая

<sup>6</sup> Точную формулировку этого условия, а также подробности, касающиеся рассматриваемых здесь вопросов, см. в кн. А. Г. Куроша «Теория групп», изд. 2-е.





Л. А. Калужнин.

счетных групп несчетная примарная абелева группа без элементов бесконечной высоты не обязательно разлагается в прямую сумму циклических групп. Л. Я. Куликов показал (1941—1945 гг.), что в них всегда содержится канонически определенный класс изоморфных между собой так называемых базисных групп, разложимых в прямую сумму циклических. Тем самым была достигнута некоторая предварительная классификация примарных абелевых групп без элементов бесконечной высоты и любой мощности. Для произвольных несчетных примарных групп положение оказалось более сложным: Куликов нашел примеры, показывающие, что непосредственные аналоги теоремы Ульма в несчетном случае неверны.

Многочисленные исследования 40-х годов относятся к свободным группам, свободным произведениям групп, а также к изучению свойств групп, задаваемых образующими и определяющими отношениями. Эта тематика была особенно близка ленинградской теоретико-групповой школе, но ею занимались также московские алгебраисты — ученики А. Г. Куроша. Группа автоморфизмов свободного произведения конечного числа свободно неразложимых групп описана в работах О. Н. Головина, Л. Е. Садовского (1938 г.) и Д. И. Фукс-Рабиновича (1941 г.). Глубокая теорема о свободных разложениях групп с конечным числом образующих установлена И. А. Грушко. Им доказано следующее основное положение: если группа  $G$  с конечным числом образующих разложена в свободное произведение конечного числа групп  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_k$ ,

$$G = A_1 * A_2 * A_3 * \dots * A_k,$$

то минимальное число образующих для группы  $G$  равно сумме чисел минимальных систем образующих сомножителей  $A_i$ .

Важной и принципиально трудной проблемой является изучение групп, заданных образующими и определяющими отношениями. Эта проблема распадается на несколько проблем алгоритмического характера: проблема слов, проблема изоморфизма и др. Центральной является проблема слов, или проблема тождества, которая формулируется так. Пусть группа  $G$  задана образующими  $S_1, S_2, \dots$ , между которыми выполняются некоторые заданные отношения

$$f_1(S_1, \dots, S_k) = 1; \quad f_2(S_1, \dots, S_k) = 1; \dots;$$

$$f_i(S_1, \dots, S_k) = 1; \dots$$

Требуется указать процедуру (алгоритм), позволяющую установить, что два слова в алфавите образующих представляют один и тот же эле-

мент группы: равенство слов должно быть следствием выполнения образующими заданных определяющих отношений. В настоящее время, благодаря работам П. С. Новикова, известно, что в общем случае подобного алгоритма может и не быть, но в рассматриваемый период алгоритмы распознавания равенства слов были известны для некоторых довольно узких частных случаев. В. А. Тартаковский провел детальное исследование этого вопроса (1949 г.) и предложил очень общую методику (так называемый метод решета), позволяющую решать задачу тождества слов в обширном классе случаев.



Л. Я. Куликов.

Начало новой тематике положил исследованием о нильпотентных произведениях групп О. Н. Головин. Проблему сформулировал А. Г. Курош. Для построения новых групп исходя из заданных были известны и детально изучены две композиции в классе всех групп: образование прямого произведения и образование свободного произведения заданных групп. Если рассматривать группы вплоть до изоморфизма, то обе композиции, как нетрудно заметить, обладают рядом аналогичных свойств: обе композиции ассоциативны; оба произведения содержат подгруппы, изоморфные сомножителям, и порождаются этими подгруппами, причем каждая



О. Н. Головин.

такая подгруппа пересекается с нормальным делителем, порожденным другими только по единице, и т. д. Возник вопрос о возможном существовании других групповых композиций со столь же хорошими свойствами. В 1950 и 1951 гг. О. Н. Головин построил целую бесконечную серию аналогичных композиций — так называемые нильпотентные произведения, — занимающих в некотором смысле промежуточное положение между свободным и прямым произведениями групп, и начал детальное их изучение. Нильпотентные произведения групп в последующие годы привлекли внимание многих алгебраистов (М. Бенадо в Румынии, С. Моран в Англии и др.).

С самого начала развития теории абстрактных групп выяснилось значение арифметических свойств порядков элементов и порядков подгрупп. Еще в XIX в.



С. А. Чунихин.

в теории конечных групп Л. Силов доказал фундаментальные теоремы о существовании и расположении  $p$ -подгрупп в группе. В связи с характером советских теоретико-групповых исследований, направленных главным образом на исследование бесконечных групп, естественными были попытки перенести силовские теоремы на случай бесконечных групп. Общее внимание привлекла совместная работа А. П. Дицмана, А. Г. Куроша и А. И. Узкова «Силовские подгруппы бесконечных групп» (1938 г.), в которой устанавливается очень обозримое достаточное условие для сопряженности силовских  $p$ -подгрупп: если хотя бы один класс сопряженных силовских  $p$ -подгрупп конечен, то он единственный, т. е. тогда все силовские  $p$ -подгруппы сопряжены. Применяя идею этой работы и аппарат проективных пределов, А. Г. Курош в 1945 г. перенес доказательство теоремы Силова о сопряженности на случай нульмерных топологических групп.

Как отмечалось выше, в советской теоретико-групповой школе преобладал интерес к теории бесконечных групп. И действительно, после самого первого периода — начала 30-х годов — исследования по теории конечных групп велись лишь в небольшом размере. Тем не менее в 40-х годах советские алгебраисты получили глубокие результаты и в теории конечных групп. Особенно в этом направлении плодотворной была исследовательская работа С. А. Чунихина. Он занимался изучением структурных свойств конечных групп, связанных с арифметическими инвариантами группы, и в первую очередь утверждений типа теорем Силова. Более точно, Чунихин искал необходимые и достаточные условия существования максимальных подгрупп, порядки которых делятся на заданные простые числа, а также условия сопряженности таких групп. Английский алгебраист Ф. Холл установил подобные теоремы для конечных разрешимых групп. Чунихин смог существенно обобщить и углубить результаты Холла, введя в рассмотрение класс так называемых  $\Pi$ -отделимых групп, обобщающих разрешимые группы. Пусть  $\Pi$  — произвольное множество простых чисел; тогда конечная группа  $G$  называется  $\Pi$ -отделимой, если она обладает нормальным рядом, факторы которого делятся не более чем на одно простое число из  $\Pi$ . Основная теорема Чунихина гласит: пусть порядок  $n$   $\Pi$ -отделимой группы  $G$  разложим в произведение взаимно простых множителей  $n = rs$ , причем все простые делители числа  $r$  принадлежат  $\Pi$ , тогда группа  $G$  содержит подгруппы порядка  $r$  и все такие подгруппы сопряжены. Тонкие свойства  $\Pi$ -отделимых групп, относящиеся к существованию и сопряженности  $\Pi$ -базисов, установил П. А. Гольберг (1949 г.).

Ему же принадлежит результат о силовских свойствах бесконечных локально нормальных групп.

Очень широкое направление в теории бесконечных групп, характерное для советской теоретико-групповой школы, составляет изучение бесконечных разрешимых и бесконечных нильпотентных групп, а также бесконечных обобщенно разрешимых и обобщенно нильпотентных групп. Большой цикл исследований открывается работами С. Н. Черникова, опубликованными в самом конце 30-х и начале 40-х годов. Вскоре эта тематика обогатилась новыми идеями, результатами и постановками задач в работах А. И. Мальцева, О. Ю. Шмидта, П. Г. Конторовича и других советских алгебраистов. В 40-х годах изучение бесконечных групп этого класса стало главной задачей свердловской теоретико-групповой школы и ряда учеников А. И. Мальцева в Иванове. За рубежом аналогичные постановки задач изучались Р. Бэром, К. Гиршем и др. Предварительный итог исследований был подведен в обзорной статье А. Г. Куроша и С. Н. Черникова «Разрешимые и нильпотентные группы» (1947 г.). Здесь же сформулированы дальнейшие задачи. Подробное изложение результатов содержится во втором издании книги А. Г. Куроша «Теория групп» (1953 г.).

Изучение обобщенных разрешимых и нильпотентных групп продолжалось в 50-х годах и в несколько меньшем объеме проводится в настоящее время. Теория и постановки задач очень разветвились, и тонкие результаты, формулируемые с привлечением очень специфической терминологии, могут быть здесь изложены только приблизительно. Поэтому ограничимся указанием на основные, легче формулируемые результаты (для более детального ознакомления см. названные выше обзорную статью и второе издание монографии А. Г. Куроша).

При изучении конечных разрешимых и нильпотентных групп одним из основных фактов, которым все время явно или неявно пользуется исследователь, является существование конечных нормальных и инвариантных рядов подгрупп и утверждение об изоморфизме для факторов композиционных и главных рядов. Отсутствие аналогичной теоремы в случае бесконечных групп даже очень простого строения (например, в случае бесконечной циклической группы) создает более сложную ситуацию. Трудности начинаются уже на уровне определений понятий разрешимости и нильпотентности для бесконечных групп. Дело в том, что в случае конечных групп классы разрешимых и класс нильпотентных групп допускают многочисленные равносильные определения. При обобщении на бесконечные группы соответствующие определения перестают быть эквивалентными или же оказывается, что доказательство эквивалентности становится очень трудной и глубокой проблемой. Таким образом, исходя из этих определений, исследователь получает очень различные классы групп, которые в равной мере могут считаться разрешимыми или, соответственно, нильпотентными. Изучение взаимоотношений между этими классами является основной проблематикой рассматриваемого направления. Естественным обобщением понятия конечного нормального ряда и композиционного ряда являются понятия нормальной и композиционной систем. Последние представляют



С. Н. Черников.

собой цепочки подгрупп, которые могут иметь сколь угодно сложный порядковый тип. Как показал А. Г. Курош в работах 1935 и 1945 гг., только в случае инвариантных цепей, вполне упорядоченных по возрастанию, удастся доказать теоремы, аналогичные теоремам Шрейера и Жордана — Гельдера. Для бесконечных групп они формулируются в несколько более слабой форме, чем в случае конечных групп. Однако аналоги теорем Шрейера и Жордана — Гельдера оказываются достаточными для того, чтобы несколько раскрыть строение некоторых классов обобщенно разрешимых групп<sup>7</sup>.

Если на классы бесконечных групп никаких дополнительных ограничений не накладывается, то какое-либо детализированное обозрение классов разрешимых и нильпотентных групп становится невозмож-

ным. Поэтому советские алгебраисты пошли по пути накладывания на изучаемые группы тех или иных условий конечности: условие обрыва убывающих цепей подгрупп (или только цепей подгрупп определенного вида — нормальных делителей, абелевых подгрупп и т. д.), условие конечности классов сопряженных элементов, локальные свойства, периодичность, локальная конечность, локальная нормальность и т. д. Особенно удачными в этом плане оказались условия обрыва цепей подгрупп (условия минимальности). Впрочем, аналогичная ситуация наблюдается и в теории колец и алгебр, где наложения условия минимальности для односторонних идеалов позволяют перенести важнейшие утверждения теории конечномерных алгебр на бесконечномерные. В цикле работ 1939—1945 гг. С. Н. Черникову удалось для групп с условием минимальности раскрыть строение нильпотентных групп. Он показал, что группы этого класса являются расширениями полных абелевых групп при помощи конечных групп. Впрочем, позднее было показано, что к этому типу при выполнении условия минимальности принадлежат даже локально разрешимые группы и что условие минимальности можно ослабить, потребовав его выполнения только для абелевых подгрупп. Из этого главного результата, в частности, вытекает, что для групп с условием минимальности основные положения теории конечных нильпотентных групп переносятся на бесконечные группы. Бесконечные  $p$ -группы с условием минимальности оказались расширениями прямого произведения конечного числа квазициклических групп типа  $p^\infty$  с помощью конечной  $p$ -группы (так называемые  $p$ -группы Черникова). В работах «О бесконечных специальных группах» (1940 г.)

<sup>7</sup> Более подробно см. обзор А. Г. Куроша и С. Н. Черникова «Разрешимые и нильпотентные группы».

и «Бесконечные разрешимые группы» (1945 г.) О. Ю. Шмидт углубил результаты С. Н. Черникова и построением «патологических» примеров бесконечных  $p$ -групп ( $p$ -группы, совпадающей с коммутантом,  $p$ -группы, не содержащей коммутативного нормального делителя) показал, какие необычные ситуации возникают даже в теории бесконечных групп, если отказаться от условия минимальности.

Плодотворные идеи в рассматриваемую тематику внес А. И. Мальцев. В работах «О бесконечных разрешимых группах» (1949 г.) и «О некоторых классах бесконечных разрешимых групп» (1951 г.) для описания строения бесконечных разрешимых групп он широко использовал найденные им глубокие свойства разрешимых матричных групп. Особую известность приобрела следующая теорема Мальцева: каждая разрешимая группа матриц с элементами из алгебраически замкнутого поля содержит подгруппу конечного индекса, матрицы которой приводимы совместно к треугольному виду. Следствия этой теоремы применены для описания разрешимых групп автоморфизмов абелевых групп с конечным числом образующих, а полученные в работах результаты использованы для изучения некоторых широких классов разрешимых групп. При этом Мальцев рассмотрел разрешимые группы, обладающие разрешимым рядом, факторы которого являются абелевыми группами достаточно простого строения, и провел их классификацию по свойствам этих факторов. Из многочисленных результатов, полученных на этом пути, отметим, например, такое свойство: если все абелевы подгруппы разрешимой группы  $G$  имеют конечное число образующих, то группа  $G$  обладает разрешимым рядом, факторы которого имеют конечное число образующих. Другие теоремы дают тонкие критерии для разрешимости или нильпотентности широких классов бесконечных групп. Исследования в указанном направлении были продолжены учениками А. И. Мальцева (Н. Н. Мягковой и Д. М. Смирновым и др.). В этих исследованиях немалую роль играют понятия общего и специального рангов группы, введенные Мальцевым («О группах конечного ранга», 1948 г.). Он доказывал, что всякая группа конечного ранга, изоморфно представимая матрицами над каким-либо полем, не более чем счетна.

Широкий отклик получила работа А. И. Мальцева «Нильпотентные группы без кручения» (1949 г.), в которой показывается, что каждая нильпотентная группа без кручения может быть погружена в некоторую однозначно определенную полную нильпотентную группу без кручения  $G^*$ . Свойства группы  $G$  оказываются тесно связанными со свойствами пополнения группы  $G^*$  и его полных подгрупп.

Остановимся, наконец, на другом очень существенном направлении в рассматриваемой области — так называемых локальных теоремах. Если все подгруппы с конечным числом образующих обладают некоторым свойством  $S$ , то говорят, что свойство  $S$  выполняется в группе  $G$  локально. Если свойство  $S$  выполняется в группе  $G$  локально, то отсюда, вообще говоря, не следует, что свойство выполняется в самой группе  $G$ : локально разрешимые группы не обязательно разрешимы, локально нильпотентные группы не обязательно нильпотентны. Говорят, что для свойства  $S$  выполняется локальная теорема, если любая

группа  $G$ , в которой свойство  $S$  выполняется локально, сама обладает свойством  $S$ . В работе «Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп» (1941 г.) Мальцев, используя доказанную им локальную теорему узкого исчисления предикатов, предложил очень общий подход для доказательства локальных теорем. Примерами применения его метода могут служить доказательства локальных теорем для свойств  $RN$  и свойств  $RJ$  (группа называется  $RN$ -группой, если она обладает нормальной системой с абелевыми факторами, и  $RJ$ -группой, если в ней существует инвариантная система с абелевыми факторами).

Наряду с условиями конечности для классов бесконечных и разрешимых групп важную роль играют условия полноты группы и условие однозначности извлечения корня (свойство более сильное, чем свойство отсутствия кручения). Полные обобщенно нильпотентные группы детально исследовал в 40-х годах С. Н. Черников, по второй тематике законченные результаты получил П. Г. Конторович<sup>8</sup>. В большом цикле работ — «Группы с базисом расщепления» (I, II, III) и «Инвариантно покрываемые группы» (I, II) — Конторович изучил покрытия и расщепления групп<sup>9</sup> подгруппами и нормальными делителями, обладающие теми или иными свойствами.

В послевоенные годы в развитии теории абстрактных групп сложилась новая ситуация. К этому времени наряду с теорией абстрактных групп были детально разработаны абстрактные теории других алгебраических структур: колец (как ассоциативных, так и неассоциативных), полугрупп, решеток и т. д. При этом было замечено, что для многочисленных понятий, методов и результатов в теориях совершенно различных структур существует далеко идущая аналогия. Такая аналогия привела многих алгебраистов к мысли о рассмотрении теории различных алгебраических структур с некоторой единой и более общей точки зрения. Так возникла и успешно развивается в настоящее время теория универсальных алгебр. Группы, полугруппы, кольца, решетки и другие структуры можно рассматривать как классы универсальных алгебр, в которых между операциями выполняются некоторые определенные тождественные отношения, называемые аксиомами данного класса. Подобные классы называются примитивными классами алгебр. Такие понятия, как подгруппы, системы образующих и определяющих отношений, автоморфизмы, характеристические подгруппы, свободные группы, свободные произведения и другие, относятся, как оказалось, к теории примитивных классов универсальных алгебр.

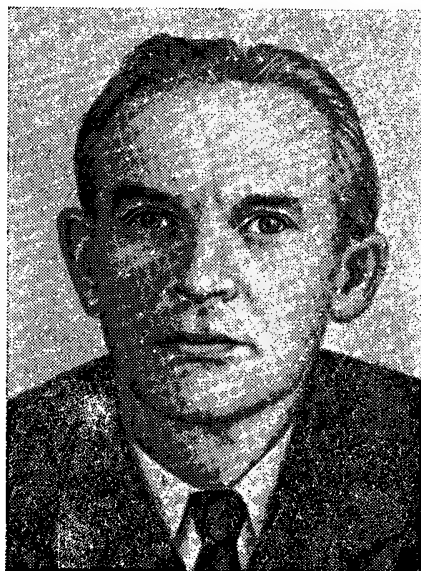
Теория примитивных классов универсальных алгебр стала в настоящее время глубокой и разветвленной теорией, богатой собственными результатами и методами. Несмотря на то что абстрактные группы являются примитивным классом алгебр, не следует считать, что таким образом теория групп уже стала частным случаем теории универсальных

<sup>8</sup> См. названную монографию А. Г. Куроша и обзорные статьи.

<sup>9</sup> Говорят, что группа  $G$  покрывается некоторой системой  $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I}$  своих подгрупп, если она представима как теоретико-множественное объединение групп из  $\mathcal{H}$ . Если при этом подгруппы из  $\mathcal{H}$  пересекаются только по единице, то говорят о расщеплении группы  $G$ .



алгебр. Многие постановки задач теории групп являются специфическими именно для групп и не допускают естественного перенесения на более общие классы универсальных алгебр, другие — такие обобщения допускают. От теории групп, как более старой и разработанной, в настоящее время исходят все новые стимулы для развития теории универсальных алгебр. В то же время некоторые естественные постановки задач, формулируемые в терминах универсальных алгебр, изучаются на примере теории групп. При этом для получения нетривиальных результатов по-прежнему необходимо пользоваться зачастую традиционно сложившимися чисто теоретико-групповыми методами. Таким образом, в последние два-три десятилетия наблюдается тесное переплетение этих двух разделов алгебры. В явной форме такая тенденция выражена, например, в работах А. Г. Куроша, О. Н. Головина, Б. И. Плоткина и других советских алгебраистов.

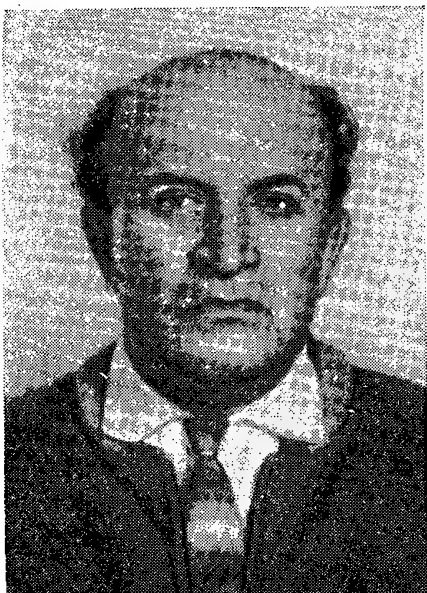


Д. К. Фаддеев.

Некоторые теоретико-групповые исследования послевоенного периода оказались связанными с еще более общей теорией — теорией аксиоматизируемых классов алгебраических систем. Для изучения классов алгебраических систем естественно привлечение методов и понятий математической логики и метаматематики, а в последнее время и теории алгоритмов. Главную роль здесь играют теоремы Геделя о полноте и локальная теорема Мальцева. Для многих неожиданным оказалось то обстоятельство, что с помощью привлечения метаматематических теорем, доказываемых в математической логике, естественным образом решаются проблемы и доказываются теоремы, формулируемые непосредственно в теории групп. Как уже говорилось, такое явление было впервые установлено Мальцевым при изучении некоторых классов групп. В настоящее время привлечение математической логики к изучению теории алгебраических систем является важной плодотворной тенденцией развития теории абстрактных групп. В этом направлении советские ученые занимают ведущее место. Новосибирская школа Мальцева получила замечательные результаты.

Наконец, еще одна тенденция развития теории абстрактных групп послевоенного периода. Она состоит в привлечении методов гомологической алгебры. Первоначально гомологическая алгебра изучала понятия, возникшие в алгебраической топологии. Затем, в работах С. Эйленберга и С. Маклейца (США) и, одновременно, работах Д. К. Фаддеева было замечено, что методы гомологической алгебры естественно применимы в теории абстрактных групп. В первую очередь этим методам подвластны все задачи теории групп, которые тем или иным образом связаны с так называемой теорией расширений групп. Задача расши-





П. Г. Конторович.

рения групп формулируется так. Пусть даны две абстрактные группы  $H$  и  $F$ ; требуется найти и описать все возможные группы  $G$ , обладающие нормальным делителем, изоморфным  $H$  и таким, что группа  $F$  является изоморфной фактор-группе группы  $G$  по  $H$ . В дальнейшем оказалось, что методы и глубокие результаты, полученные в гомологической алгебре, хорошо применимы к решению глубоких теоретико-групповых проблем. Они относятся как непосредственно к теории абстрактных групп, так и к теории представлений групп. На этом пути Д. К. Фаддеев, И. Р. Шафаревич и их ученики получили за последние годы весьма важные результаты, относящиеся к теории групп, теории целочисленных представлений групп и теории Галуа.

Из всего сказанного ясно, что послевоенный период развития теории групп характеризуется тесной связью этого раздела алгебры с новыми большими разделами современной математики. С одной стороны, в рамках этих разделов удается существенно продвинуть изучение абстрактных групп, с другой — дальнейшие теоретико-групповые исследования дают новые стимулы для развития этих новых разделов.

В 50-е годы наблюдается бурный расцвет свердловской теоретико-групповой школы. К этому времени в результате деятельности П. Г. Конторовича и С. Н. Черникова сформировался большой коллектив алгебраистов, развивающих и постепенно расширяющих изучение классов бесконечных групп. Во все возрастающем объеме на исследовательскую работу этого коллектива оказывали влияние общие идеи теории универсальных алгебр и теории алгебраических систем, идущие от А. Г. Куроша, с одной стороны, и А. И. Мальцева — с другой. Но при этом продолжали расширяться и углубляться чисто теоретико-групповые методы и постановки задач, сложившиеся в предыдущий период. Во второй половине 50-х годов С. Н. Черников сформировал в Перми теоретико-групповой коллектив (М. И. Каргаполов, Ю. М. Горчаков и др.), примыкающий по своим интересам к свердловской школе. Идеино близок к ней также ученик А. И. Мальцева Д. М. Смирнов. В конце 50-х годов произошла некоторая перегруппировка сил: некоторые упомянутые выше ученые переехали в Новосибирск, где к началу 60-х годов под руководством А. И. Мальцева сформировался сильный коллектив алгебраистов, тематика исследований которых включает также дальнейшее развитие теории групп.

В свердловской школе глубже изучались свойства обобщенно разрешимых и нильпотентных групп. В. М. Глушков изучал локально нильпотентные группы без кручения с различными условиями обрыва

цепей подгрупп. Он доказал существование  $ZA$ -групп, верхний центральный ряд которых имеет произвольную заданную трансфинитную длину. Продолжая исследования А. И. Мальцева и Н. Н. Мягковой, В. С. Чарин изучал некоторые классы локально нильпотентных и локально разрешимых групп конечного специального ранга. П. Г. Конторович ввел в рассмотрение новый принцип классификации бесконечных групп, определив понятие классов групп с категориями. Пусть  $A$  — некоторое групповое свойство (у Конторовича —  $A$  — абелевость группы),  $A^1$  — класс групп, обладающих свойством  $A$ . Для всякого порядкового числа  $\alpha$   $A^\alpha$  — класс групп, представимый как теоретико-множественное объединение инвариантных подгрупп из классов  $A^{(\beta)}$ , для  $\beta < \alpha$  и таких, что сами они не принадлежат никакому классу  $A^\gamma$  с  $\gamma < \alpha$ . Взяв в качестве исходного класс абелевых групп, Конторович показал, что соответствующие группы высших категорий являются локально нильпотентными. Если в качестве исходного класса  $A^1$  взять класс всех конечных групп, то класс  $A^2$  будет содержать известные локально нормальные группы, изучением которых занимаются многие ученые (П. А. Гольберг, М. И. Каргаполов и др.).

В структурной теории ассоциативных и лиевых колец большое значение имеют в некотором смысле двойственные понятия радикала и полупростой алгебры. С очень общей точки зрения эти понятия рассмотрены А. Г. Курошем (1953 г.) и С. Амицурой. В цикле работ А. Г. Куроша, К. К. Щукина и Ган Ван Хао, опубликованных в «Сибирском математическом журнале» (1962 г.), развита теория радикальных и полупростых групп. В работах «Радикальные группы» (1955 г.), «Радикальные и полупростые группы» (1957 г.) Б. И. Плоткин развил эту теорию в несколько ином направлении, тем самым дав еще один новый подход для изучения широких классов бесконечных групп.

Советские алгебраисты усиленно занимались изучением автоморфизмов бесконечных групп, особенно обобщенно разрешимых. Исходными в этом направлении явились исследования А. И. Мальцева, касающиеся разрешимых групп. Существенное продвижение было достигнуто в работе Д. М. Смирнова. Отправным пунктом для ряда исследований послужила одна теорема Л. А. Калужнина (1950 г.), в которой устанавливается такой факт. Пусть  $G$  — группа,  $\Phi$  — некоторая группа автоморфизмов группы  $G$ . Если группа  $G$  обладает конечным инвариантным рядом  $G > G_1 > G_2 > \dots > G_r > 1$ , таким, что группа  $\Phi$  индуцирует тождественный автоморфизм во всех факторах  $G_{i-1}/G_i$ , то  $\Phi$  — нильпотентная группа.  $\Phi$ . Холл обобщил это утверждение. Для справедливости теоремы достаточно предположить, что указанный ряд состоит из подгрупп и что группа  $\Phi$  индуцирует тождественное отображение в классах смежности  $G_{i-1}$  по  $G_i$ . Широкий круг исследований о взаимоотношении строения группы  $G$  и строения ее групп автоморфизмов ведет Б. И. Плоткин. Объектом изучения являются групповые пары  $(G, \Phi)$ , где  $\Phi$  — некоторые группы автоморфизмов группы  $G$ . В групповых парах различаются свойства трех родов: внутренние свойства группы  $G$ , внутренние свойства группы  $\Phi$  и свойства, относящиеся к воздействию группы  $\Phi$  на группу  $G$  (внешние свойства группы  $\Phi$ ). Вза-



Б. И. Плоткин.

имоотношения между свойствами всех трех родов приводят к богатой теории, в каком-то отдаленном смысле аналогичной теории Галуа. Б. И. Плоткиным и его учениками В. Г. Виляцером и В. Г. Житомирским получены далеко идущие результаты<sup>10</sup>. В некоторых вопросах эта тематика явно перерастает собственно теорию групп и относится скорее к теории алгебраических систем и универсальных алгебр (ей посвящена монография Б. И. Плоткина «Группы автоморфизмов алгебраических систем», 1966 г.).

В 50-х годах в советской теоретико-групповой школе вновь возрождается интерес к классической тематике: изучению групп линейных преобразований. Как известно, эта тематика восходит к работам К. Жордана, Л. Диксона, И. Шура и других математиков прошлого и начала

нашего века. Ее временная стагнация объяснялась в основном тем, что сетка понятий для описания бесконечных дискретных групп была слишком мало изучена. Теперь же к этой области, важной для многочисленных применений в алгебре, геометрии и анализе, можно было вернуться, имея в руках разработанные методы и результаты абстрактной теории бесконечных групп. Большую работу по изучению разрешимых и нильпотентных групп линейных преобразований развил в 50—60-е годы Д. А. Супруненко со своими учениками. По этой тематике за последние 15 лет ими опубликованы десятки работ. При очень общих предположениях описаны строения максимальных разрешимых и максимальных нильпотентных групп полной линейной группы и других классических линейных групп, исследовано строение и расположение силовских подгрупп. Например, доказана сопряженность силовских  $p$ -подгрупп во всякой алгебраической линейной группе над алгебраически замкнутым полем и другие аналогичные предположения. Получены такие результаты: максимальная неприводимая разрешимая подгруппа полной линейной группы над бесконечным полем обладает единственным максимальным абелевым нормальным делителем конечного индекса; в линейной группе над алгебраически замкнутым полем существует только конечное число несопряженных максимальных нильпотентных групп заданного класса нильпотентности. Предварительный итог исследований подведен в краткой монографии Д. А. Супруненко «Разрешимые и нильпотентные линейные группы» (1958 г.). К этим исследованиям примыкают результаты минской школы, а также М. М. Хузурбазара (Индия) и А. И. Лихтмана, учеников А. Г. Куроша, о строении

<sup>10</sup> См. обзорную статью Б. И. Плоткина «Обобщенные разрешимые и обобщенные нильпотентные группы» (1958 г.).

мультипликативных групп тел — тематика, давно привлекающая интерес алгебраистов в связи с теорией Галуа тел и полупростых алгебр (французские математики А. Картан, Ж. Дьедоннэ и др.). Ученик Д. А. Супруненко В. П. Платонов начал с успехом исследовать алгебраические группы линейных преобразований — область, которая ввиду ее многочисленных связей с другими областями математики привлекает в настоящее время внимание алгебраистов всего мира.

Решение тонких проблем теории групп продолжает оставаться очень важным для алгебраических и арифметических вопросов теории полей и алгебр, а также для теории Галуа. Главной при этом является тематика, связанная с теорией расширений групп. Ныне ей большое внимание уделяют во всем мире. Советские алгебраисты (в Ленинграде — коллектив Д. К. Фаддеева, в Москве — коллектив учеников И. Р. Шафаревича) внесли очень существенный вклад в ее развитие. Как отмечалось выше, наиболее приспособленным для описания расширений и одновременно для применения результатов в теории полей и алгебр является язык гомологической алгебры. Соответствующая теория была построена в большом цикле работ Д. К. Фаддеева и З. И. Боровича (1947—1956 гг.). Параллельно за рубежом эта теория создавалась в трудах С. Эйленберга, С. Маклейна, Ж.-П. Серра и др.

В связи с исследованиями по арифметическим вопросам полей сенсационным явился результат Е. С. Голода. Построенный им пример дает отрицательное решение известной гипотезы Бернсайда о локальной конечности периодических групп, причем даже в классе так называемых про- $p$ -групп. На основе этого результаты в работе Е. С. Голода и И. Р. Шафаревича по теории полей (1964 г.) дается отрицательное решение гипотезы о башнях полей классов. Здесь уместно вкратце рассказать о работах по проблеме Бернсайда, где именно советские алгебраисты за последнее десятилетие добились существенного продвижения.

Еще в самом начале столетия В. Бернсайд сформулировал следующую гипотезу: всякая периодическая группа с конечным числом образующих конечна ( $B$ ). Если не ограничиваться рассмотрением групп с конечным числом образующих, а назвать локально конечной группу, в которой любое конечное множество элементов лежит в конечной подгруппе, то эта гипотеза допускает эквивалентную формулировку: всякая периодическая группа локально конечна. Это так называемая общая гипотеза Бернсайда. От положительного или отрицательного решения ее зависит большое число проблем как теории абстрактных групп, так и ее приложений.



Д. А. Супруненко.



А. И. Кострикин.

и показателем  $n$  ограничен ( $OB_{n,d}$ ). Ослабленную гипотезу Бернсайда для  $n = 5$  доказал (1955 г.) Кострикин, а для  $n = 6$  — Холл и Хигмэн. Наконец, Кострикину удалось доказать (1958 г.) ослабленную гипотезу Бернсайда для любого простого показателя  $p$ .

С другой стороны, для ограниченной, но не ослабленной гипотезы Бернсайда отрицательное решение было анонсировано в 1959 г. П.С.Новиковым: для  $d \geq 2$  и для достаточно большого  $n$  свободная группа показателя  $n$  и с  $d$  образующими бесконечна. Полное доказательство этого очень сильного результата пока не опубликовано. Как отмечалось, отрицательное решение общей (не ограниченной) гипотезы Бернсайда получено Е. С. Голодом и И. Р. Шафаревичем в 1964 г.: существуют бесконечные периодические группы с конечным числом образующих. При этом такие группы построены даже в классе групп, аппроксимируемых конечными группами<sup>11</sup>. Итак, за последние годы по проблеме Бернсайда советскими алгебраистами достигнуты действительно очень важные результаты. Конечно, до окончательного выяснения ситуаций остается еще не малый путь.

В конце 30-х годов О. Ю. Шмидт поставил вопрос: не будет ли квазициклической всякая бесконечная группа, все подгруппы которой конечны (проблема Шмидта). Положительное решение этого вопроса для локально разрешимых групп вытекало из результатов С. Н. Черникова, а результаты Б. И. Плоткина подтвердили гипотезу Шмидта для класса групп, обладающих возрастающими нормальными рядами с конечными факторами. Пользуясь глубокими результатами Томпсона и Фейта о разрешимости всякой конечной группы нечетного порядка,

<sup>11</sup> Группа  $G$  аппроксимируется конечными группами, если для всякого  $a \in G$  и  $a \neq 1$  существует эпиморфизм  $\varphi$  группы  $G$  на конечную группу  $H$ , такой, что  $\varphi(a) \neq 1$ .

В дальнейшем были сформулированы более частные утверждения, так называемые ограниченные гипотезы Бернсайда: периодическая группа с  $d$  ( $d \geq 2$ ) образующими и показателем  $n$  конечна ( $B_{n,d}$ ). Долгие годы и эти более слабые утверждения (для  $n > 2$ ) оставались недоказанными. Только в 1933 г. Ван-дер-Варден и Ф. В. Леви доказали истинность утверждения для  $n = 3$  и произвольного  $d$ . Для случая  $n = 4$  положительное решение нашел И. Н. Санов (1940 г.). Случай  $n = 5$  опять долго не поддавался никакому решению. С помощью аппарата теории колец Ли соответствующие исследования упорно вели И. Н. Санов, А. И. Кострикин, Ф. Холл и Г. Хигмэн. Усилия были направлены на доказательство ослабленной гипотезы Бернсайда: порядок конечной группы с  $d$  образующими

М. И. Каргаполов дал положительное решение проблемы Шмидта для произвольных локально конечных групп (1963 г.)

В связи с работами В. А. Тартаковского выше упоминалось о проблеме слов (или проблеме тождества) в группах, заданных образующими и определяющими отношениями. В 50-х годах П. С. Новиков получил фундаментальный результат отрицательного характера: проблема тождества, вообще говоря, алгоритмически неразрешима. Более того, можно конкретно указать группу с конечным числом образующих и определяющих отношений, в которой не существует алгоритма для установления равенства слов. Доказательство такого вида стало возможным благодаря уточнению понятия алгоритма в рамках математической логики. Доказательство неразрешимости проблемы слов в теории полугрупп установлено А. А. Марковым. Перенесение его на случай групп представляет большие трудности. Разработанные методы позволили ученику П. С. Новикова С. И. Адяну доказать алгоритмическую неразрешимость целой серии проблем, относящихся к группам, заданным образующими и определяющими отношениями. Этими работами открывается новая интересная область. Она по существу только частично относится к теории групп, скорее же — к области так называемой конструктивной алгебры.

Изучением свободных групп с операторами занимался С. Т. Завало. Для случая, когда областью операторов  $\Gamma$  является группа, ему удалось обобщить теорему Нильсена — Шрейера, дав описание строения допустимых подгрупп свободной  $\Gamma$ -группы. Такие подгруппы уже не обязательно сами свободны. А. Г. Курош изучал свойства свободных мультиоператорных групп и свободных произведений (сумм) таких групп. Он перенес на них теорему Нильсена — Шрейера и теорию свободных разложений. Соответствующие результаты относятся уже скорее к теории универсальных алгебр.

Существенное развитие в последние годы получила в Советском Союзе теория многообразий групп и теория правильных произведений групп. Этим наука обязана в основном исследованиям О. Н. Головина и его ученика А. Л. Шмелькина. Выше рассматривались ранние работы Головина о нильпотентных произведениях. Они были продолжены М. Бенадо и С. Мораном. В конце 50-х годов Головин возвратился к этой тематике. Обобщая предложенное Холлом понятие вербальных подгрупп введением понятия поливербальных подгрупп и политождеств, он дал естественное обозрение возможных правильных операций на классе всех подгрупп и их основных свойств («Политождественные соотношения в группах и определяемые ими операции на классе всех групп», 1936 г.). Главным здесь является понятие вербального произведения.

К рассмотренным примыкают исследования по теории групповых многообразий, идущие от Б. Неймана и получившие детальную разработку в английской теоретико-групповой школе. Задача состоит в изучении классов групп, в которых выполняются заданные тождественные отношения, т. е., на языке универсальных алгебр, примитивных классов групп. В совокупности групповых многообразий естественным образом определяется ассоциативное умножение. Основным является утвержде-



В. А. Тартаковский.

ние, доказанное независимо друг от друга Б. Нейманом, Х. Нейманом, П. Нейманом, с одной стороны, и А. Л. Шмелькиным — с другой, о том, что для этого умножения групповые многообразия образуют свободную полугруппу. В работе А. Л. Шмелькина «Сплетения и многообразия групп» (1966 г.) изучается зависимость строения групп в произведении многообразий от свойств групп в сомножителях.

Определяемости групп решетками своих подгрупп посвящены также серьезные исследования советских ученых. Особенно много этой тематикой занимается Л. Е. Садовский, с начала 40-х годов по настоящее время. Из его легко формулируемых результатов назовем следующие: 1) всякая группа, нетривиальным образом разложимая в свободное

произведение, вплоть до изоморфизма определяется строением решетки своих подгрупп; 2) всякая локально нильпотентная группа без кручения определяется решеткой своих подгрупп.

Большой и важной областью алгебры является теория представлений групп. С одной стороны, она имеет свою систему понятий, а ее постановка задач и методы их решения только в небольшой мере относятся к теории абстрактных групп. С другой — со времен Бернсайда, Шура и Фробениуса и вплоть до наших дней результаты теории представлений являются хорошим аппаратом для изучения свойств абстрактных групп, особенно конечных. Советскими алгебраистами в этой области развиты обширные новые направления. В Ужгородском университете С. Д. Берман и его ученики изучают представления групп над произвольными полями. Для случая, когда характеристика поля не делит порядок группы, Берман установил число неприводимых представлений. В настоящее время он занимается исследованием индекса Шура. Со второй половины 50-х годов Д. К. Фаддеев и его ученики А. В. Ройтер, Л. А. Назарова и параллельно С. Д. Берман и его ученики П. М. Гудивок и В. С. Дроботенко начали строить теорию представлений групп целочисленными матрицами. За короткий срок были получены фундаментальные результаты относительно неразложимых и неприводимых представлений. Из работ ужгородской школы, относящихся к самому последнему времени, видно, что теория целочисленных представлений получает широкое применение в изучении как теории представлений над полями, так и некоторых вопросов классификации конечных и бесконечных групп. Связям теории представлений с абстрактной теорией групп посвящены также многие работы харьковского алгебраиста Э. М. Жмудя.



В последние годы во всех странах вновь активизировались исследования по теории конечных групп. В Советском Союзе этой тематикой не прекращали заниматься С. А. Чунихин и его ученики. Из полученных им результатов назовем важную теорему (1954 г.) о факторизации конечных групп. В 1937 г. Холл установил факторизацию конечных разрешимых групп в произведение некоторого набора силовских  $p$ -подгрупп. Чунихин обобщил эту теорему на произвольные конечные группы, введя понятие так называемой композиционно-блочной факторизации. Он показал, что всякая конечная группа может быть факторизована в произведение некоторого числа перестановочных групп взаимно простого порядка. Порядки этих групп определяются порядками композиционных факторов группы. Результаты, полученные Чунихиным и его учениками, подробно изложены в монографии Чунихина «Подгруппы конечных групп» (1964 г.).



С. Д. Берман.

Проблемами факторизаций бесконечных групп занимаются С. Н. Черников, Н. В. Черникова, М. И. Каргаполов и другие советские алгебраисты.

## Теория полугрупп

Внимательный анализ, которому в последние десятилетия было подвергнуто основное в алгебре понятие операции (и прежде всего, групповой), привел к изучению целого ряда типов «обобщенных групп»: группоидов, мультигрупп и т. д. Как правило, они играли в алгебре лишь эпизодическую роль. Только два из них, полугруппы — алгебраические системы с одной бинарной ассоциативной операцией<sup>12</sup> и, в меньшей мере, квазигруппы — алгебраические системы с одной бинарной обратимой операцией, стали объектами глубоких и все более многочисленных исследований. Ныне теории полугрупп посвящены сотни работ в советской математической литературе и тысячи — в мировой. Жизненность теории полугрупп проявилась в ее глубоких связях с целым рядом математических дисциплин, как сформировавшихся сравнительно давно (геометрия, теория колец, функциональный анализ, теория чисел и др.), так и возникших в самое последнее время (теория графов, теория алгоритмов, математическая теория

<sup>12</sup> В первых работах они назывались обобщенными ассоциативными группами, ассоциативными системами, иногда — группоидами; полугруппами называли алгебраические системы, которые в настоящее время называют полугруппами с сокращением (см. ниже).





А. К. Сушкевич.

автоматов и т. д.). У теории квазигрупп оказались естественные связи с геометрией и комбинаторным анализом.

Первые глубокие результаты в теории полугрупп были получены в 20-х годах видным советским алгебраистом, профессором Харьковского университета А. К. Сушкевичем; ему же принадлежат первые исследования по теории квазигрупп. Значительная часть результатов Сушкевича собрана в его монографии «Теория обобщенных групп» (1937 г.)<sup>13</sup>. До его работ, по-видимому, была опубликована лишь одна статья о полугруппах — небольшая заметка Диксона о полугруппах с сокращением (1905 г.).

Из результатов Сушкевича прежде всего назовем исследования минимальных двусторонних идеалов полугрупп, часто называемых в литературе ядром, или ядром Сушкевича. Оказалось, что всякая конечная полугруппа обладает ядром  $K$ , являющимся объединением попарно непересекающихся изоморфных между собой групп  $G_{ij}$ . Позднее, в 40-х годах, Рисс, Клиффорд, Шварц и другие развили важный раздел теории полугрупп — теорию вполне простых полугрупп, т. е. полугрупп без собственных двусторонних идеалов, содержащих минимальные левые и правые идеалы.

Работами Сушкевича положено начало одному из весьма плодотворных направлений в теории полугрупп — исследованию полугрупп, в том или ином смысле близких к группам. В частности, он изучил строение произвольной конечной полугруппы, являющейся объединением двух непересекающихся групп. Впоследствии Клиффорд, Круазо, Тамура, Л. Н. Шеврин и другие изучали строение полугрупп, являющихся объединениями непересекающихся групп и некоторых других полугрупп.

Мерой близости произвольной полугруппы  $S$  к группе может служить ответ на следующий вопрос: разрешимы ли в ней (и насколько неоднозначно разрешимы) уравнения

$$ax = b, \quad (2)$$

$$ya = b \quad (3)$$

при различных  $a, b \in S$ . Сушкевич изучал полугруппы с сокращением, т. е. полугруппы, в которых каждое из уравнений (2) и (3) имеет не более одного решения. Им исследованы также различные классы полугрупп с односторонним сокращением, т. е. с однозначной разрешимостью од-

<sup>13</sup> Подробная библиография по полугруппам приведена в монографии Е. С. Ляпина «Полугруппы» и обзорах по полугруппам, напечатанных в сб. «Итоги науки. Алгебра» за 1962, 1964 и 1966 гг.

ного из уравнений (2) и (3). Здесь прежде всего следует выделить его результаты, относящиеся к полугруппам  $S$ , в которых уравнение (2) имеет для любых  $a, b \in S$  не более одного решения, а уравнение (3) — по крайней мере одно решение, а также к полугруппам с левым делением и левым сокращением. Сушкевичем рассмотрены прямые произведения полугрупп (1941 г.). Он посвятил также ряд работ полугруппам преобразований и матричным полугруппам (в частности, представлениям полугрупп преобразованиями и матрицами).

Следующий серьезный вклад в развитие теории полугрупп внес А. И. Мальцев своими результатами (1937—1940 гг.) о вложении полугрупп в группы. Он нашел необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять полугруппа с сокращением для того, чтобы ее можно было изоморфно вложить в группу; доказал, что для полугрупп, вложимых в группы, не существует никакой конечной системы элементарных аксиом; описал все неизоморфные минимальные группы, в которые может быть вложена данная полугруппа с сокращением. Впоследствии исследования полугрупп, вложимых в группы, были продолжены другими учеными.

Помимо результатов А. К. Сушкевича и А. И. Мальцева, в СССР, как и за рубежом, до 40-х годов лишь изредка появлялись отдельные разрозненные работы о полугруппах. Немногочисленными они оставались и сразу после Великой Отечественной войны, до начала 50-х годов. В Советском Союзе это были, главным образом, исследования Е. С. Ляпина и, тогда еще немногих, его учеников. Ляпин отошел в это время от теоретико-групповой тематики и вместе со своими учениками приступил к исследованию полугрупп. До 1950 г. он рассматривал вопросы, связанные с гомоморфизмами полугрупп, ввел важные понятия нормального комплекса и нормальной подполугруппы, изучил простые (не обладающие нетривиальными гомоморфизмами) и полупростые коммутативные полугруппы. В 1953 г. ввел понятие увеличительного элемента полугруппы и изучил обратимость элементов полугруппы, т. е. разрешимость в ней уравнений (2) и (3), выяснил связь между обратимостью элементов полугруппы и наличием в ней увеличительных элементов, исследовал строение полугрупп с единицей, содержащих увеличительные элементы. Позднее эти результаты были обобщены на полугруппы с односторонними единицами. В 1954 г. Ляпин ввел понятие базисного класса для класса полугрупп  $\Gamma$ , т. е. такого минимального подкласса  $\Gamma_0 \in \Gamma$ , что всякая полугруппа  $S \in \Gamma$  является объединением подполугрупп из  $\Gamma_0$ . В 1953 г. он начал исследование полугрупп преобразований.

В Ленинградском педагогическом институте работает семинар Е. С. Ляпина по полугруппам. Его участники до начала 50-х годов изучали идеалы в полугруппах (в частности, полугруппы с условием минимальности для главных левых идеалов), структурные свойства полугрупп, свободные и прямые произведения полугрупп (и другие конструкции), конечные голоидные (т. е. упорядоченные отношением делимости) полугруппы. Позднее они перешли к планомерному изучению полугрупп преобразований. Семинар долгое время был единственным



Е. С. Ляпин.

в стране теоретико-полугрупповым коллективом, он не потерял своего значения и впоследствии, когда появились и другие аналогичные центры.

В начале 50-х годов в Саратове начал свои фундаментальные исследования по инверсным полугруппам и представлениям полугрупп известный советский геометр В. В. Вагнер. В 1952—1953 гг. возвратился к полугрупповой тематике А. И. Мальцев, изучая, в частности, полугруппы преобразований и матричные полугруппы. В Свердловске к исследованиям полугрупп подключается П. Г. Конторович с частью своих учеников. В Харькове работает ученик А. К. Сушкевича Л. М. Глушкин. Он изучил (1955 г.) простые полугруппы с нулем, содержащие минимальные односторонние идеалы, нашел гомоморфизмы полугрупп с левой обратимостью на группы (1955 г.), дал полное описание гомоморфизмов вполне простых полугрупп (1956 г.). Позднее эти результаты, по-видимому независимо от Глушкина, были повторены Тамурой, Сайто, Манном. Глушкин исследовал (1956 г.) возможность продолжения гомоморфизмов полугрупп (в частности, периодических полугрупп), нашел (1957 г.) базисный класс для инверсных полугрупп, изучал (начиная с 1954 г.) матричные полугруппы и полугруппы преобразований. В Тарту с 1956 г. исследованием упорядоченных полугрупп занимался ученик А. Г. Куроша Я. В. Хион.

В конце 50-х годов стало очевидным, что теория полугрупп выросла в самостоятельную область общей алгебры, имеющую свои задачи и методы. Появились монографии, посвященные этой теории. Среди них первая в мировой литературе книга Е. С. Ляпина «Полугруппы», сыгравшая значительную роль в развитии теории полугрупп. В опубликованных к этому времени работах о полугруппах был заметный разноречивый в подходах к изучению, методах, системах построений и терминологии. В книге Ляпина впервые в связной форме излагались основные направления алгебраической теории полугрупп, выдвигались общие точки зрения и намечались некоторые перспективы развития.

К этому времени сформировалась созданная и руководимая Е. С. Ляпиным ленинградская школа теории полугрупп. Его ученики работают в различных центрах страны: А. Я. Айзенштат и И. С. Понизовский — в Ленинграде, К. А. Зарецкий — в Новосибирске, Л. Б. Шнеперман — в Минске, Э. Г. Шутов — в Таганроге и др. Ныне можно говорить и о саратовской школе теории полугрупп. Создателем и руководителем школы является В. В. Вагнер. Из его учеников выделяются прежде всего Б. М. Шайн и А. Е. Либер. Эта школа отличается широким применением теоретико-множественных и логических методов,

главным образом теории бинарных отношений, в которую Вагнер внес существенный вклад. Обе школы очень близки по своим научным установкам (о них речь впереди) и тесно связаны между собой.

Теория полугрупп возникла тогда, когда другие области общей алгебры — теория колец, теория групп и, в меньшей мере, теория структур достигли определенной завершенности и стройности. Естественно, что со времени появления первых работ по полугруппам многие авторы переносили в теорию полугрупп вопросы, аналогичные известным решенным задачам теории групп и теории колец. Влияние теории колец сказывается, например, на изучении регулярных полугрупп, в частности вполне простых полугрупп, о которых шла речь выше. Наблюдается и обратный процесс: уже в конце 50-х и начале 60-х годов появляются работы по ассоциативным кольцам, в которых заметно сильное влияние теории полугрупп. Так, В. И. Шнейдмюллер изучал (Магнитогорск, 1961 г.) вопрос о существовании увеличительных элементов в мультипликативной группе кольца. Л. М. Глушкин получил (1959 г.) характеристику простых колец с минимальными односторонними идеалами в терминах вполне простых идеалов их мультипликативных полугрупп. Он же (1960 г.) и Л. А. Скорняков (позднее) изучали кольца, в которых идеалы мультипликативной полугруппы являются идеалами кольца; эти работы примыкают к результатам Ауберта и Брамре. С. Р. Коголовский доказал (1961 г.), что классы мультипликативных полугрупп колец и мультипликативных полугрупп полей не являются аксиоматизируемыми. А. И. Мальцев рассмотрел (1953 г.) полугруппы, являющиеся аналогом нильпотентных групп. П. Г. Конторович изучал (1953—1956 гг.) свойства подполугрупп группы. И. С. Понизовский изучает (начиная с 1956 г.) матричные представления конечных полугрупп, а в связи с этим и полугрупповые кольца (с его результатами связаны исследования матричных представлений Клиффорда, Манна и др.). А. Х. Лившиц построил (Москва, 1960 г.) общую теорию прямых разложений идемпотентов в полугруппах; объединяющую теорию прямых разложений в категориях и соответствующую теорию в структурах, а последние, как известно, восходят к классическому вопросу об изоморфизмах прямых разложений в группах и кольцах.

Одним из представителей направления теории полугрупп, развивающего теоретико-групповые идеи, является ученик П. Г. Конторовича Л. Н. Шеврин (Свердловск). Его работы начали появляться в печати с 1960 г. Он исследовал полугруппы с различными условиями конечности (полугруппы с условием минимальности для подполугрупп, периодические полугруппы с условием максимальности для подполугрупп и т. д.), сводя часто их описание к теоретико-групповым вопросам. Он же доказал теорему о локальной конечности связки локально конечных полугрупп, теорему о локальной нильпотентности полугрупп с идеализаторным условием (аналог теоретико-группового результата Б. И. Плоткина), нашел необходимые и достаточные условия, при которых подполугруппа свободной полугруппы является свободной (подполугруппы свободных полугрупп исследовали также Шюцманберже, Кон и др.). Л. Н. Шеврин и И. С. Понизовский несколько

работ посвятили изучению строения полугруппы с помощью ее идеальных рядов. При этом Шевриным найдены, в частности, критерии нильпотентности полугруппы.

Результатами структурной теории групп были, несомненно, вызваны и исследования структурных свойств полугрупп. Напомним некоторые определения. Пусть  $\Sigma(S)$  — структура всех подполугрупп  $S$ . Изоморфизм структуры  $\Sigma(S)$  на  $\Sigma(S')$  называется структурным изоморфизмом полугруппы  $S$  на полугруппу  $S'$ . В частности, если существует (полугрупповой) изоморфизм или антиизоморфизм  $\varphi$  полугруппы  $S$  на полугруппу  $S'$ , то он, естественно, порождает структурный изоморфизм полугруппы  $S$  на полугруппу  $S'$ . Говорят, что полугруппа  $S$  структурно определяется в классе полугрупп  $\mathfrak{K}$ , если всякая полугруппа  $S' \in \mathfrak{K}$ , структурно изоморфная полугруппе  $S$ , изоморфна ей (относительно действий в этих полугруппах).

Начало развитию структурной теории полугрупп было положено работами Р. В. Петропавловской, ученицы Е. С. Ляпина (Ленинград). Она доказала (1951 г.), в частности, что всякая свободная полугруппа и всякая непериодическая абелева группа структурно определяется в классе всех полугрупп и что всякая полугруппа, структурно изоморфная непериодической группе, является группой. Она же дала полное описание полугрупп, структурно изоморфных какой-либо группе (1956—1957 гг.).

Некоторые классы групп, структурно определяющихся (в указанном выше смысле) в классе всех групп, были выделены в конце 50 — начале 60-х годов учениками П. Г. Конторовича.

Начиная с 1961 г. глубоко продвинулся в изучении структурных свойств полугрупп Л. Н. Шеврин. Для полугрупп некоторых классов он классифицировал структурно изоморфные им полугруппы и нашел структурно определяющиеся в этих классах полугруппы. Это коммутативные непериодические полугруппы с сокращением, коммутативные полугруппы идемпотентов, прямоугольные полугруппы, положительно упорядочиваемые полугруппы с сокращением и т. д. Шеврин дал полное описание полугрупп  $S$  с дедекиндовой или дистрибутивной структурой  $\Sigma(S)$  (одновременно и независимо от него последние результаты были получены М. Эго), полугрупп, у которых  $\Sigma(S)$  является структурой с относительно дополнениями, структурой с единственными дополнениями, полугрупп со структурой  $\Sigma(S)$  конечной ширины и т. д. В терминах структуры  $\Sigma(S)$  он охарактеризовал некоторые классы полугрупп идемпотентов и групп: групп без кручения, непериодических, абелевых непериодических, упорядочиваемых и т. д. Им начато исследование элементарных структурных свойств полугрупп, в частности найден ряд структурно аксиоматизируемых классов полугрупп и доказана неразрешимость элементарной теории структур подполугрупп.

В работах А. А. Маркова 1947 и 1951 гг. (а также в работах Э. Поста, выполненных им независимо от Маркова) полугруппы оказались одним из первых объектов исследования теории алгоритмов. Конечно-определенные полугруппы (и, в частности, алгоритмические проблемы в них) позднее изучали С. И. Адян (1955 и 1960 гг.) и др. Ученик

А. И. Мальцева М. А. Тайцлин доказал (Новосибирск, 1962 г.) неразрешимость элементарной теории коммутативных полугрупп с сокращением. Тождества в полугруппах исследовали С. И. Адян (1962 г.), А. П. Бирюков и др.; определяющие соотношения — А. Я. Айзенштат и др. Рестриктивные полугруппы (т. е. идемпотентные полугруппы с тождеством  $xuz = uxz$ ) изучали В. В. Вагнер (1962 г.) и Б. М. Шайн (1963 г.) в связи с рассмотрением частичных отображений множеств. Б. М. Шайн доказал, что класс инверсных полугрупп (см. ниже), рассматриваемых как инволютированные полугруппы, примитивен, но не может быть выделен одним тождеством.

Наиболее естественным источником задач теории полугрупп, ее теоретико-множественным фундаментом служат полугруппы преобразований. Известно, что множество  $S(\Omega)$  всех полных (всюду определенных) преобразований (отображений в себя) произвольного множества  $\Omega$  является полугруппой относительно суперпозиции преобразований. Еще А. К. Сушкевич показал, что всякая конечная абстрактная полугруппа может быть изоморфно представлена полугруппой однозначных преобразований соответствующим образом выбранного множества. Этот результат был впоследствии распространен на произвольные полугруппы; помимо полугруппы  $S(\Omega)$  для представлений полугрупп начали привлекать полугруппы частичных и многозначных преобразований.

Естественно, что объектами исследования советских алгебраистов (А. К. Сушкевича, А. И. Мальцева, Е. С. Ляпина, В. В. Вагнера и их учеников, Л. М. Глукина и др.) явились полугруппы преобразований, и прежде всего, в силу своего универсального характера, — «симметрическая» полугруппа  $S(\Omega)$  всех полных преобразований множества  $\Omega$ . Изучены и другие «симметрические» полугруппы: полугруппа  $W(\Omega)$  всех частичных однозначных преобразований множества  $\Omega$ ;  $V(\Omega)$  — всех его взаимно однозначных частичных преобразований;  $P(\Omega)$  — всех его многозначных преобразований (бинарных отношений);  $H(\Omega)$  — всех его полных взаимно однозначных преобразований и др. Для этих полугрупп найдены их идеалы, идеальные слои, автоморфизмы, нормальные подполугруппы, определяющие соотношения, внутренние характеристики и др.

Тематика ленинградской и саратовской школ теории полугрупп (и близкая к ним тематика Л. М. Глукина) преимущественно связана с полугруппами преобразований. Для них полугруппы не являются одним из видов (пусть даже наиболее интересным) обобщенных групп. Они считают теорию полугрупп абстрактным учением о суперпозиции преобразований самого общего вида — не обязательно обратимых, не обязательно всюду определенных и даже не обязательно однозначных (так же, как теорию групп — абстрактным учением об обратимых преобразованиях). Первостепенную роль при таком подходе приобретает, с одной стороны, изучение в «абстрактных» полугруппах свойств, присущих наиболее важным для различных областей математики полугруппам преобразований, с другой — изучение абстрактных полугрупп, естественно возникающих в алгебре или других обла-

стях математики, с помощью их представлений полугруппами преобразований.

Одним из наиболее удачных примеров такой теоретико-множественной постановки задач в теории полугрупп являются инверсные полугруппы. Понятие инверсной полугруппы было введено В. В. Вагнером в 1952 г. (названа им обобщенной группой), в связи с потребностями оснований дифференциальной геометрии. Это регулярная полугруппа (т. е. в ней для любого элемента  $x$  существует элемент  $x'$ , такой, что  $xx'x = x$ ,  $x'xx' = x'$ ) с попарно переместимыми идемпотентами. (Несколько позже, в 1954 г., но, по-видимому, независимо от В. В. Вагнера, понятие инверсной полугруппы было введено Престоном, а впоследствии к этому понятию пришел Эресман.) Прикладное значение инверсных полугрупп объясняется прежде всего тем, что они являются абстрактным классом алгебр, изоморфных полугруппам взаимно однозначных частичных преобразований. Инверсные полугруппы оказались одним из самых интересных классов полугрупп и явились предметом многочисленных исследований в СССР и за рубежом. Основные результаты по теории инверсных полугрупп принадлежат В. В. Вагнеру и его ученикам, главным образом А. Е. Либеру и Б. М. Шайну. К инверсным полугруппам Б. М. Шайн свел и изучение индуктивных группоидов Круза — Эрсмана.

Е. С. Ляпин ввел (1953 г.) понятие плотно вложенного идеала полугруппы. Плотно вложенные идеалы использованы им и другими исследователями для получения абстрактных характеристик полугрупп преобразований. Свойства плотно вложенных идеалов в абстрактных полугруппах изучены Л. М. Глускиным (1960—1963 гг.), Л. Н. Шевриным (1960 г.), Е. С. Ляпиным (1962 г.). В частности, исследованы условия, при которых существует полугруппа  $S$ , содержащая данную полугруппу  $A$  в качестве плотно вложенного идеала, связи плотных вложений с полугруппами сдвигов. Найдены «неидеальные» плотные вложения, с помощью которых изоморфизм плотно вложенной подполугруппы  $A \subseteq S$  может быть продолжен до изоморфизма всей полугруппы  $S$ . Понятие плотного вложения обобщено на произвольные структуры в смысле Бурбаки.

В. В. Вагнер описал (1956 г.) представления произвольной абстрактной полугруппы  $S$  (частичными) преобразованиями какого-либо множества (точнее — предложил конструкцию, с помощью которой может быть реализовано любое такое представление). Е. С. Ляпин (1960 г.) нашел другую конструкцию для реализации этих представлений, в которой используются погружения полугруппы  $S$  в надполугруппы. Б. М. Шайн описал (1962 г.) все представления полугруппы  $S$  бинарными отношениями (многозначными преобразованиями). Он же получил глубокие и общие результаты о полугруппах многозначных преобразований, позволяющие говорить уже о достаточно развитой теории полугрупп бинарных отношений (до этого К. А. Зарецким были получены в 1958—1959 гг. лишь отдельные результаты). В частности, из результатов Шайна о полугруппах многозначных преобразований получалось новое, использующее только «внутренние» свойства полугрупп.

пы  $S$  описание всех представлений полугруппы  $S$  преобразованиями (1961 г.). Шайн изучает транзитивные представления полугрупп преобразованиями (независимо от него эти представления исследовал Талли), так называемые симметричные представления и представления, при которых «регулярные» отношения квазипорядка между элементами полугруппы  $S$ , связанные с действием в ней, переходят в весьма естественные отношения между преобразованиями.

Существование для инверсной полугруппы представления при помощи взаимно однозначных частичных преобразований впервые доказал (1953 г.) В. В. Вагнер. Эти представления изучал также Престон (1954 г.). Б. М. Шайн описал (1961—1962 гг.) строение всех представлений инверсной полугруппы взаимно однозначными частичными преобразованиями. Методы, развитые Шайном, позволили ему решить и другие задачи об инверсных полугруппах. В частности, он нашел новый класс представлений инверсных полугрупп бинарными отношениями специального вида.

Задача об изоморфных представлениях полугруппы преобразованиями того или иного вида — частный случай очень важного в теории полугрупп вопроса о вложениях полугрупп. Выше говорилось о плотных вложениях полугрупп и о решенной А. И. Мальцевым задаче вложения полугруппы в группу. В 1960 г. Б. М. Шайн решил родственную ей задачу: нашел необходимые и достаточные условия для полугрупп, вложимых в инверсные полугруппы. Этот результат эквивалентен описанию класса полугрупп, допускающих изоморфные представления взаимно однозначными частичными преобразованиями.

Вложение полугрупп изучали Е. С. Ляпин и его ученики, главным образом Э. Г. Шутов. Шутов исследовал вопрос о возможности вложения полугруппы  $S$  в полугруппу без собственных идеалов и в полную полугруппу (т. е. в полугруппу, где возможно извлечение корня любой степени). Он же рассматривал вопросы о возможности погружения полугруппы  $S$  в полугруппу  $S'$ , обладающую заданными свойствами для некоторых элементов полугруппы  $S$ , например обратимостью — разрешимостью уравнений (2) и (3).

Существует очень тесная связь между теорией полугрупп и математической теорией автоматов. В частности, каждый автомат  $A$  с определенной точки зрения можно трактовать как некоторую полугруппу преобразований множества  $\mathcal{X}$  его состояний — точнее, как представление свободной полугруппы над его входным алфавитом в полугруппу  $\mathcal{X}$ . Поэтому многие теоремы теории полугрупп могут быть трансформированы в содержательные теоремы теории автоматов. С другой стороны, есть задачи теории автоматов, которые решаются с помощью аппарата теории полугрупп. Представляет несомненный интерес и для алгебраической теории полугрупп решение (полугрупповых) задач, естественно возникающих в абстрактной теории автоматов. Работа эта только начата. Выяснением связей между автоматами и полугруппами занимался, в основном, В. М. Глушков (Киев) и некоторые его ученики.

В книге «Полугруппы» Е. С. Ляпин рассматривал полугруппы эндоморфизмов множеств с произвольными совокупностями заданных





Л. М. Глушкин.

на них отношений (вообще говоря, инфинитарных). Позднее такие множества были названы им «системами общего вида». Под эндоморфизмами такой системы  $A$  понимались полные (позднее — частичные) преобразования множества  $A$ , не нарушающие заданных в системе  $A$  отношений. Ляпин подчеркнул роль полугрупп эндоморфизмов: они позволяли описать связи между исходными отношениями системы  $A$  и алгебраическими свойствами ее полугрупп эндоморфизмов. «Естественно ожидать, — писал он, — что изучение полугрупп эндоморфизмов и установление указанных взаимных связей между их свойствами и свойствами самих множеств должно стать одним из важнейших направлений теории полугрупп, по всей вероятности, чрезвычайно богатым приложениями алгебраической теории

полугрупп в различных областях математики»<sup>14</sup>. Книга Е. С. Ляпина была еще в печати, когда появилась серия статей (1959—1960 гг.) Л. М. Глушкина, работавшего в это время в Коммунарске (Донбасс), о полугруппах эндоморфизмов математических структур в смысле Бурбаки. Эти работы явились началом осуществления описанной выше программы. В них помимо исследований формально-алгебраического характера (в частности, понятие эндоморфизма трактовалось в них несколько шире, так, что содержало в себе понятие непрерывного преобразования топологического пространства) были обнаружены глубокие связи теории полугрупп с другими математическими теориями: теорией графов, топологией, линейной алгеброй и др. Оказалось, например, что полугруппа всех эндоморфизмов квазиупорядоченного множества определяет это множество с точностью до изоморфизма или двойственности. (Впоследствии аналогичные результаты о полугруппах полных и частичных эндоморфизмов графов были получены, главным образом, учениками Е. С. Ляпина и Л. М. Глушкина.) Точно так же полугруппы эндоморфизмов линейного пространства ранга не меньшего 2 определяют это пространство с точностью до изоморфизма; некоторые полугруппы гомеоморфных преобразований топологического пространства  $A$ , рассматриваемые как алгебраические полугруппы (без индуцированной топологии), в ряде случаев определяют это пространство с точностью до гомеоморфизма.

Серьезные результаты о полугруппах непрерывных преобразований топологических пространств получил впоследствии Л. Б. Шнеперман. Он показал, в частности, что (алгебраическая) полугруппа  $C(A)$  всех непрерывных преобразований вполне регулярного

<sup>14</sup> Е. С. Л я п и н. Полугруппы. Физматгиз, М., 1960, стр. 41.

топологического пространства  $A$ , содержащего простую дугу, определяет это пространство с точностью до гомеоморфизма. Некоторые свойства графов, линейных и топологических пространств в работах Глускина и других исследователей алгебраически охарактеризованы в терминах соответствующих полугрупп.

В. В. Вагнер и Б. М. Шайн получили абстрактную характеристику некоторых отношений (в частности, отношения теоретико-множественного включения) на полугруппах частичных преобразований. Эти (и другие) аспекты исследований привели Вагнера (1960 г.), Глускина (1960 г.), Плоткина (1963 г.), Шайна (1965—1966 гг.) к изучению полугрупп с заданными на них структурами в смысле Бурбаки. Шайн ввел важное в теории полугрупп понятие алгебры отношений. Вагнер и Шайн провели интересные исследования по теории инволютированных полугрупп. Ляпин изучил согласованные с суперпозицией упорядоченности в полугруппах преобразований и максимальные согласованные с действием отношения упорядоченности в абстрактных полугруппах.

Топологические полугруппы исследуют ученики Е. С. Ляпина Л. Б. Шнеперман и П. Д. Круминг. Шнеперману принадлежат, в частности, интересные результаты о представлениях топологических полугрупп непрерывными преобразованиями топологических пространств.

С 1952 г. В. В. Вагнер (а позднее и его ученики) изучал полугруды — алгебраические системы  $S$  с одной тернарной операцией  $[s_1 s_2 s_3] = s$ , удовлетворяющие тождествам типа ассоциативности

$$[[s_1 s_2 s_3] s_4 s_5] = [s_1 [s_4 s_3 s_2] s_5] = [s_1 s_2 [s_3 s_4 s_5]].$$

Для приложений в основаниях дифференциальной геометрии оказались особенно важными полугруды со специальными условиями коммутирования — так называемые обобщенные груды. Обобщенные груды — класс алгебраических систем, дающих «абстрактное» описание суперпозиции взаимно однозначных частичных отображений одного множества в другое (так же, как полугруппы описывают суперпозицию отображений множества в себя). Оказалось, что теория обобщенных груд тесно связана с теорией инверсных полугрупп. Вагнер, Глускин и Шайн обнаружили очень далеко идущие аналогии между общей теорией полугрупп и теорией полугруд. Истоки этих аналогий в значительной мере выяснены Глускиным при изучении так называемых позиционных оперативов — алгебраических систем с одной  $n$ -арной операцией, удовлетворяющей специальным тождествам типа ассоциативности.

В. В. Вагнер изучает также другие алгебраические системы, близкие к полугруппам и имеющие приложения в геометрических вопросах.

Характеры полугрупп (их гомоморфизмы в мультипликативную полугруппу комплексных чисел) изучал М. М. Лесохин (1960—1962 гг.). Эти исследования близки к направлению Ш. Шварца, Р. Хантера и др. Лесохин рассматривал также обобщенные характеры коммутативной полугруппы — ее гомоморфизмы в другую коммутативную полугруппу

пу, — а также вопросы аппроксимации, т. е. подпрямые произведения полугрупп. Подпрямые произведения изучал также Б. М. Шайн. Естественным продолжением теории характеров явилась развитая Лесохиним теория систем с внешним умножением — троек  $\{A, B, C\}$  коммутативных полугрупп, в которых для любых  $a \in A$ ,  $b \in B$  определен элемент  $a \circ b \in C$ , причем  $a \circ b$  и  $A \circ b$  являются гомоморфизмами  $a$  и соответственно  $A$  в  $C$ .

Теория полугрупп в СССР продолжает успешно развиваться. Исследования углубляются, количество работ растет. Поэтому естественно, что в настоящем обзоре не рассмотрены самые последние работы. Обзор относится к алгебраической теории полугрупп; в нем совсем не упомянуты исследования по числовым полугруппам и полугруппам операторов в банаховых пространствах и очень бегло названы работы по упорядоченным полугруппам.

## Теория колец

Начало развития теории колец в нашей стране относится ко второй половине 30-х годов и связано с вопросами вложения колец (А. И. Мальцев), мультипликативной теории идеалов (А. И. Узков) и существования точного линейного представления алгебры Ли (И. Д. Адо). В дальнейшем исследования охватили радикалы колец (А. Г. Курош, В. А. Андрунакиевич), альтернативные и иордановы кольца (Л. А. Скорняков, А. И. Ширшов) и другие разделы теории колец. В настоящее время в советской школе теории колец накопилось много глубоких результатов, сложились определенные традиции, и она имеет свои направления.

*Теоремы вложения.* Рассматривая это направление, назовем прежде всего замечательную работу А. И. Мальцева «О погружении алгебраического кольца в поле» (1937 г.), в которой строится пример некоммутативного невлостимого в тело кольца без делителей нуля. Построенный пример явился отрицательным решением проблемы Ван-дер-Вардена. Другие примеры невлостимых в тела колец без делителей нуля построены в работах Мальцева «О включении ассоциативных систем в группы», выполненных в 1939 и 1940 гг. Близким вопросам посвящено исследование Л. А. Бокутя, в котором строятся интересные примеры колец без делителей нуля (1964 г.). В работах 1963 г. Бокуть доказал, что произвольную алгебру  $A$  над полем  $P$  можно вложить в алгебру  $S$  над тем же полем, в которой разрешимо любое уравнение вида

$$\alpha ay + ybx + \alpha xy + \beta yx + cx + dx + fy + gy = h,$$

где  $a, b, c, d, f, g, h$  принадлежат алгебре  $S$ ;  $\alpha, \beta$  — полю  $P$ , причем  $a$  и  $b$  не обращаются одновременно в нуль. Если алгебра  $A$  не имеет делителей нуля, то ее можно вложить в алгебру без делителей нуля, в которой разрешимо любое уравнение указанного вида при некоторых дополнительных ограничениях, налагаемых на элементы  $a, b$ . Заметим, что строящаяся алгебра  $S$  является простым кольцом. Поэтому в качестве

следствия получаются хорошо известные теоремы Кона о вложении колец без делителей нуля в простые кольца без делителей нуля.

А. И. Жуков доказал (1950 г.), что всякая неассоциативная алгебра, не более чем счетной размерности, изоморфно вкладывается в алгебру с одной образующей. А. И. Мальцев показал (1952 г.), что всякое, не более чем счетное, кольцо изоморфно вкладывается в ассоциативное кольцо с двумя образующими. Аналогичная теорема верна и для ассоциативных алгебр счетной размерности. А. И. Ширшову принадлежит общая схема (1956 г.) получения теорем вложения указанного вида. Он определяет понятие размерности данной системы тождественных соотношений  $\Omega$  и доказывает, что если эта размерность равна  $K$ , то всякое  $\Omega$ -кольцо (т. е. кольцо с тождественными соотношениями  $\Omega$ ), имеющее не более счетного множества образующих, изоморфно вкладывается в  $\Omega$ -кольцо с  $K$  образующими, причем всякое  $\Omega$ -кольцо изоморфно вкладывается в такое  $\Omega$ -кольцо, в котором всякое счетное подмножество лежит в подкольце с  $K$  образующими. В качестве следствия получены обобщения теорем вложения Жукова и Мальцева.

*Мультипликативная и аддитивная теория идеалов.* Одной из первых работ советских алгебраистов в этой области было исследование А. И. Узкова (1939 г.), где показано, что введенное Ван-дер-Варденом понятие эквивалентности идеалов является единственным, при котором справедлива теорема об однозначности разложения всякого класса эквивалентности идеалов коммутативного кольца без делителей нуля в произведение степеней простых идеалов. Другая работа А. И. Узкова (1939 г.) посвящена построению мультипликативной теории идеалов в некоммутативных кольцах: в кольце с единицей отмечается некоторое подкольцо центра, по отношению к которому определяются порядки и идеалы и указываются необходимые и достаточные условия для однозначной разложимости двусторонних и односторонних идеалов в произведение степеней простых идеалов. Эта теория содержит в качестве частных случаев мультипликативную теорию идеалов в коммутативных кольцах, принадлежащую Э. Нетер, и теорию идеалов в конечномерных алгебрах, построенную Брандтом, Артином и Дойрингом. Узков распространил последнюю теорию на случай произвольных конечномерных алгебр. К рассмотренным исследованиям примыкают работы Е. Г. Шульгейфера (1949—1950 гг.). Им предложена общая схема, в которую укладываются различные обобщения и аналоги нетеровой мультипликативной теории идеалов. Для этого вся теория строится в структурно упорядоченных полугруппах.

В самое последнее время (1964—1965 гг.) В. А. Андрунакиевичем и Ю. М. Рябухиным начаты исследования по аддитивной теории идеалов некоммутативных (и неассоциативных) колец, модулей и группоидов. Чтобы охватить известные обобщения нетеровой аддитивной теории идеалов, всю эту теорию они развивают в системах с частными, являющимися естественным обобщением  $(\mathfrak{r})$ -алгебр Лезье и Круазо. Вводят общее понятие примарности, охватывающее большинство известных обобщений классической нетеровой примарности. Доказывают, что при естественных требованиях, предъявляемых к примарности, понятие



В. А. Андрунакиевич.

терциарности, введенное Лезье и Круазо, является единственно возможным обобщением классической примарности.

*Кольца частных.* К первым исследованиям советских алгебраистов по кольцам частных относится работа А. И. Узкова, выполненная в 1948 г. В ней осуществлена интересная конструкция кольца частных коммутативного кольца по подмножеству, в котором могут содержаться делители нуля. В последнее время предложено несколько различных конструкций кольца частных, обобщающих классические кольца частных коммутативных областей целостности: кольца частных Джонсона, Финдли и Ламбека, Уцуми и др. Одной из удачных конструкций кольца частных является конструкция, предложенная В. П. Елизаровым в 1960 г. Им найдены необходимые и до-

статочные условия существования обобщенного кольца частных. В этом же году Елизаров изучил кольца частных прямой суммы колец, кольца матриц, над некоторым кольцом и т. д., а в 1962 г. построил один аналог кольца частных — кольцо частных относительно присоединенного умножения

$$a \circ b = a + b - ab.$$

*Радикалы колец и алгебр.* Начало общей теории радикалов положено фундаментальной работой А. Г. Куроша, опубликованной в 1953 г., и циклом работ, выполненных параллельно ей Амицурой. Целью работы Куроша было дать общую схему, в которую укладывались бы многочисленные определения радикалов для колец и алгебр. В ней введено очень удачное общее понятие радикала в любом классе колец, замкнутом в смысле перехода к идеалам и фактор-кольцам, причем с любой областью операторов, понятие верхнего и нижнего радикала, понятие частичной упорядоченности радикалов, доказаны основные свойства радикальных и полупростых колец, указана некоторая классификация радикалов, связанная с разбиением класса всех простых колец на два непересекающихся класса. До этого изучались лишь отдельные конкретные радикалы. Назовем работы В. А. Андрунакиевича, связанные с радикалами Джекобсона и Брауна-Маккоя (1948—1957 гг.), а также его работу, где изучаются антипростые кольца, т. е. кольца, никакой идеал которых не отображается гомоморфно на ненулевые простые кольца (1957 г.). Работами Андрунакиевича, выполненными в 1958 и 1961 гг., был начат цикл исследований по общей теории радикалов ассоциативных колец. Оказалось целесообразным выделить из общего класса радикалов два подкласса наследственных радикалов: подыдемпотентные (все нильпотентные кольца полупросты) и наднильпотентные (все нильпотент-

ные кольца радикальны) радикалы. Наиболее богатым по содержанию является класс специальных радикалов — подкласс класса наднильпотентных радикалов. Радикалы Джекобсона, Брауна — Маккоя, ниль-радикалы Кете и Левицкого, нижний ниль-радикал Бэра — Маккоя и другие хорошо известные радикалы являются специальными радикалами. Если кольцо удовлетворяет одному из условий обрыва, то всякий наднильпотентный радикал совпадает в этом кольце с некоторым специальным радикалом. Доказана теорема двойственности, дающая описание всех себе двойственных наднильпотентных и подыдемпотентных радикалов. В. А. Андрунакиевич и Ю. М. Рябухин показали (1962—1964 гг.), что любой радикал можно изучать с помощью теории модулей. При этом получаются результаты, аналогичные результатам о квазирегулярном радикале Джекобсона.

В недавно вышедшей на английском языке монографии Дивинского «Кольца и радикалы», посвященной, в основном, наднильпотентным радикалам, отражены указанные выше результаты А. Г. Куроша и В. А. Андрунакиевича. В ней, как и в работе Андрунакиевича (1961 г.), ставится проблема: существует ли наднильпотентный, но не специальный радикал. Положительный ответ на этот вопрос дан в 1965 г. Ю. М. Рябухиным.

Завершением рассматриваемого цикла работ явились исследования Е. Г. Шульгейфера и Ю. М. Рябухина, в которых результаты общей теории радикалов колец и алгебр перенесены в теорию категорий. Рябухин ввел новое понятие обобщенно специального класса объектов. С помощью обобщенно специальных классов колец можно дать характеристику наследственных, наднильпотентных, подыдемпотентных и специальных радикалов. Специальные классы колец — это в точности обобщенно специальные классы первичных колец.

А. И. Герчиковым доказана (1940 г.) интересная теорема: ассоциативное кольцо является дискретной прямой суммой тел тогда и только тогда, когда оно не содержит нильпотентных элементов и удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов. Другое доказательство этой теоремы, с помощью общей теории полупростых колец, принадлежит В. А. Андрунакиевичу (1958—1961 гг.).

Замечательный пример Е. С. Голода (1964 г.) дает отрицательный ответ на проблему Левицкого (будет ли локально нильпотентным всякое ниль-кольцо) и проблему А. Г. Куроша (будет ли локально конечной всякая алгебраическая алгебра).

*Расщепление алгебр и колец. Простые ассоциативные алгебры.* А. И. Мальцев в 1942 г. доказал расщепляемость ассоциативных и лиевых конечномерных алгебр в полупрямую сумму радикала и полупростой алгебры. В 1947 г. А. И. Тихомиров распространил результаты Мальцева на случай бесконечномерной алгебры в предположении, что радикал этой алгебры нильпотентен, а фактор-алгебра по радикалу конечномерна. Эти исследования получили далеко идущее развитие в работе В. М. Курочкина о бесконечномерных ассоциативных алгебрах, в которой радикал и полупростота понимаются в смысле Джекобсона.

В. А. Андрунакиевич обобщил (1962 г.) результаты Холла о разложении конечномерных алгебр на случай любого кольца  $K$  с условием минимальности для главных правых идеалов в фактор-кольце  $K/R$ , где  $R$  — заданный наднильпотентный радикал.

А. Г. Курош изучил (1942—1946 гг.) свойства простых бесконечномерных алгебр с единицей, связанных с разложениями в прямое произведение. Он показал, что прямое произведение любого множества простых нормальных алгебр с единицей само просто и нормально. Рассмотрены, в частности, локально конечные простые нормальные алгебры. Изучение локально конечных простых нормальных алгебр продолжил В. М. Курочкин (1948 г.). А. И. Тихомиров дал (1944 г.) прозрачное доказательство теоремы о простоте и нормальности прямого произведения простых нормальных алгебр, одновременно распространив ее на случай неассоциативных алгебр. Продолжая эти исследования, А. Г. Курош построил (1951 г.) пример локально матричной алгебры, которая не может быть разложена в прямое произведение примарных подалгебр, и пример локально конечной алгебры, простой и центральной в целом, но не являющейся локально простой и локально центральной.

Важное значение для теории простых конечномерных алгебр имеют результаты Д. К. Фаддеева о простых центральных алгебрах над полем алгебраических функций от одной переменной с полем констант нулевой характеристики (1951 г.). Им введены некоторые инварианты таких алгебр. В частном случае алгебр над полем рациональных функций от одной переменной эти инварианты описывают простые центральные алгебры с точностью до подобия и прямого умножения на алгебру некоторого специального вида. Он дал также обзрение простых центральных алгебр над полем формальных степенных рядов.

*Свободные разложения, свободные алгебры и алгебры с тождественными соотношениями.* Началом исследований советских алгебраистов по свободным алгебрам, свободным разложениям и определяющим соотношениям в алгебрах является работа А. Г. Куроша (1947 г.), в которой доказана следующая глубокая теорема: всякая подалгебра свободной неассоциативной алгебры сама свободна. Эта теорема была позднее (1953 г.) вновь доказана Виттом. Используя метод Витта, Курош дал в 1955 г. новое доказательство теоремы о подалгебрах свободных сумм алгебр: алгебра, разложимая в неассоциативную свободную сумму, не может быть разложена ни в ассоциативную, ни в ассоциативно-коммутативную свободную сумму, ни в прямую сумму. Неассоциативные свободные разложения алгебр с одной объединенной подалгеброй изучал Ц. Е. Дидидзе (1957 г.).

А. И. Жуков доказал (1950 г.) теорему, формулирующуюся так же, как известная теоретико-групповая теорема Грушко. Из основных результатов Жукова следует, что свободные разложения алгебры с  $n$  образующими состоят не более чем из  $n$  свободных слагаемых. Неассоциативная свободная алгебра с конечным числом образующих не может быть изоморфной своей истинной фактор-алгебре. Согласно теореме Куроша, подалгебры свободных неассоциативных алгебр сами свободны. Однако для свободных ассоциативных алгебр (и во многих других

случаях) соответствующая теорема не верна. Тем более интересна доказанная в 1953 г. А. И. Ширшовым глубокая теорема о том, что всякая подалгебра свободной лиевой алгебры (над произвольным полем) сама свободна. В 1954 г. А. И. Ширшов доказал, что такие же теоремы справедливы для подалгебр свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр.

Общую теорию приведенных свободных алгебр, т. е. алгебр, свободных относительно некоторой системы тождественных соотношений, изучал А. И. Мальцев (1950 г.). Многие из его результатов переносятся на случай колец и групп. Алгебры с тождественными соотношениями рассматривали А. И. Ширшов и В. Н. Латышев. Ширшов в качестве следствия из основного результата получил (1957 г.)



А. И. Ширшов.

утверждения о нильпотентности и локальной конечности некоторых колец и алгебр. Латышев нашел (1962 г.) положительное решение известной проблемы Шпехта в классе метабелевых групп и дал отрицательный ответ на одну из проблем Капланского.

*Представления неассоциативных колец в ассоциативных кольцах.* Исследования А. И. Ширшова, выполненные в 1956 г., посвящены, в частности, иордановым кольцам, обладающим точным представлением в ассоциативных кольцах с операцией умножения  $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ .

При этом рассматривались кольца, в которых деление на два выполнимо и однозначно. Доказано, что всякое иорданово кольцо с двумя образующими специально. Более того, иорданово кольцо специально тогда и только тогда, когда оно изоморфно вкладывается в такое иорданово кольцо, в котором всякое счетное подмножество содержится в подкольце с двумя образующими.

В 1952 г. А. И. Мальцев доказал, что любое кольцо  $R$  изоморфно вкладывается в некоторое кольцо, полученное из ассоциативного кольца введением умножения  $a \circ b = kab$ , где  $k$  — фиксированный элемент ассоциативного кольца. Другой способ точного представления неассоциативных колец в кольцах ассоциативных предложил в 1955 г. Л. А. Скорняков; для любого кольца  $B$  можно найти такое ассоциативное кольцо  $A$ , что аддитивная группа  $A^+$  кольца  $A$  разлагается в прямую сумму  $A^+ = B^+ \oplus C$ , причем произведение  $b_1 b_2$  элементов  $b_1, b_2$  в кольце  $B$  совпадает с  $B$ -компонентой произведения  $b_1 b_2$  этих элементов в ассоциативном кольце  $A$ .

*Альтернативные кольца и тела.* Альтернативные кольца — это кольца, определяемые тождественными соотношениями  $(ab)b = ab^2$ ,  $a^2b = a(ab)$ . В 1950—1954 гг. Л. А. Скорняков доказал и обобщил теорему





Л. А. Скорняков.

Муфанг и теорему Артина: альтернативные кольца — это в точности такие кольца, в которых всякое подкольцо, порожденное двумя элементами, ассоциативно. В фундаментальных работах 1950 г. он доказал теорему, дающую полное обозрение альтернативных тел: всякое альтернативное тело или ассоциативно, или является алгеброй Кэли-Диксона над своим центром. Эта теорема затем доказывалась и обобщалась Браком и Клейнфельдом. Большой интерес вызвала также работа Скорнякова «Правоальтернативные тела» (1951 г.). В ней доказано, что всякое правоальтернативное тело (т. е. тело, в котором выполняется лишь первое из указанных выше тождеств) с характеристикой, отличной от двух, альтернативно. Поскольку альтернативные кольца являются довольно близким обобщением

ассоциативных колец, то относительно любого предложения, справедливого в ассоциативных кольцах, интересно выяснить, справедливо ли оно и для альтернативных колец. В 1957 г. А. И. Ширшов доказал, что альтернативное кольцо с конечным числом образующих и тождественным соотношением  $x^n = 0$  нильпотентно, т. е. существует такое натуральное число  $N$ , что произведение любых  $N$  элементов кольца равно нулю. В 1963 г. Г. В. Дорофеев построил пример, показывающий, что известная теорема Нагата — Хигмана не переносится в альтернативные кольца: существует такое ненильпотентное альтернативное ниль-кольцо с аддитивной группой без кручения, что  $x^4 = 0$  для любого элемента  $x$  этого кольца. В 1965 г. К. А. Жевлаков доказал, что в альтернативном кольце, удовлетворяющем условию минимальности для правых квазирегулярных идеалов, радикал Джекобсона — Смайли, а вместе с ним и любой односторонний квазирегулярный идеал нильпотентны. Этим была обобщена известная теорема Гопкинса. В 1960 г. Г. В. Дорофеев построил пример разрешимого, но не нильпотентного альтернативного кольца.

*Упорядоченные, нормированные и топологические кольца.* В 1954 г. В. Д. Поддерюгин определил необходимые и достаточные условия для линейной упорядочиваемости кольца. Кольцо без делителей нуля тогда и только тогда допускает линейную упорядоченность, когда в нем не равна нулю никакая сумма четных произведений, т. е. произведений, в которые каждый сомножитель входит четное число раз.

Архимедовски упорядоченные кольца полностью описал в 1954 г. Я. В. Хион. Такие кольца являются в точности или подкольцами упорядоченного поля действительных чисел, или кольцами с нулевым умножением на подгруппах упорядоченной аддитивной группы действительных чисел. Упорядоченные ассоциативные кольца изучены Хионом в 1955 г.

В его работах 1957 г. показано, что от случая упорядоченных колец можно перейти к более общему случаю ассоциативных колец, нормированных при помощи упорядоченных полугрупп.

Из работ по топологическим кольцам назовем прежде всего результаты Л. С. Понтрягина о строении топологических тел (1932 г.): всякое связное локально компактное топологическое тело со второй аксиомой счетности изоморфно либо полю вещественных чисел, либо полю комплексных чисел, либо телу кватернионов. В 1957 г. А. И. Мальцев построил общую теорию свободных топологических алгебр. В частности, он установил алгебраическое строение свободных топологических колец широкой системы классов, включающей классы неассоциативных колец, ассоциативных колец, колец Ли и др. Л. А. Скорняков доказал (1963 г.) теорему о строении локально бикompактных бирегулярных колец, а также, попутно, теорему о строении локально бикompактного топологического кольца. Из его результатов следует известная теорема Капланского о разложении локально бикompактного строго регулярного кольца. В 1965 г. Скорняков показал, что недискретные локально бикompактные простые кольца с единицей, имеющие ненулевое левое открытое ядро, и только такие кольца являются матричными кольцами над недискретными локально бикompактными телами. Им описаны все локально бикompактные топологизации любого простого кольца с единицей и построен пример недискретного локально бикompактного простого кольца с единицей и с нулевым левым открытым ядром.

К исследованиям условий нормируемости и псевдонормируемости топологических колец относится прежде всего работа И. Р. Шафаревича о нормируемости топологических полей (1943 г.). Используя метод Шафаревича, Д. П. Мильман нашел (1945 г.) некоторые достаточные условия псевдонормируемости топологических колец. Другие достаточные условия псевдонормируемости получила (1965 г.) З. С. Липкина. Наконец, В. И. Арнаутков определил (1965 г.) критерий псевдонормируемости топологических колец: для псевдонормируемости топологического кольца  $R$  необходимо и достаточно, чтобы оно было объединением счетного числа ограниченных множеств (в смысле И. Р. Шафаревича) и чтобы существовал счетный базис окрестностей нуля  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), удовлетворяющих двум условиям: 1)  $u_i u_j \subseteq u_{i+j}$ ; 2)  $u_i + u_j \subseteq u_{i-1}$ .

*Кольца и алгебры Ли.* Первым исследованием советских алгебраистов по алгебрам Ли является работа И. Д. Адо (1934—1935 гг.), в которой доказана знаменитая теорема о существовании точного линейного представления произвольной алгебры Ли над полем комплексных чисел. Другие доказательства теоремы Адо были получены позднее Э. Картаном и А. И. Мальцевым (1945 г.). Ф. Р. Гантмахером изучены (1938—1939 гг.) автоморфизмы полупростых комплексных алгебр Ли и найдены все вещественные простые алгебры Ли. Некоторые результаты были получены ранее Картаном и Вейлем, но Гантмахер дал более полные и более прозрачные доказательства.

В 1942 г. А. И. Мальцев показал, что максимальные полупростые подалгебры Ли сопряжены между собой и потому разложение Леви единственно с точностью до внутренних автоморфизмов. Этот результат



Ф. Р. Гантмахер.

позволил в основном решить задачу о нахождении алгебр Ли с заданным радикалом. Особый интерес представляет предложенная Мальцевым классификация полупростых подалгебр, содержащихся в полупростых алгебрах Ли, и полупростых подгрупп в простых группах Ли (1944 г.). Заметим, что к задаче классификации полупростых подалгебр в полупростых алгебрах Ли приводится задача нахождения всех алгебр Ли с заданным радикалом и задача классификации однородных пространств с компактной группой движений. Из результатов Мальцева следует, например, что неразложимых в прямую сумму алгебр Ли с данным радикалом существует лишь конечное число. В. В. Морозов свел общую задачу Ли о нахождении максимальных подалгебр Ли к определению максимальных полупростых подгрупп простых групп Ли.

А. И. Ширшов предложил (1962 г.) метод выбора базы в свободной алгебре Ли, обобщающий известный метод Холла. В серии работ (1961—1965 гг.) А. И. Кострикин рассматривает простые  $p$ -алгебры Ли и алгебры Ли, допускающие регулярный автоморфизм. Он использует методы и технику, разработанную им в очень интересных работах, посвященных проблеме Бернсайда. В 1958 г. А. И. Ширшов доказал, что каждая алгебра Ли не более чем счетного ранга изоморфно вложима в алгебру Ли с двумя образующими.

*Другие вопросы теории колец.* Среди работ, посвященных другим вопросам теории колец, назовем исследования В. А. Андрунакиевича, П. А. Фрейдмана и В. И. Шнейдмюллера по ассоциативным кольцам, удовлетворяющим различным условиям конечности. Шнейдмюллер показал, что изучение колец с конечными убывающими цепями подколец сводится к изучению конечных колец. Из этих результатов и некоторых теорем Селе следует, что описание нильпотентных колец с условием минимальности для левых идеалов сводится к описанию конечных нильпотентных колец.

Скрещенным произведениям посвящены работы А. И. Тихомирова (1941 г.) и А. А. Бовди (1961—1963 гг.), а бинарно лиевым алгебрам и алгебрам Мальцева — исследования А. Т. Гайнова (1957, 1963 гг.) и К. А. Жевлакова (1965 г.). Жевлаков доказал, что над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 простая конечномерная алгебра Мальцева является либо алгеброй Ли, либо коммутаторной алгеброй алгебры Кэли — Диксона без единицы. Этим он дал полную классификацию указанных простых конечномерных алгебр Мальцева.

## Топологическая алгебра

Теория непрерывных групп преобразований, открытая С. Ли и получившая впоследствии название теории групп Ли, к 30-м годам нашего столетия уже представляла собой глубоко разработанную и обширную область математики. Она оказалась тесно связанной с геометрией многомерных пространств, имея в последней многочисленные применения.

Самое определение группы Ли включает понятие многообразия, в котором предполагается заданным закон композиции, т. е. умножения, его точек как элементов группы, подчиняющийся довольно жестким условиям. Более подробно это можно сформулировать так: группа Ли  $G$  есть совокупность точек некоторого конечномерного многообразия, составляющая группу в абстрактном смысле и допускающая в некоторой окрестности  $U$  единицы систему координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , такую, что если  $z = xy$  для точек  $x$  и  $y$  из  $U$  и

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n),$$

то

$$z_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где все функции  $f_i$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные до третьего порядка включительно.

Благодаря условию дифференцируемости определяющих функций  $f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  в теории групп Ли становится возможным широкое использование математического анализа, в частности теории дифференциальных уравнений, что позволяет получить тонкие и глубокие результаты, вскрывающие алгебраическое и геометрическое строение группы Ли. Использование аналитического аппарата является фактом, обусловленным самой природой изучаемого объекта.

Одним из первых советских ученых, интенсивно культивировавших теорию групп Ли, был Н. Г. Чеботарев. Трудным и важным проблемам из этой области посвящена серия оригинальных работ, выполненных как самим Н. Г. Чеботаревым в период его деятельности в Казанском университете, так и его учениками И. Д. Адо и В. В. Морозовым. В частности, Адо получил положительное решение проблемы представления алгебр Ли с помощью матриц, давно поставленной перед математиками.

К этому времени в теории групп Ли оставалось много нерешенных крупных проблем, среди которых особую известность приобрела пятая проблема Гильберта: если в приведенном выше определении группы Ли отбросить условие дифференцируемости определяющих функций

$$f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

оставив лишь требование их непрерывности, то будет ли она группой Ли?

Помимо групп непрерывных, главным образом групп Ли, усиленно развивается теория абстрактных групп, как конечных, так и бесконечных. Для элементов абстрактных групп нет отношения сколь угодно малой близости, а поэтому для них утрачивает смысл понятие непрерывности операции умножения. Это — объекты дискретной



И. Д. Адо.

природы, структуры чисто алгебраические, они являются представителями многочисленного семейства алгебраических систем, наряду с полем, телом, кольцом и т. д.

Всякая алгебраическая система представляет собой множество элементов произвольной природы, которые связаны одной или несколькими операциями. Например, кольцо — это множество элементов, для которых определены две операции — сложение и умножение, подчиненные законам ассоциативности, дистрибутивности и т. д. Для изучения таких алгебраических образований разрабатываются специальные методы, свойственные дискретным системам. Конечно, это вовсе не исключает применения аналитических методов при решении отдельных возникающих при этом задач, что обуславливается другими причинами.

Долгое время теория различных абстрактных алгебраических систем развивалась изолированно от теории непрерывных групп. Введение непрерывности алгебраических операций в том виде, в каком она определялась для групп Софусом Ли, во многом себя не оправдывало, и поэтому богатый опыт теории групп Ли не мог быть распространен на абстрактные алгебраические системы без ущерба для сохранения необходимой общности получаемых образований. Нужна была новая концепция, которая позволила бы распространить категорию непрерывности на алгебраические образования без всяких сколько-нибудь серьезных ограничений класса этих образований и вместе с тем достаточно естественно. Подходящая почва для успешного решения этой проблемы к 20-м годам уже была полностью подготовлена. Этой благодатной почвой послужила общая теория топологических пространств, сформировавшаяся на базе абстрактной теории множеств. В ней понятие пространства распространено на множества весьма общей природы так, что при этом оказались сохраненными немногие основные свойства обычного пространства, в которых отражены простейшие и наиболее существенные его черты. Крупный вклад в эту теорию внесли советские ученые П. С. Александров, П. С. Урысон, А. Н. Тихонов и др.

Только на этой крайней ступени абстракций понятий пространства и алгебры появилась идея топологической алгебры как абстрактной алгебраической системы, элементы которой составляют топологическое пространство при условии, что ее основные операции непрерывны в рассматриваемой топологии. Такая идея и была осуществлением того подходящего синтеза между разнородными, но вполне адекватными понятиями, принадлежащими, с одной стороны, алгебре, а с другой — анализу. Необходимость этого синтеза вполне созрела. Так, О. Шрейер в 1925 г. сформулировал понятие общей топологической группы и по-

ложил начало ее изучению, в 1932 г. Л. С. Понтрягин ввел топологию в тела, а А. Н. Колмогоров — в проективные геометрии и т. д.

При таком обобщенном понимании топологической алгебры ее классические разделы, основным представителем которых является теория групп Ли, составляют большую и важную часть: в них соответствующее топологическое пространство допускает систему координат, в которой основные операции не только непрерывны, но и дифференцируемы. В топологическую алгебру включаются также новейшие разделы анализа и геометрии.

В Советском Союзе исследования по топологической алгебре были начаты по инициативе А. Н. Колмогорова, поставившего ряд конкретных проблем принципиального значения. Ему самому принадлежат две геометрические работы, в которых важные классические разделы геометрии характеризуются с помощью топологических средств. В первой из них (1930 г.) дается обоснование геометрии постоянной кривизны с помощью топологии и теории групп, во второй (1932 г.) — новая аксиоматика проективной геометрии (действительной и комплексной), четко выделяющая ее топологическую структуру.

Пусть задано множество объектов, разделенное на три класса:  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ . Каждый из объектов класса  $\Sigma_0$  называется точкой, из  $\Sigma_1$  — прямой, из  $\Sigma_2$  — плоскостью. Допустим, что выполняются следующие аксиомы:

1. Классы  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  — топологические бикомпактные пространства.

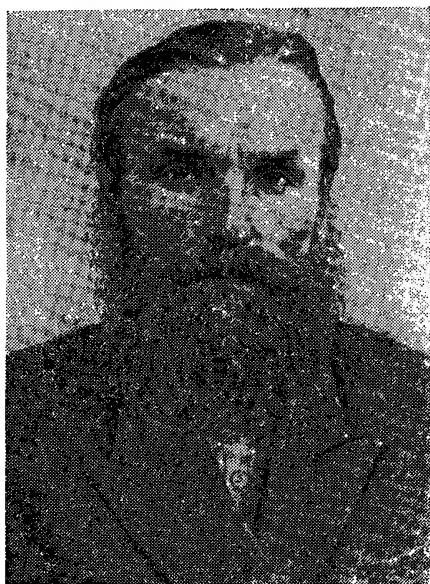
2. Точки, прямые и плоскости подчиняются проективным аксиомам инцидентности.

3. Отношения инцидентности непрерывны.

Тогда эти аксиомы определяют геометрию, совпадающую либо с действительной, либо с комплексной, либо с «кватернионной» проективной геометрией. Чтобы исключить последнюю возможность, следует добавить еще одну аксиому:

4. Аксиома Паскаля.

Построение проективной геометрии на такой аксиоматической основе стало возможным благодаря доказанной в 1932 г. Л. С. Понтрягиным теореме: единственные связанные локально компактные тела со второй аксиомой счетности суть поле действительных чисел, поле комплексных чисел и тело кватернионов. Эта теорема, бесспорно, является интереснейшим и первым достаточно глубоким результатом новой ветви алгебры. Однако самостоятельной ветвью математики топологическая алгебра стала несколько позднее — со времени создания развернутой теории



В. В. Морозов.

топологических групп, в чем советские ученые сыграли общепризнанную ведущую роль.

Рассмотрим основные моменты периода становления общей теории топологических групп.

Топологическая группа  $G$  определяется аксиоматически как объект со следующими свойствами:

1.  $G$  — группа в абстрактном смысле.
2.  $G$  — топологическое пространство.
3. Отображение  $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$  прямого произведения  $G \times G$  на  $G$  непрерывно ( $x$  и  $y$  пробегают все элементы из  $G$ ).

Оказывается, что с помощью этих аксиом при самых малых требованиях к топологическому пространству  $G$  можно обнаружить ряд важных общих его свойств. А именно: аксиомы автоматически влекут за собой хаусдорфовость и даже регулярность группового пространства, если только потребовать, чтобы  $G$  было  $T_0$ -пространством<sup>15</sup>. Вскоре Понтрягин заметил, что пространство топологической группы при этом условии является даже тихоновским (иначе говоря, вполне регулярным). Ввиду этого целесообразно вторую аксиому в определении топологической группы формулировать точнее:

2.  $G$  — топологическое  $T_0$ -пространство.

В дальнейшем будем придерживаться этого определения.

Некоторое время оставался открытым вопрос: не будет ли пространство топологической группы нормальным? Отрицательный ответ на него получил А. А. Марков (1941 г.). Он доказал, что всякое тихоновское пространство может быть вложено в качестве замкнутого подмножества в подходяще выбранную топологическую группу. Если бы пространство всякой топологической группы было нормальным, то и это подмножество оказалось бы нормальным пространством. Однако не всякое тихоновское пространство является нормальным.

Потребности приложений к смежным областям математики выдвинули в качестве важнейших проблем изучение строения и свойств некоторых классов топологических групп, определяемых дополнительными более или менее жесткими требованиями алгебраического и топологического характеров. В частности, таким важнейшим классом явился класс топологических коммутативных групп, особенно в связи с потребностями интенсивно разрабатывающейся комбинаторной топологии. Законы двойственности, устанавливающие связь между гомологическими свойствами множеств и их дополнений, были доказаны для немногих простейших областей коэффициентов. Возникла задача переноса этих законов на другие области коэффициентов, решение которой во всей общности затруднялось отсутствием необходимых средств из теории коммутативных групп. Только создание теории характеров коммутативных групп Понтрягиным позволило дать полное решение этой задачи.

---

<sup>15</sup> Напомним, что  $T_0$ -пространство удовлетворяет самой слабой аксиоме отделимости: из каждой пары точек его по крайней мере одна имеет замыкание, не содержащее другую точку.

Ввиду исключительного значения теории характеров приведем основные ее положения.

Обозначим буквой  $K$  аддитивную группу вещественных чисел по модулю 1, т. е. группу вращений окружности. Пусть  $G$  — локально компактная коммутативная группа в аддитивной записи групповой операции, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. Характером этой группы называется каждое непрерывное гомоморфное отображение  $\alpha: G \rightarrow K$  группы  $G$  в группу  $K$ . На множестве  $\Gamma$  всех характеров группы  $G$  определяются операция сложения и топологические соотношения. Если  $\alpha$  и  $\beta$  — элементы из множества  $\Gamma$ , то сумма  $\gamma = \alpha + \beta$  определяется так: для любого  $x$  из группы  $G$  полагаем  $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ . Таким образом, множество  $\Gamma$  становится группой с нулем, являющимся тривиальным гомоморфизмом. Выберем произвольную окрестность  $U$  нуля группы  $K$  и произвольное компактное множество  $F$  из группы  $G$ ; обозначим  $V = V(F, U)$  — множество всех элементов  $\alpha$  из множества  $\Gamma$ , таких, что  $\alpha(x) \in U$  для любого элемента  $x$  из подмножества  $F$ . Построенные таким образом множества  $V$  образуют систему, которую можно принять в качестве полной системы окрестностей нуля группы  $\Gamma$ . Оказывается, что  $\Gamma$  становится топологической группой, которая и называется группой характеров группы  $G$ .

Группа характеров  $\Gamma$  локально компактна и удовлетворяет второй аксиоме счетности. Если группа  $G$  дискретна, то группа  $\Gamma$  компактна; если группа  $G$  компактна, то группа  $\Gamma$  дискретна. Вот примеры некоторых простейших групп и их групп характеров.

1. Пусть  $G$  — конечномерная векторная группа. Тогда группа  $\Gamma$  ее характеров — векторная группа той же размерности, т. е. изоморфна группе  $G$ .

2. Пусть  $G$  — коммутативная группа с конечным числом образующих и без кручения. Тогда группа  $\Gamma$  — прямая сумма конечного числа групп, изоморфных группе  $K$ .

3. Пусть  $G$  — дискретная группа типа  $p^\infty$ ,  $p$  — простое число. Тогда группа  $\Gamma$  — аддитивная группа целых  $p$ -адических чисел.

Пусть  $\Gamma$  — группа характеров локально компактной группы со второй аксиомой счетности. Если  $g$  — произвольный элемент группы  $G$ , то, заставляя  $\alpha$  пробегать группу  $\Gamma$  и полагая  $g(\alpha) = \alpha(g)$ , получим непрерывное гомоморфное отображение  $g: \Gamma \rightarrow K$ , т. е. характер группы  $\Gamma$ . Справедлива следующая теорема фундаментального значения (теорема двойственности): группа  $G$  с первоначально заданной топологией и алгеброй совпадает с группой ее характеров  $\Gamma$ .

Тесные связи между свойствами группы  $G$  и свойствами ее группы характеров  $\Gamma$  позволяют далеко проникнуть в природу коммутативных топологических групп. Пусть, например,  $G$  — компактная локально связная и связная коммутативная группа со второй аксиомой счетности. Тогда группа ее характеров  $\Gamma$  дискретна и, в силу связности группы  $G$ , не имеет элементов конечного порядка. Кроме того, в группе  $\Gamma$  обрывается через конечное число шагов любая возрастающая последовательность подгрупп  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots \subset \Gamma_s \subset \dots$  постоянного ранга. Всякая же дискретная абелева группа с этим условием будет



свободной абелевой группой. Отсюда в силу теоремы двойственности немедленно вытекает, что группа  $G$  разлагается в прямую сумму конечного или же счетного множества групп, изоморфных группе  $K$ . С помощью этого предложения доказывается следующая теорема, из которой сразу вытекает положительное решение проблемы Гильберта для абелевых групп: локально компактная, локально связная и связная коммутативная группа  $G$  со второй аксиомой счетности распадается в прямую сумму  $G = R^m + G_1$ , где  $R^m$  —  $m$ -мерная векторная группа, а  $G_1$  — прямая сумма конечного или же счетного множества групп, изоморфных группе  $K$ .

Теорема двойственности первоначально доказывалась для компактных и дискретных групп. Используя идеи построенной теории, в дальнейшем удалось распространить теорему двойственности на произвольные локально бикompактные абелевы группы (Ван Кампен). При этом не потребовались какие-либо существенно новые средства.

Для произвольных локально бикompактных абелевых групп справедлива следующая структурная теорема: локально бикompактная абелева группа  $G$  разлагается в прямую сумму  $G = R^m + G_1$ , где подгруппа  $G_1$  содержит такую бикompактную подгруппу  $H$ , что фактор-группа  $G_1/H$  дискретна.

В 1934 г. на II Всесоюзном математическом съезде Л. С. Понтрягин выступил с обзорным докладом «Структура непрерывных групп», в котором изложил главнейшие результаты по топологической алгебре и четко сформулировал программу развития теории топологических групп в одном из важнейших ее направлений. Суть этого направления сводится к изучению строения топологических групп с помощью образований более простой или более изученной структуры.

Ярким примером такого подхода к изучению групп является приведенная выше теория коммутативных групп, а также построенная общая теория компактных групп со второй аксиомой счетности. Понтрягин показал, что всякая компактная группа  $G$  может быть сконструирована с помощью определенного предельного перехода из компактных групп Ли. Это возможно, так как для любой окрестности  $V$  единицы из группы  $G$  найдется замкнутый нормальный делитель  $N$ , содержащийся в окрестности  $V$ , такой, что фактор-группа  $G/N$  изоморфна группе Ли. Этот анализ строения компактных групп приводит к решению для них проблемы Гильберта.

Такой конструктивный подход к изучению строения групп, причем не только топологических, в последующем оказался характерным для многих советских алгебраистов.

Большую роль в развитии топологической алгебры сыграла монография Л. С. Понтрягина «Непрерывные группы» (1938 г.). Исключительно четкий и ясный ее язык, логическая стройность, удачное сочетание абстрактного материала с обилием конкретных примеров, идейное богатство, новизна и перспективность излагаемой теории привлекли к книге внимание самых широких слоев математиков. Она сразу стала одной из популярнейших математических книг, а вскоре была издана и за рубежом. Эта монография явилась итогом целого этапа развития

топологической алгебры, открыла перед ней новые горизонты и указала пути их достижения.

Книга Понтрягина состоит из девяти глав, в которых последовательно излагаются теория абстрактных групп, теория топологических пространств, общая теория топологических групп, линейные представления компактных топологических групп, теория коммутативных топологических групп, основные понятия групп Ли, структура компактных топологических групп, локально изоморфные группы и структура групп Ли.

Одним из больших содержательных разделов топологической алгебры, созданным к началу 40-х годов и интенсивно разрабатываемым в трудах советских ученых, является теория нормированных колец.

Нормированное кольцо — это комплексное банаховское пространство, для элементов которого определено ассоциативное умножение, перестановочное с умножением на комплексные числа и непрерывное по каждому аргументу (умножение оказывается автоматически непрерывным по совокупности обоих множителей). Теория этих колец является органической частью функционального анализа. Мы коснемся лишь немногих фактов, связанных с теорией коммутативных нормированных колец.

Теория коммутативных нормированных колец создана И. М. Гельфандом. На основе этой теории И. М. Гельфанд и Д. А. Райков дали новое построение теории характеров коммутативных топологических групп.

Пусть  $G$  — коммутативная локально бикompактная группа с мерой Хаара  $\mu$ . Совокупность  $L_1(G)$  всех комплекснозначных суммируемых по этой мере функций  $x(g)$  на  $G$  образует кольцо, если сложение определить обычным способом, а умножение — как свертывание. Если  $x, y$  принадлежат  $L_1(G)$ , их свертывание  $x * y$  определяется как функция

$$(x * y)(g) = \int x(g - h) y(h) d\mu(h).$$

Если группа  $G$  дискретна, то кольцо  $L_1(G)$  обладает единицей, если же группа  $G$  не дискретна, то это кольцо единицей не обладает. Пусть  $R(G)$  в первом случае совпадает с  $L_1(G)$ . Во втором случае  $R(G)$  — кольцо, полученное из  $L_1(G)$  формальным присоединением единицы  $e$ , т. е. элементами  $z$  его являются всевозможные суммы  $\lambda e + x$ , где  $\lambda$  — комплексное число,  $x$  — элемент из  $L_1(G)$ . Определяется норма  $\|z\| = |\lambda| + \|x\|$  (норма  $\|x\|$  в  $L_1(G)$  определяется обычно:  $\|x\| = \int |x(g)| d\mu(g)$ ).

Оказывается, что характеры группы  $G$  находятся во взаимно однозначном соответствии с максимальными идеалами кольца  $R(G)$  и зависимость между ними выражается простыми аналитическими формулами. Райков в 1945 г. получил на этом пути естественное обобщение теоремы Планшереля из классического гармонического анализа. Как следствие отсюда вытекает теорема двойственности для локально бикompактных коммутативных групп. Если заменить топологические ограничения некоторыми условиями, связанными с существованием меры на группе, то получается обобщение этой теоремы.

Тесно связаны с результатом Л. С. Понтрягина о локально компактных полях некоторые исследования о нормируемости топологических полей и колец.

Пусть  $\Sigma$  — топологическое поле. Оно называется нормируемым, если на поле  $\Sigma$  существует вещественная функция  $\varphi(x)$ , обладающая следующими свойствами: 1)  $\varphi(x) > 0$ , если  $x \neq 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ; 2)  $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ ; 3)  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ ; 4)  $\varphi(x)$  индуцирует на поле  $\Sigma$  топологию, совпадающую с первоначальной. Пусть  $R$  — совокупность тех элементов  $x$  из поля  $\Sigma$ , для которых  $x^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а  $\tilde{R}$  — тех  $y$  из поля  $\Sigma$ , для которых  $y^{-1} \in R$ . Множество  $W$  из поля  $\Sigma$  называется ограниченным, если для любой окрестности  $U$  нуля существует такая окрестность  $V$  нуля, что  $WV \subset U$ .

И. Р. Шафаревич доказал (1943 г.), что для нормируемости топологического поля  $\Sigma$  необходимо и достаточно, чтобы кольцо  $R$  было множеством открытым, а  $\tilde{R}$  — ограниченным. Если поле  $\Sigma$  локально бикompактно, то это условие выполнено. Поэтому всякое локально бикompактное поле нормируемо. Если оно связно, то норма архимедова, если же несвязно — дискретна. Условия нормируемости топологических коммутативных колец рассматривал Д. П. Мильман.

В связи с вопросами расширения топологических пространств А. Д. Александров рассматривал (1942 г.) расширения топологических групп. Он назвал топологическую группу абсолютно замкнутой, если она не содержится ни в какой большей топологической группе в качестве всюду плотного подмножества, и показал, что для всякой топологической группы  $G$  существует абсолютно замкнутая группа  $G'$ , содержащая группу  $G$  в качестве всюду плотной подгруппы. Д. А. Райков указал (1946 г.), что существует геометрическая процедура, с помощью которой можно построить абсолютное замыкание  $G'$  топологической группы  $G$ .

Назовем систему  $\{M\}$  множеств  $M$  группы  $G$  произвольно малой справа, если для любой окрестности  $U$  единицы найдется такое множество  $M$  из системы  $\{M\}$ , что  $MM^{-1} \subset U$ . Аналогично определяется система, произвольно малая слева. Воронкой называется центрированная система множеств, произвольно малая справа и слева. Две воронки  $\{M\}$  и  $\{N\}$  считаются равными ( $\{M\} = \{N\}$ ), если для любого множества  $N$  из системы  $\{N\}$  единица группы содержится в множестве  $MN^{-1}$ . Все воронки разбиваются на классы равных воронок. Определяется произведение воронок ( $\{M\} \{N\}$ ) как воронка, состоящая из множеств  $MN$ . Если  $\{M\} = \{M_1\}$  и  $\{N\} = \{N_1\}$ , то  $\{M\} \{N\} = \{M_1\} \{N_1\}$ . Совокупность классов равных воронок  $G'$  оказывается группой с соответствующей топологией, содержащей группу  $G$ . Она-то и совпадает с абсолютным замыканием группы  $G$ .

В 30—40-х годах наблюдается заметное увеличение интереса к изучению различных классов дискретных бесконечных групп. Потребности геометрии, теории функций комплексного переменного, теории полей привели к необходимости изучения свободных групп, групп с заданными определяющими соотношениями, бесконечных абелевых

групп, прямых и свободных произведений групп. К этому же времени относятся исследования по теории силовских  $p$ -подгрупп бесконечных групп и по теории бесконечных  $p$ -групп. Из теории колец в теорию групп проникают понятия обрыва цепочек подгрупп и систем операторов. На базе сравнительно хорошо разработанной теории бесконечных абелевых групп начинает развиваться новое направление в общей теории групп, характерной чертой которого является изучение некоммутативных групп, в том или ином отношении близких к абелевым и конечным группам. Большие заслуги в развитии этих разделов общей теории групп принадлежат А. Г. Курошу, А. И. Мальцеву, С. Н. Черникову, О. Ю. Шмидту и другим советским математикам.

В тесной связи с названными выше исследованиями общей теории групп разрабатываются и смежные вопросы топологической алгебры. Характерным примером такого подхода к изучению топологических групп является работа А. Г. Куроша «Силовские подгруппы нульмерных топологических групп», в которой основной результат о силовских подгруппах бесконечных абстрактных групп, полученный ранее автором совместно с А. П. Дицманом и А. И. Узковым, переносится на топологические группы. Если в топологической группе  $G$  существует полная система окрестностей единицы, состоящая из нормальных делителей, и эта группа обладает бикompактным классом сопряженных силовских  $p$ -подгрупп, то все силовские  $p$ -подгруппы группы  $G$  сопряжены между собой. При этом для простого числа  $p$  подгруппа  $P$  из группы  $G$  называется  $p$ -подгруппой, если для каждого ее элемента  $a$  степени  $a^{p^n}$  стремятся к единице при  $n \rightarrow \infty$ . Силовская  $p$ -подгруппа определяется обычно: это максимальная  $p$ -подгруппа.

Исходя из определений и свойств абстрактных свободных групп, А. А. Марков по аналогии вводит понятие свободной топологической группы. Группа  $G$  называется свободной топологической группой тихоновского пространства  $X$ , если она обладает следующими тремя свойствами: 1)  $X$  — подпространство в группе  $G$ ; 2)  $X$  топологически порождает группу  $G$ ; 3) каково бы ни было непрерывное отображение  $f$  пространства  $X$  в топологическую группу  $H$ , существует непрерывный гомоморфизм группы  $G$  в группу  $H$ , совпадающий на множестве  $X$  с отображением  $f$ . Такая топологическая группа существует и единственна с точностью до топологических изоморфизмов, переводящих все точки из множества  $X$  в себя. Оказывается, что любая топологическая группа является фактор-группой некоторой свободной топологической группы. Это свойство ставит свободные топологические группы в теории топологических групп на то же место, которое занимают свободные группы в теории дискретных групп.

Вводится также понятие свободной топологической коммутативной группы  $A$  тихоновского пространства  $X$ . Для этого достаточно к первому и второму условиям добавить вместо третьего новое условие: 3а) каково бы ни было непрерывное отображение  $f$  пространства  $X$  в произвольную топологическую коммутативную группу  $B$ , существует непрерывный гомоморфизм группы  $A$  в группу  $B$ , совпадающий на пространстве  $X$  с отображением  $f$ . Связь между свободными топологическими

группами и свободными коммутативными топологическими группами определяется следующей теоремой: коммутант свободной топологической группы замкнут в ней; свободная коммутативная топологическая группа вполне регулярного топологического пространства изоморфна фактор-группе свободной топологической группы того же пространства по ее коммутанту.

С помощью развитого аппарата теории свободных топологических групп удалось решить несколько проблем общей теории топологических групп. Выше упоминалось об отрицательном решении проблемы нормальности пространства топологической группы. Доказано существование связных периодических топологических групп любой мощности, не меньшей мощности континуума. Рассматривались вопросы о нетривиальной топологизации различных бесконечных абстрактных групп.

Названные исследования А. А. Маркова нашли живой отклик в математической литературе. Теорию свободных топологических групп продолжали разрабатывать М. И. Граев, японские математики Какутани, Накаяма, а затем и другие ученые. Особенно заметный вклад в эту теорию внес (1948 г.) М. И. Граев. Ему принадлежит новое доказательство теоремы существования и единственности свободной топологической группы вполне регулярного топологического пространства. Если назвать два пространства эквивалентными при условии, что их свободные топологические группы изоморфны, то, как показал Граев, существуют эквивалентные, но негомеоморфные пространства. Пространство, эквивалентное бикомпактному пространству, бикомпактно. Им полностью описаны классы эквивалентных счетных бикомпактных пространств.

С появлением теории свободных топологических групп сразу же возник вопрос о существовании аналога свободного произведения групп для групп топологических. Такой аналог также был найден и изучен М. И. Граевым.

Теория характеров коммутативных групп выдвинула проблему дальнейшего углубленного изучения строения различных классов топологических коммутативных групп. Прежде всего возник вопрос о наиболее общих условиях разложимости топологических абелевых групп в прямое произведение групп простейших структур (например, циклических групп, групп типа  $I_p$ -аддитивной группы целых  $p$ -адических чисел и др.), аналогичных известным условиям Прюфера для дискретных абелевых групп. Актуальной была также проблема перенесения классификационных теорем Ульма и Циппина на топологические абелевы  $p$ -группы.

Теория коммутативных топологических групп в этом направлении далеко продвинута в работах Н. Я. Виленкина. Виленкин установил аналоги теорем Прюфера. Для этого он ввел понятие прямого произведения с отмеченными подгруппами и с помощью этого понятия нашел условия для разложимости группы в произведение групп ранга 1 (к ним относятся циклические группы, группы типа  $I_p$  и др.). Им найдены также некоторые критерии разложимости коммутативных топологических групп в топологические прямые произведения дискретных локально

циклических групп. Пусть, например,  $G$  — топологическая коммутативная группа со второй аксиомой счетности. Если она является проективным пределом дискретных групп с конечным числом образующих, а всякий ее элемент порождает бесконечную циклическую группу, то группа  $G$  разлагается в прямое произведение дискретно топологизированных циклических групп.

Наряду с ранее изучавшимися сепарабельными коммутативными группами, выходящими за пределы локально компактных групп, Н. Я. Виленкин рассматривал двойственные им (в смысле теории характеров) косепарабельные группы, а также расширения сепарабельных групп с помощью косепарабельных — слабосепарабельные группы. Группа характеров слабосепарабельной группы — слабосепарабельна. Интересен класс так называемых волокнистых коммутативных групп. На них переносятся предложения, доказанные ранее для локально компактных групп со второй аксиомой счетности. Класс волокнистых групп является наибольшим классом групп, на которые полностью переносится теория характеров.

Прямым обобщением дискретных счетных коммутативных  $p$ -групп, полная классификация которых дана Ульмом и Циппиным, являются топологические абелевы  $p$ -группы со второй аксиомой счетности, группы типа  $p$ , по терминологии Виленкина. Перенесение этой классификации на произвольные группы типа  $p$  оказалось невозможным. Однако можно выделить классы групп типа  $p$ , для которых справедливы теоремы существования и единственности, аналогичные теоремам Ульма и Циппина.

В понтрягинской теории характеров при топологизации группы характеров малость характера определяется его малостью на бикомпактных подмножествах заданной группы — своего рода ограниченных подмножествах. Один из возможных вариантов обобщения теории характеров связан с заменой их на подмножества, ограниченные в другом смысле. Виленкин предложил задавать ограниченные подмножества независимо от топологии группы. Это охватило понтрягинскую теорию. В новую теорию характеров оказались вовлеченными линейные нормированные пространства: если в них считать ограниченными подмножества, лежащие в сферах, то группа характеров этого пространства отождествляется с сопряженным пространством.

М. И. Граев исследовал (1947 г.) структурные изоморфизмы коммутативных локально компактных групп со второй аксиомой счетности. Он показал, что структурный изоморфизм двух таких групп  $G$  и  $G_1$ , из которых  $G$  — нульмерная группа ранга не менее 2, индуцируется точно двумя групповыми изоморфизмами (здесь под рангом групп  $G$  понимается максимальный ранг ее дискретных подгрупп). Этот результат является обобщением теоремы Бэра о структурном изоморфизме абелевых групп.

Выдающиеся достижения в области топологической алгебры принадлежат А. И. Мальцеву. Его труды по математической логике, теории групп, теории упорядоченных образований, общей теории алгебраических систем получили известность и признание во всем мире.

Вопросами топологической алгебры Мальцев занимается почти с самого начала своего творческого пути. В первой своей работе по топологической тематике (1941 г.) он дал отрицательный ответ на вопрос, интересовавший алгебраистов со времени возникновения понятия локальной топологической группы: может ли всякая локальная топологическая группа быть локально изоморфной обыкновенной топологической группе. Мальцев изучал также группы Ли в целом. Одной из фундаментальных проблем теории групп Ли в целом является выяснение структуры пространства группы. Он показал, что топологическое пространство произвольной связной группы Ли гомеоморфно топологическому произведению евклидова пространства и пространства максимальной компактной подгруппы. В частности, если эта группа разрешима, то ее пространство гомеоморфно топологическому произведению прямых линий и окружностей. Все максимальные связные компактные подгруппы Ли сопряжены.

Заметное влияние на алгебраистов оказали статьи Мальцева «Об одном классе однородных пространств» и «Нильпотентные группы без кручения» (1949 г.). В них изучаются связи топологических групп с тонкими вопросами абстрактной теории групп. В первой работе рассматриваются многообразия, на которые транзитивно действует связная нильпотентная группа Ли. С такими многообразиями связывается абстрактная нильпотентная группа без кручения с конечным числом образующих и некоторая рациональная алгебра Ли. Это позволило во второй работе изучить строение абстрактных нильпотентных и локально нильпотентных групп без кручения. Всякой локально нильпотентной группе без кручения и с делением, т. е. полной, по принятой терминологии в абстрактной теории групп, можно сопоставить локально нильпотентную алгебру Ли над полем рациональных чисел и притом так, что в результате введения в нее новой операции по формуле Кемпбела—Хаусдорфа получается группа, абстрактно изоморфная первоначальной. При этом подалгебре соответствует полная подгруппа, а идеалу — полная инвариантная подгруппа. Все это позволило доказать глубокую теорему о существовании и единственности пополнения всякой нильпотентной группы без кручения.

Анализ строения топологических разрешимых групп при самых общих предположениях топологического характера — это одна из ближайших задач после изучения строения абелевых групп. А. И. Мальцев доказал (1946 г.) следующий факт о связных группах. Каждая окрестность единицы связной локально компактной разрешимой группы  $G$  содержит нормальный делитель  $N$  (лежащий в центре), фактор-группа  $G/N$  по которому является группой Ли. Отсюда выясняется локальное строение всякой связной разрешимой локально компактной группы и как следствие получается положительное решение проблемы Гильберта для топологических разрешимых групп.

Напомним определение топологической алгебраической системы.

Пусть на некотором множестве  $A$  определено отображение  $\Phi$ , которое каждой последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_n$  из  $n$  элементов множества  $A$  ставит в соответствие однозначно определенный элемент  $\Phi(a_1,$

$a_2, \dots, a_{n_\gamma}$ ) из этого же множества. Это отображение называется  $n$ -арной операцией на множестве  $A$ . Если отображение  $\Phi$  определено не для каждой последовательности элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , то это операция частичная. Если на множестве  $A$  задана совокупность операций  $\Phi_\gamma (a_1, \dots, a_{n_\gamma})$ , где  $\gamma$  пробегает некоторое множество  $\Gamma$  индексов, то множество  $A$ , рассматриваемое вместе со всеми этими операциями, называется алгебраической системой, а операции  $\Phi_\gamma$  — основными операциями для нее.

Выражения вида  $\Phi_\gamma (x_1, \dots, x_{n_\gamma})$ , где  $x_1, \dots, x_{n_\gamma}$  — буквы, называются полиномами первой степени. К ним присоединяются эти буквы. Если уже построены полиномы  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$  степени не большей  $k$ , причем по крайней мере один из них имеет степень  $k$ , то выражения вида  $\Phi_\alpha (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$  есть полиномы степени  $k + 1$ . Если  $F = F(x_1, x_2, \dots, x_p)$  — полином и  $a_1, a_2, \dots, a_p$  принадлежат множеству  $A$ , то  $F(a_1, a_2, \dots, a_p)$  также принадлежит множеству  $A$ . Элемент  $e$  алгебраической системы  $A$  называется главным, если  $\Phi_\gamma (e, e, \dots, e) = e$  для каждой основной операции  $\Phi_\gamma$ .

Чаще рассматриваются совокупности алгебраических систем, имеющих одинаковые операции и удовлетворяющих фиксированной системе  $S$  тождеств вида

$$F_\alpha = G_\alpha,$$

где  $F_\alpha$  и  $G_\alpha$  — многочлены от одних и тех же букв. Они называются примитивными классами алгебраических систем. В частности, пусть алгебраическая система  $A$  имеет три основные операции: умножение  $\Phi_1(x, y) \equiv xy$ , левое деление  $\Phi_2(x, y) \equiv y \setminus x$  и правое деление  $\Phi_3(x, y) \equiv x/y$ . Если эти операции удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} xy/y &= x; & y \setminus yx &= x; \\ (x/y)y &= x; & y(y \setminus x) &= x, \end{aligned}$$

то система  $A$  называется квазигруппой. Квазигруппы составляют один из примитивных классов. Квазигруппа, которая содержит элемент, являющийся правой и левой единицей, называется лупой.

Пусть теперь множество элементов алгебры  $A$  составляет топологическое пространство и все основные операции на этом пространстве непрерывны, т. е. для любой окрестности  $U$  элемента  $a = \Phi_\gamma(a_1, \dots, a_{n_\gamma})$  найдутся такие окрестности  $U_i$  элементов  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n_\gamma$ ), что для любых  $b_i$  из окрестности  $U_i$  элементы  $\Phi_\gamma(b_1, \dots, b_{n_\gamma})$  принадлежат окрестности  $U$ . Такая система  $A$  и будет топологической алгебраической системой в самом общем понимании. Обычным способом определяются понятия непрерывного гомоморфизма одной топологической алгебраической системы в другую и прочие подобные понятия.

В работе Мальцева «К общей теории алгебраических систем» (1954 г.) заложены основы общей теории топологических алгебраических систем (топологических универсальных алгебр). В ней указаны некоторые условия, при которых пространство топологической алгебраической системы  $A$ , принадлежащей примитивному классу, регулярно. Оказа-



лось, что если топологическая система  $A$  обладает главным элементом  $e$  и порождается элементами некоторой связной окрестности этого элемента  $e$ , то пространство системы  $A$  связно. Связная лупа порождается алгебраически элементами любой окрестности единицы. Все дискретные нормальные делители связной лупы лежат в ее центре.

Следующая теорема содержит условие открытости непрерывного гомоморфизма. Пусть  $G$  и  $G_1$  — локально компактные хаусдорфовы битернарные системы, удовлетворяющие второй аксиоме счетности. Тогда всякое непрерывное гомоморфное отображение системы  $G$  на систему  $G_1$  является открытым. При весьма общих условиях справедлива теорема о накрывающих гомоморфизмах: для каждой линейно связной локально линейно односвязной топологической системы  $A$  с выделенным главным элементом  $e$  существует односвязная гомоморфно накрывающая система  $\tilde{A}$  с выделенным главным элементом, переходящим в  $e$ . Односвязная накрывающая система определяется однозначно с точностью до топологического изоморфизма и принадлежит к тому же примитивному классу, что и заданная система. Мальцев изучил фундаментальную группу топологических систем и показал, что фундаментальная группа линейно связной топологической системы, имеющей бинарную операцию с нейтральным элементом, коммутативна. Отсюда следует, что фундаментальная группа линейно связных систем, принадлежащих к примитивным классам с перестановочными конгруэнтностями, коммутативна.

Выдающимся событием в советской топологической алгебре является создание А. И. Мальцевым теории свободных топологических алгебр, включающей в себя в качестве весьма частного случая теорию свободных топологических групп и, следовательно, широко и органически продолжающей исследования, начатые А. А. Марковым. Приведем в самом общем виде определения и некоторые результаты Мальцева, изложенные в его работе «Свободные топологические алгебры» (1927 г.).

Пусть задан примитивный класс алгебр, характеризуемый набором  $S$  равенств, и некоторое топологическое пространство  $X$  (все рассматриваемые пространства предполагаются хаусдорфовыми). Топологическая алгебра  $A$  класса  $S$  с заданным непрерывным отображением  $\varphi$  пространства  $X$  в алгебру  $A$  называется определяемой в классе  $S$  пространством  $X$  и некоторыми соотношениями  $R$

$$f_\lambda(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_{m_\lambda}}) = g_\lambda(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_{m_\lambda}}),$$

где  $x_{\lambda_i}$  — элементы из пространства  $X$ ,  $f_\lambda$  и  $g_\lambda$  — какие-либо многочлены, если

- 1) в алгебре  $A$  выполнены равенства

$$f_\lambda(x_{\lambda_1}^\varphi, \dots, x_{\lambda_{m_\lambda}}^\varphi) = g_\lambda(x_{\lambda_1}^\varphi, \dots, x_{\lambda_{m_\lambda}}^\varphi);$$

- 2) алгебра  $A$  топологически порождается образами элементов пространства  $X$ ;

- 3) для каждого непрерывного отображения  $\psi$  пространства  $X$  в произвольную топологическую алгебру  $C$  класса  $S$ , при котором вы-

выполняются соотношения

$$f_{\lambda}(x_{\lambda_1}^{\psi}, \dots, x_{\lambda_{m_{\lambda}}}^{\psi}) = g_{\lambda}(x_{\lambda_1}^{\psi}, \dots, x_{\lambda_{m_{\lambda}}}^{\psi}),$$

существует непрерывный гомоморфизм  $\omega$  алгебры  $A$  в алгебру  $C$ , такой, что  $x^{\psi} = x^{\omega}$  для всех  $x$  из пространства  $X$ . Для произвольного топологического пространства  $X$ , любого класса  $S$  и произвольной системы многочленов  $f_{\lambda}, g_{\lambda}$  алгебра  $A$  с тремя названными свойствами существует и определяется ими однозначно с точностью до топологического изоморфизма.

Топологическая алгебра  $A$  называется свободной топологической алгеброй над пространством  $X$  в примитивном классе  $S$ , если она определяется только пространством  $X$  при пустом множестве  $R$  определяющих равенств. В абстрактном случае значение свободных алгебр состоит в том, что всякая такая алгебра примитивного класса  $S$  с порождающим пространством  $X$  изоморфна фактор-алгебре соответствующей свободной алгебры. То же самое верно для свободных топологических групп. В общем случае произвольная топологическая алгебра класса  $S$  над пространством  $X$  является непрерывным гомоморфным образом свободной топологической алгебры класса  $S$  над пространством  $X$ . Для того чтобы она была фактор-алгеброй, необходимо, чтобы этот гомоморфизм был не только непрерывным, но и открытым. Оказывается, что существует широкая система классов  $S$ , для которых это условие выполняется.

Получены предложения, вскрывающие строение свободных топологических алгебр разных классов. В частности, явно дается конструкция свободных топологических алгебр с локально компактным порождающим пространством.

Одной из топологических алгебраических систем является топологический тернар, связанный с топологическими проективными плоскостями. Топологический тернар — это множество  $A = \{0, 1, \alpha\}$  элементов с выделенными элементами 0 и 1, на котором определена тернарная операция  $\alpha\beta + \gamma$ , непрерывная относительно совокупности компонент и обладающая следующими свойствами:

- 1)  $0\beta + \gamma = \beta 0 + \gamma = \gamma$ ;
- 2)  $1\beta + 0 = \beta 1 + 0 = \beta$ ;
- 3) уравнение  $\alpha\beta + \xi = \gamma$  однозначно разрешимо относительно  $\xi$ ;
- 4) уравнение  $\xi\beta_1 + \gamma_1 = \xi\beta_2 + \gamma_2$ ,  $\beta_1 \neq \beta_2$ , однозначно разрешимо относительно  $\xi$ ;
- 5) система уравнений  $\alpha_1\xi + \eta = \gamma_1$ ,  $\alpha_2\xi + \eta = \gamma_2$  однозначно определяет пару  $\xi, \eta$ , если  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ .

Элементы  $\xi$  и  $\eta$ , определяемые в третьем — пятом свойствах, непрерывно зависят от совокупности известных элементов.

Л. А. Скорняков в 1954 г. доказал следующую важную для геометрии теорему: топологическая проективная плоскость определяет топологический тернар; связный локально бикompактный топологический тернар однозначно определяет связную бикompактную топологическую проективную плоскость. Тем самым известное предложение

Холла о соответствии между тернарами и проективными плоскостями было перенесено на топологические плоскости.

В 1952 г. наконец увенчалась полным успехом атака пятой проблемы Гильберта, начатая еще Понтрягиным и Нейманом. Она была положительно решена в общем виде американскими математиками А. Глисоном, Д. Монтгомери и Л. Циппиным. В ходе ее решения, а также в результате дальнейших усовершенствований развитых ими методов получены глубокие факты о строении локально бикомпактных групп, особенно касающиеся их локальной структуры. Наиболее общим предложением такого рода, из которого, в частности, вытекает решение проблемы Гильберта, является следующая теорема: для любой локально бикомпактной группы  $G$  и любой окрестности  $U$  ее единицы найдется такая открытая окрестность  $V$  единицы, которая содержится в окрестности  $U$  и распадается в прямое произведение связной локальной группы Ли  $L$  и бикомпактной группы. Если группа  $G$  не является вполне несвязной, то окрестность  $U$  может быть выбрана так, что при любом разложении указанного вида локальная группа Ли  $L$  имеет положительную размерность.

В связи с этими результатами в топологической алгебре с новой силой встал вопрос об изучении строения локально бикомпактных групп в целом. Успешному продвижению исследований в этом направлении благоприятствовал целый ряд обстоятельств. Было накоплено много результатов по теории бесконечных дискретных групп, особенно по теории нильпотентных групп, разрешимых групп и различных их обобщений. Детально изучены локально нильпотентные группы и локально разрешимые группы при самых разнообразных дополнительных условиях, например при условии минимальности для подгрупп, конечности ранга. Усиленно изучались локально конечные, локально нормальные группы, группы с однозначной извлекаемостью корня и др. Естественно, что как сами результаты, так и методы этой ветви общей теории групп не могли не отразиться и на развитии теории топологических групп. Серьезное продвижение на этом пути было достигнуто В. М. Глушковым.

В. М. Глушков сначала занимался теорией дискретных обобщенных нильпотентных и обобщенных разрешимых групп и получил в этой области оригинальные результаты. Освоив топологические методы и стремясь перенести основные факты из теории дискретных локально нильпотентных групп и локально разрешимых групп на топологические группы, он построил в 1955—1956 гг. теорию локально бикомпактных локально нильпотентных групп в целом. Приведем некоторые определения и результаты Глушкова.

Элемент топологической группы  $G$  называется бикомпактным, если порожденная им циклическая подгруппа имеет бикомпактное замыкание. Группа  $G$  называется периодической, если все ее элементы бикомпактны. Если же в группе  $G$  нет бикомпактных элементов, отличных от единицы, то группа  $G$  называется чистой.

Если  $G$  — чистая локально бикомпактная локально нильпотентная группа,  $G_0$  — связная компонента ее единицы, то  $G_0$  — связная

односвязная нильпотентная группа Ли и содержится в некотором гиперцентре группы с некоторым натуральным номером. Фактор-группа  $G/G_0$  — дискретная локально нильпотентная группа. Если же  $G$  — периодическая локально бикомпактная локально нильпотентная группа, то связная компонента  $G_0$  ее единицы бикомпактна и содержится в центре группы  $G$ .

Если  $G$  — произвольная локально бикомпактная локально нильпотентная группа, то совокупность  $B$  ее бикомпактных элементов — периодическая часть группы — составляет замкнутую характеристическую подгруппу. Фактор-группа  $G/B$  — чистая локально нильпотентная группа Ли. Это есть обобщение известного предложения о периодической части дискретной локально нильпотентной группы.

Локально бикомпактная локально нильпотентная группа  $G$  тогда и только тогда является группой Ли, когда подгруппа ее бикомпактных элементов является группой Ли.

Справедлив аналог теоремы Мальцева о нильпотентности группы с конечным числом образующих: локально бикомпактная бикомпактно порождаемая группа, обладающая возрастающим центральным рядом, нильпотентна.

Продолжая работы Мальцева о соответствии между полными локально нильпотентными группами и рациональными алгебрами Ли, Глушков ввел (1955 г.) также понятие полноты группы над топологическим полем и использовал его для анализа строения новых классов локально нильпотентных групп.

Топологическая группа  $G$  называется полной над топологическим полем  $\Sigma$ , если любой элемент из группы  $G$  содержится хотя бы в одной подгруппе, являющейся непрерывным гомоморфным образом аддитивной группы поля  $\Sigma$ . В частности, полнота группы  $G$  над полем рациональных чисел означает полноту ее в обычном смысле, т. е. ее делимость.

Если топологическое поле простое, т. е. не содержит собственных замкнутых подполей, то соответствующие результаты Мальцева полностью переносятся на локально нильпотентные группы без кручения, полные над этим полем. Отсюда вытекают новые факты, например: связные, односвязные, нильпотентные группы Ли и только они являются локально бикомпактными локально нильпотентными вещественно полными группами без элементов конечного порядка; нильпотентные группы Ли конечного ранга над полем  $p$ -адических чисел и только они являются локально бикомпактными  $p$ -адически полными локально нильпотентными группами без элементов конечного порядка и со второй аксиомой счетности.

Пусть топологическая группа  $G$  обладает нормальным рядом конечной длины

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{i-1} \subset G_i \subset \dots \subset G_n = G,$$

состоящим из замкнутых подгрупп  $G_i$ . Если каждый его фактор  $G_i/G_{i-1}$  топологически изоморфен некоторой подгруппе аддитивной группы поля  $p$ -адических чисел, то этот ряд называется  $p$ -адическим. Глушков.

показал, что всякую нильпотентную бикомпактную группу  $G$ , обладающую конечным  $p$ -адическим рядом, можно вложить с сохранением топологии в качестве открытой подгруппы в нильпотентную группу Ли  $H$  конечного ранга над полем  $p$ -адических чисел. С точностью до топологического изоморфизма группа Ли  $H$  единственна. Поэтому становится особенно прозрачной аналогия между топологическими нильпотентными группами с конечными  $p$ -адическими рядами и дискретными нильпотентными группами без кручения конечного ранга. Более того, между ними существует определенная связь: любая дискретная нильпотентная группа без кручения и с конечным числом образующих имеет так называемое  $p$ -замыкание, являющееся топологической нильпотентной бикомпактной группой с конечным  $p$ -адическим рядом.

Топологическое и алгебраическое строение произвольных локально бикомпактных групп в целом составляло предмет многих исследований, появившихся в конце 50 — начале 60-х годов.

П. С. Александровым давно был поставлен вопрос об изучении диадических бикомпактов, т. е. таких пространств, которые являются непрерывными образами обобщенного канторова дисконтинуума. В частности, требовалось выяснить, является ли групповое пространство бикомпактной группы диадическим бикомпактом. Этот вопрос положительно решили, независимо друг от друга, Л. Н. Ивановский (1958 г.) и В. И. Кузьминов (1959 г.). Кузьминову принадлежит следующая теорема: пространство бесконечной вполне несвязной бикомпактной группы гомеоморфно обобщенному канторовому дисконтинууму  $D^{\mathbb{C}}$ . Отсюда вытекает, что пространство вполне несвязной локально компактной группы гомеоморфно прямому произведению дискретного пространства и пространства  $D^{\mathbb{C}}$ . Топологическое строение нульмерных фактор-пространств локально бикомпактной группы такое же. Фактор-пространство произвольной локально бикомпактной группы является замкнутым образом прямого произведения дискретного пространства и пространства  $D^{\mathbb{C}}$ . Последний факт установил в 1963 г. Е. Г. Склиаренко. Он же показал (1961 г.), что если фактор-пространство локально бикомпактной группы  $G$  бесконечномерно, то оно содержит гильбертово параллелепипед.

От П. С. Александрова ведет начало и другой вопрос о совпадении размерностей для пространства топологической группы, определенных различными способами.

Для топологического пространства  $R$  наиболее известными являются три определения размерности: размерность по покрытиям  $\dim R$ , малая индуктивная размерность  $\text{ind } R$  и большая индуктивная размерность  $\text{Ind } R$ . Вообще говоря, эти три размерности не совпадают. Если же  $R$  — фактор-пространство локально бикомпактной группы  $G$  по ее замкнутой подгруппе, то, как установил Б. А. Пасынков, все три размерности совпадают:

$$\dim R = \text{ind } R = \text{Ind } R.$$

Алгебраическое строение связных локально бикомпактных групп изучал В. М. Глушков (1959 г.). Используя их связь с алгебрами Ли,

он доказал, что любая локально компактная связная группа изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе топологического прямого произведения некоторого множества связных некоммутативных простых компактных групп Ли, некоторого множества соленоидов, некоторой связной односвязной группы Ли и, наконец, аддитивных групп целых  $p$ -адических чисел, взятых в конечном числе экземпляров для каждого простого числа  $p$ .

Если ограничиться связными локально связными локально бикompактными группами, то эта теорема допускает дальнейшее уточнение: всякая связная локально связная локально компактная группа  $G$  изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе  $Z$  группы  $H$ , разлагающейся в топологическое прямое произведение связной односвязной группы Ли, некоторого множества связных односвязных некоммутативных компактных простых групп Ли и некоторого множества одномерных векторных групп. Во всякой локально связной локально бикompактной группе есть окрестность единицы, каждый элемент которой содержится в однопараметрической подгруппе. Отсюда получается, что связная локально бикompактная группа тогда и только тогда линейно связна, когда она локально связна. В центре любой связной локально бикompактной группы есть хотя бы одна вполне несвязная бикompактная подгруппа, фактор-группа по которой линейно связна.

А. А. Меленцов изучал разрезы в связных топологических группах. Это подгруппы, дополнения которых несвязны. Он показал, что если связная группа обладает связным разрезом, то этот разрез содержит все элементы конечного порядка из группы.

Пусть  $A$  — топологическая алгебраическая система и  $\Delta$  — некоторое свойство ее подсистем (замкнутость, коммутативность, инвариантность, замкнутость и коммутативность и т. д.; смысл каждого из этих свойств, за исключением замкнутости, определяется конкретным заданием системы  $A$ ). Будем говорить, что топологическая система  $A$  удовлетворяет условию минимальности для  $\Delta$ -подсистем, если любая убывающая цепочка

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_s \supset \dots$$

ее подсистем, обладающих свойством  $\Delta$ , обрывается на подсистеме с конечным номером. Например, можно сказать, что топологическое кольцо  $A$  удовлетворяет условию минимальности для замкнутых идеалов, что группа  $G$  удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп и т. д. Совершенно аналогично выглядит условие максимальной для  $\Delta$ -подсистем системы  $A$ : при этом обрывается на конечном номере любая возрастающая последовательность

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_s \subset \dots$$

ее  $\Delta$ -подсистем.

Начало изучению топологических алгебраических систем с условием минимальности, а также с условием максимальной положено в работах В. М. Глушкова (1956 г.). Он рассматривал топологические группы с такого рода условиями и установил следующие факты.

Всякая локально бикompактная группа с условием минимальности для замкнутых подгрупп является расширением связной компактной группы Ли посредством дискретной группы, удовлетворяющей условию минимальности для подгрупп. Обратно: всякая группа такого строения локально бикompактна и удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп. Отсюда получается обобщение известной теоремы Черникова о локально разрешимых группах с условием минимальности для подгрупп, доказанной им для дискретного случая. Локально разрешимая локально бикompактная группа  $G$  с условием минимальности для замкнутых подгрупп обладает замкнутой абелевой подгруппой  $H$  конечного индекса, разложимой в топологическое прямое произведение

$$H = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_l \times C_1 \times C_2 \times \dots \times C_m,$$

где  $B_j$  — дискретная группа типа  $p_j^\infty$ ;  $p_j$  — простое число ( $j = 1, 2, \dots, l$ );  $C_k$  — одномерная торовидная группа ( $k = 1, 2, \dots, m$ );  $l$  и  $m$  — натуральные числа.

Топологическая группа  $G$  тогда и только тогда является разрешимой локально бикompактной группой с условием максимальнойности для замкнутых подгрупп, когда она обладает конечным нормальным рядом

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G,$$

все факторы которого топологически изоморфны аддитивным группам целых  $p$ -адических чисел ( $p = 2, 3, 5, \dots$ ) или дискретным циклическим группам, причем  $p$ -адические факторы предшествуют всем бесконечным циклическим факторам.

Любая нильпотентная локально бикompактная группа  $G$  с условием максимальнойности для замкнутых инвариантных подгрупп обладает конечным центральным рядом

$$1 = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_k = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_l = \\ = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_m = G,$$

где фактор-группы  $A_i/A_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) — конечные циклические,  $B_j/B_{j-1}$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) изоморфны аддитивным группам целых  $p$ -адических чисел по некоторым (не обязательно различным) простым числам  $p$ , а  $C_s/C_{s-1}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) — бесконечные дискретные циклические группы.

Топологические кольца с условием минимальности для замкнутых подгрупп аддитивной группы, а также с условием минимальности для замкнутых идеалов изучаются в работе Л. М. Махарадзе «Топологические нильпотентные кольца с условием минимальности» (1957 г.), выполненной под руководством А. Г. Куроша. Под условием минимальности Махарадзе понимает условие, в котором топология кольца играет существенную роль: топологическое кольцо  $A$  называется удовлетворяющим условию минимальности для идеалов (подгрупп), если любая убывающая их цепь  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_s \supset \dots$  обрывается по модулю любой окрестности нуля, т. е. для произвольной окрестности  $U$  нуля найдется такое натуральное число  $s$ , что  $A_s \subset U$ . Оказывается, что если система окрестностей нуля нильпотентного кольца  $A$  состоит из

подгрупп аддитивной группы, то из условия минимальности для двусторонних замкнутых идеалов кольца  $A$  следует условие минимальности для замкнутых подгрупп его аддитивной группы.

Исследования В. М. Глушкова продолжил В. С. Чарин. Им показано (1960—1964 гг.), что если  $G$  — локально бикомпактная локально разрешимая группа, то в этом случае условие минимальности для замкнутых подгрупп эквивалентно условию минимальности для замкнутых коммутативных подгрупп. Тем самым теорема Черникова об эквивалентности аналогичных условий для дискретной локально разрешимой группы оказалась перенесенной на топологические группы. Некоторое продвижение достигнуто и в случае групп с условием минимальности для замкнутых инвариантных подгрупп: локально бикомпактные группы с условием минимальности для замкнутых инвариантных подгрупп, обладающие возрастающим центральным рядом, удовлетворяют условию минимальности для замкнутых подгрупп.



В. С. Чарин.

В теории дискретных групп рассматривались классы групп, в которых условие максимальности для замкнутых подгрупп эквивалентно условию максимальности для замкнутых абелевых подгрупп. Например, разрешимые группы и локально нильпотентные группы (А. И. Мальцев). Однако эти предложения не переносятся на соответствующие классы локально бикомпактных групп в общем случае. Справедливы следующие предложения, установленные Чариным.

1. Пусть  $G$  — локально бикомпактная периодическая разрешимая группа. Тогда условие максимальности для ее замкнутых абелевых подгрупп равносильно условию максимальности для ее замкнутых подгрупп.

2. Пусть  $G$  — локально бикомпактная локально нильпотентная группа, удовлетворяющая условию максимальности для замкнутых абелевых подгрупп. Тогда в ней найдется бикомпактная нильпотентная подгруппа  $H$ , удовлетворяющая условию максимальности для замкнутых подгрупп, фактор-группа  $G/H$  по которой дискретна, локально нильпотентна и без элементов конечного порядка. В частности, если группа  $G$  периодическая, то  $G = H$  и, следовательно, группа  $G$  удовлетворяет условию максимальности для замкнутых подгрупп.

3. Пусть  $G$  — локально бикомпактная локально нильпотентная группа,  $G_0$  — связная компонента ее единицы,  $B$  — периодическая часть группы  $G$  и  $N = G_0 B$  (по теореме Глушкова,  $N$  — открытая подгруппа в группе  $G$ ). Чтобы группа  $G$  удовлетворяла условию максимальности для замкнутых подгрупп, необходимо и достаточно, чтобы



подгруппа  $N$  и фактор-группа  $G/N$  удовлетворяли условию максимальности для замкнутых абелевых подгрупп.

В течение нескольких последних лет В. И. Ушаков успешно изучал топологические группы, являющиеся аналогами дискретных групп с конечными классами сопряженных элементов (так называемых  $FC$ -групп). Приведем соответствующие определения.

Пусть  $G$  — топологическая группа и  $g$  — ее элемент. Элемент  $g$  называется  $FC$ -элементом в группе  $G$ , если класс элементов  $S_g$ , сопряженных с элементом  $g$ , бикомпактен. Группа  $G$  называется  $FC$ -группой, если любой ее элемент является  $FC$ -элементом. Элемент  $g$  из группы  $G$  называется  $\overline{FC}$ -элементом, если замыкание  $\overline{S_g}$  класса  $S_g$  бикомпактно. Группа  $G$  есть  $\overline{FC}$ -группа, если любой ее элемент является  $\overline{FC}$ -элементом.

Строение локально бикомпактных  $\overline{FC}$ -групп определяется такой теоремой Ушакова: если  $C$  — локально бикомпактная  $\overline{FC}$ -группа, то множество  $B$  всех ее бикомпактных элементов (периодическая часть групп) образует замкнутую инвариантную подгруппу, фактор-группа  $G/B$  по которой есть чистая абелева группа. В случае, когда группа  $G$  дискретна, из этого предложения сразу следует известный результат Неймана об  $FC$ -группах.

Для топологических групп справедлив аналог леммы Дидмана: если  $G$  — локально бикомпактная группа,  $M$  — бикомпактное инвариантное ее подмножество, состоящее из бикомпактных элементов, то подгруппа  $\{M\}$ , топологически порожденная этим множеством, является бикомпактной инвариантной подгруппой. Из этой теоремы следует, что локально бикомпактная группа тогда и только тогда будет периодической  $\overline{FC}$ -группой, когда она локально нормальна. Поэтому в силу приведенной выше структурной теоремы замыкание коммутанта произвольной локально бикомпактной  $\overline{FC}$ -группы является локально нормальной группой. Под локально нормальной группой понимается такая топологическая группа, каждый элемент которой содержится в бикомпактной инвариантной подгруппе. Локально бикомпактная группа  $G$  тогда и только тогда будет бикомпактно порождаемой  $\overline{FC}$ -группой, когда она является расширением бикомпактной группы с помощью прямого произведения векторной группы и дискретной абелевой группы без кручения с конечным числом образующих.

Локально нильпотентные дискретные группы близки к группам, удовлетворяющим нормализаторному условию. В связи с этим естественный интерес представляют топологические группы, удовлетворяющие нормализаторному условию для замкнутых подгрупп ( $N$ -группы). Первые результаты в этом направлении принадлежат также Ушакову. Он показал, что в отличие от групп дискретных топологические  $N$ -группы могут и не быть локально нильпотентными. Всякая связная локально бикомпактная группа является  $N$ -группой тогда и только тогда, когда она нильпотентна.

Некоторые результаты о топологических  $N$ -группах опубликовал в 1964 г. В. П. Платонов. Он построил пример компактной  $N$ -группы

Ли с ненильпотентными конечными подгруппами. Значит, не всякая замкнутая подгруппа топологической  $N$ -группы является  $N$ -группой, однако таковой будет всякая замкнутая инвариантная подгруппа, а также всякая открытая подгруппа  $N$ -группы. Платонов получил и более глубокие результаты:  $N$ -группа Ли тогда и только тогда локально нильпотентна, когда каждая ее дискретная подгруппа локально нильпотентна;  $N$ -группа Ли тогда и только тогда является  $N$ -группой в абстрактном смысле, когда она локально нильпотентна.

Ушаков и Платонов перенесли основные результаты Глушкова о локально бикompактных локально нильпотентных группах на более широкий класс групп — локально бикompактные локально проективно нильпотентные группы.

К топологической алгебре примыкают многие разделы математики, здесь не названные или отраженные далеко не полностью. Особенно тесно связана с ней теория групп Ли, которая по сути в настоящее время представляет собой вполне самостоятельную область и упоминается здесь лишь эпизодически. Не названы, например, весьма интересные работы Е. Б. Дынкина о нормированных алгебрах Ли и аналитических группах, о топологии компактных групп Ли, важные исследования Ф. Р. Гантмахера, А. И. Мальцева, В. В. Морозова по группам и алгебрам Ли, некоторые исследования по топологическим кольцам, топологическим полугруппам и другим тополого-алгебраическим образованиям.

Наш обзор показывает, что развитие топологической алгебры представляет собой единый поток со своими особыми чертами и оттенками. Главной его особенностью является прежде всего четкая преемственность основных идей, выделяющихся на фоне многообразия важных для него фактов, хотя и подчас несколько отдаленных. Оно усиливается и расширяется только благодаря глубоким связям со смежными разделами математики.

## **Некоторые другие разделы общей алгебры**

Как известно из предыдущих разделов, особенно интенсивно развивались в нашей стране исследования по теории групп, теории колец, теории полугрупп и топологической алгебре. Однако одновременно успешно разрабатывались и другие разделы общей алгебры. Рассмотрим некоторые из этих разделов.

*Структуры.* Интерес к теории структур возник у советских алгебраистов в 30-х годах, на заре развития этой теории как самостоятельной ветви общей алгебры. Совокупности подгрупп группы (или подколец кольца), нормальных делителей группы (или идеалов кольца) — это естественные примеры структур и, соответственно, дедекиндовых (модулярных) структур. По этой причине значительная часть исследований советских алгебраистов по теории структур посвящена анализу теоретико-структурных основ некоторых теорем теории групп и теории

колец. Первой в этом направлении в Советском Союзе является работа А. Г. Куроша (1935 г.). В ней известная теорема Э. Нетер о разложениях идеала в пересечение неразложимых идеалов перенесена в теорию дедекиндовых структур. Этот результат в следующем году независимо от Куроша был получен также Орэ, а позднее под названием теоремы Куроша — Орэ неоднократно передоказывался, обобщался и вошел во все книги по теории структур.

Вопрос об изоморфизмах прямых разложений групп входил после классической теоремы Шмидта в круг основных интересов советских исследователей, занимающихся теорией групп. Понятие прямого разложения группы формулируется на языке структуры нормальных делителей, и поэтому можно было ожидать, что теория дедекиндовых структур окажется естественной областью дальнейшего развития исследований, относящихся к этому вопросу. Теорема Шмидта была перенесена в теорию дедекиндовых структур в работе Орэ 1936 г. В 1943, 1946 гг. Курош ввел понятия вполне дедекиндовой полной структуры и центра пары прямых разложений единицы такой структуры, а также получил результаты, следствиями которых явились многие весьма общие теоремы о существовании изоморфных продолжений для прямых разложений групп и колец. Эти результаты развили М. И. Граев (1947 г.; он ввел понятие коммутанта пары прямых разложений) и Бэр (1947 и 1948 гг.). Введенное Бэром понятие гипотезы расщепления использовали для дальнейшего развития теории изоморфизмов прямых разложений (в рамках теории вполне дедекиндовых или лишь дедекиндовых структур) А. Х. Лившиц (1951 г.) и Е. Н. Мочульский (1955, 1961, 1962 гг.).

Несколько исследований посвящено теоретико-структурному анализу теоремы Жордана — Гельдера — Шрейера. Особо выделяется среди них работа А. И. Узкова (1938 г.), вызвавшая ряд откликов. В работе П. Г. Конторовича и Б. И. Плоткина (1954 г.) из теории групп в теорию полных структур переносятся понятия покрытия и расщепления; следствиями результатов этой работы явились некоторые теоремы о локально нильпотентных группах без кручения.

Исследования советских математиков по вопросам теории структур, не связанным с какими-либо теоремами теории групп или теории колец, носят в общем довольно разрозненный характер. В. И. Гливенко изучал (1936, 1937 гг.) нормированные (метрические) структуры и доказал, в частности, их дедекиндовость; результаты этих работ развивали советские и зарубежные ученые. Ю. И. Соркин (1951, 1952, 1954 гг.) анализировал аксиомы, составляющие определение структуры, изучал свободные объединения структур (в частности, цепей) и доказал, что всякий структуроид (т. е. частичная структура) вкладывается в структуру. Свободные дистрибутивные структуры, а также конгруэнции в дистрибутивных структурах с нулем и их связи с идеалами этих структур изучал Г. Я. Арешкин (1953, 1958 гг.), описание структур конгруэнций дистрибутивных структур дала Л. Н. Каролинская (1964 г.). Рассматриваются также представления полных структур множествами и топологии в структурах. Так, в работе М. Л. Бер-

линкова (1961 г.) рассматривается сходимость и компактность в  $\sigma$ -структурах. Монография Л. А. Скорнякова (1961 г.) посвящена изложению связей теории декиндовых структур с дополнениями и теории модулей над регулярными кольцами, т. е. развитию теории непрерывномерных проективных геометрий.

*Проективные плоскости.* Основополагающей в этом направлении является работа М. Холла (1943 г.). Л. И. Головина (Копейкина, 1945 г.) построила теорию свободных плоскостей и свободных объединений плоскостей, в некотором смысле параллельную теории свободных групп и свободных произведений групп. В работах Л. А. Скорнякова (в частности, 1949 г.) изучаются веблен-веддербарновы и альтернативные плоскости, т. е. плоскости, в которых аффинно или проективно выполняется малая теорема Дезарга, и описываются алгебраические образования («натуральные тела»), используемые для координатизации указанных плоскостей. Б. И. Аргунов исследует (1950 г.) связи между конфигурационными постулатами, выполняющимися в плоскости, и свойствами соответствующего натурального тела.

Обзор Л. А. Скорнякова (1951 г.) явился первым в мировой литературе подведением итогов этого «алгебраического» этапа в развитии теории проективных плоскостей. В целом советские исследования по теории проективных плоскостей относятся преимущественно к середине 40 — середине 50-х годов.

*Упорядоченные алгебраические образования.* Теория упорядоченных и частично упорядоченных групп, колец и других алгебраических образований занимает в общей алгебре положение, сравнимое с положением топологической алгебры. Ее истоки можно найти в старых работах по аксиоматике геометрии, а началом явились исследования Л. В. Канторовича (1937 г.) о структурно упорядоченных векторных пространствах. Эти исследования, по существу относящиеся к функциональному анализу, были развиты также в работах других ученых, в частности А. Г. Пинскера (1949 г.), систематизированы в монографии Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера (1950 г.) и продолжают в настоящее время. Работа А. И. Векслера (1962 г.) посвящена условиям архимедовости фактор-группы структурно упорядоченной абелевой группы.

Общая теория структурно упорядоченных групп ведет свое начало от исследования Биркгофа (1942 г.), а еще более общий случай любых частично упорядоченных и, в частности, направленных групп рассмотрен Е. П. Шимбиревой (1947 г.). В работе Шимбиревой,



Н. Я. Виленкин.

вызвавшей многочисленные отклики, намечены некоторые из направлений дальнейших исследований.

А. И. Мальцевым найдены (1949 г.) необходимые и достаточные условия для линейной упорядочиваемости группы; независимо от него аналогичные условия нашли Ригер и Ивасава. А. А. Виноградов доказал (1949 г.) линейную упорядочиваемость свободного произведения линейно упорядоченных групп.

От работы Е. П. Шимбиревой (1947 г.) и работы А. И. Мальцева (1951 г.) ведет начало вопрос об условиях доупорядочиваемости группы, т. е. об условиях для того, чтобы всякий порядок группы продолжался до линейного. Оказалось, что не всякая упорядоченная группа является доупорядочиваемой. В работе М. И. Каргаполова, А. И. Кокорина и В. М. Копытова (1965 г.) показано, в частности, что всякая некоммутативная свободная группа является недоупорядочиваемой. А. А. Терехов (1962 г.), М. И. Каргаполов (1962 г.), А. И. Кокорин и В. М. Копытов (1962 г.) описали группы, в которых любой линейный (или даже лишь частичный) порядок любой подгруппы продолжается до линейного порядка самой группы.

Из других исследований, относящихся к группам, назовем работу М. И. Зайцевой о правоупорядоченных группах (1958 г.), работу К. М. Кутыева, в которой доказано, что всякая линейно упорядочиваемая группа определяется структурой своих подполугрупп (1963 г.), и работу В. И. Френкеля, посвященную некоторым алгоритмическим вопросам теории частично упорядоченных групп (1964 г.).

Первой из работ советских алгебраистов по упорядоченным кольцам следует назвать работу А. И. Мальцева, в которой доказано, что групповая алгебра линейно упорядоченной группы над линейно упорядоченным телом может быть вложена в линейно упорядоченное тело (1948 г.). Независимо от Мальцева эту теорему доказал (1949 г.) Б. Нейман. В. Д. Поддерюгин нашел (1954 г.) необходимые и достаточные условия для линейной упорядочиваемости произвольного (неассоциативного) кольца. Я. В. Хион (1954 г.) и независимо от него Таллини (1955 г.) дали полное описание архимедовски упорядоченных колец, аналогичное классической теореме Гельдера об архимедовски упорядоченных группах. А. И. Черемисин построил (1965 г.) теорию тех ассоциативных колец, в которых любой линейный порядок любого подкольца может быть продолжен до линейного порядка самого кольца.

Несколько работ советских алгебраистов посвящено упорядоченным мультиоператорным группам. Д. М. Смирнов обобщил (1965 г.) некоторые результаты об условиях упорядочиваемости групп и колец на случай мультиоператорных групп.

По теории упорядоченных полугрупп в нашей стране первыми были работа Е. Г. Шульгейфера (1950 г.), в которой мультипликативная теория двусторонних идеалов некоммутативных колец переносится на случай структурно упорядоченных полугрупп, и работа Н. Г. Алимова (1950 г.), посвященная изучению связей между архимедовостью линейно упорядоченной полугруппы и отсутствием в ней аномальных пар элементов. Я. В. Хион изучил (1957 г.) линейно упорядоченные полу-

группы в связи с архимедовскими классами этих полугрупп. С другой стороны, В. В. Вагнер исследовал (1956 г.) представления частично упорядоченных полугрупп частичными преобразованиями (т. е. бинарными отношениями) множеств (дальнейшее развитие идей этой его работы рассмотрено в разделе «Теория полугрупп»).

В 1960 г. И. В. Стеллецкий показал, что некоторые результаты теории нильпотентных групп и параллельные им результаты теории нильпотентных ассоциативных и лиевых колец могут быть объединены в рамках теории структурно упорядоченных группоидов. Аналогичные рассуждения, ведущие начало от теории разрешимых групп, проведены Я. Б. Ливчаком (1961 г.).

*Квазигруппы.* Исследования по теории квазигрупп (т. е. неассоциативных групп) и луп (т. е. квазигрупп с единицей) были начаты как известно, А. К. Сушкевичем (1929 г.). В настоящее время эта теория является большой самостоятельной ветвью общей алгебры. До середины 50-х годов она не привлекала в нашей стране, однако, новых исследователей.

Работой В. Д. Белоусова (1955 г.) было положено начало большой серии его исследований о системах квазигрупп (или луп), определенных на одном множестве и подчиненных некоторым обобщенным тождествам. Из них можно назвать, в частности, работы об ассоциативных в целом системах квазигрупп (1958, 1961 гг.). Обзор развития этого направления дан в статье Белоусова, опубликованной в 1965 г.

*Универсальные алгебры.* Развитие теории универсальных алгебр в СССР относится, в основном, к последнему десятилетию. Началом этого направления явилась работа А. И. Мальцева, посвященная изучению связей между такими свойствами всех алгебр некоторого многообразия (примитивного класса), как перестановочность конгруэнций, их правильность, а также транзитивность групп трансляций (1954 г.). Из других исследований Мальцева, относящихся к этому направлению и вызвавших многочисленные отклики, назовем работу о квазипримитивных классах алгебр, т. е. классах, определяемых системами условных тождеств (1956 г.), очень глубокое исследование о свободных топологических алгебрах (1957 г.), работу о финитной аппроксимируемости и финитной отделимости алгебр (1958 г.).

Квазипримитивные и некоторые другие аксиоматизируемые классы алгебр рассматривал также С. Р. Коголовский (1959, 1963 гг.). А. А. Терехов изучал (1958 г.) квазипримитивные классы, в которых совпадают прямые и свободные объединения. Характеризации много-



В. Д. Белоусов.

образий алгебр, эквивалентных классу всех правых унитарных модулей над некоторым ассоциативным кольцом с единицей, посвящены работы Б. Чакая (Венгрия) 1962 и 1963 гг., выполненные им во время пребывания в аспирантуре в Москве.

Из многочисленных других работ, относящихся к теории универсальных алгебр, назовем лишь работу Т. М. Баранович о существовании хорошей теории свободных разложений в многообразии алгебр, полученном объединением систем операций и систем тождеств двух многообразий с хорошими теориями свободных разложений (1965 г.), и выполненную в 1965 г. во время пребывания в аспирантуре в Москве работу А. А. Искандера (ОАР), которая содержит описание структур соответствий универсальных алгебр.

Теория мультиоператорных групп, ведущая свое начало от работы Хиггинса (1956 г.), является обобщением теории операторных групп, но может считаться частью теории универсальных алгебр: на одном множестве задаются аддитивно записанная группа и произвольная универсальная алгебра, для которой нуль группы служит подалгеброй. А. Г. Курош построил (1960 г.) теорию свободных разложений мультиоператорных групп (ее обобщением явилась указанная выше работа Т. М. Баранович), а также ввел (1960 г.) мультиоператорные линейные алгебры над полем и построил для них теорию свободных разложений, обобщающую теорию свободных разложений неассоциативных линейных алгебр. Работа М. А. Тайцлина (1962 г.) посвящена финитной аппроксимируемости свободных мультиоператорных групп и свободных сумм мультиоператорных групп.

Двойственным с понятием мультиоператорной группы является понятие  $\Omega$ -кольцоида: это универсальная алгебра с системой «аддитивных» операций  $\Omega$  и в то же время полугруппа относительно бинарного умножения, связанного с аддитивными операциями односторонним законом дистрибутивности. Теория  $\Omega$ -кольцоидов естественным образом объединяет параллельные результаты теории ассоциативных колец и теории полугрупп. Я. В. Хион рассмотрел представления  $\Omega$ -кольцоидов и изучил инверсные  $\Omega$ -кольцоиды (1965 г.).

*Категории.* Понятие категории, введенное Эйленбергом и Маклейном в 1945 г. (оно возникло как результат аксиоматизации свойств умножения гомоморфизмов), играет в общей алгебре роль, аналогичную роли понятия структуры. Первыми исследованиями по теории категорий в нашей стране были работа А. И. Мальцева, в которой введено понятие  $R$ -полной подкатегории конкретной категории (1958 г.), и работа А. Г. Куроша, в которой введено понятие категории с частичным суммированием морфизмов и начато построение в этих категориях теории прямых разложений (1959 г.). Это построение продолжил А. Х. Лившиц (1960 г.). Оказалось, что понятие категории с частичным суммированием морфизмов в такой же мере пригодно для перенесения рассмотрений об изоморфизмах прямых разложений из теории групп, как и понятие дедекиндовой структуры. Объединение этих двух направлений, на языке ортогональных систем идемпотентов в полугруппах, было достигнуто также Лившицем (1962 г.).

Советские алгебраисты занимались перенесением в теорию категорий и некоторых других алгебраических теорий: теории радикалов в кольцах (Е. Г. Шульгейфер, 1960 г.) и группах (А. Х. Лившиц, 1964 г.), теории правильных произведений и оказавшейся ей двойственной в теоретико-категорном смысле теории специальных подпрямых произведений (М. С. Цаленко, 1962 г.), теории расширений модулей (Х. Н. Инасаридзе, 1963 г.), теории многообразий групп (А. Х. Лившиц, М. С. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер, 1964 г.).

Одновременно, в связи с обзорной статьей А. Г. Куроша, А. Х. Лившица и Е. Г. Шульгейфера (1960 г.), велись исследования по основам теории категорий. Это, в частности, работы Шульгейфера об идеалах объекта категории (1961, 1963 гг.) и работа М. С. Цаленко (1963 г.), в которой показано, что всякую категорию можно вложить в категорию, обладающую свободными (или прямыми) объединениями для любого семейства объектов.



Развитие геометрии в Советском Союзе за полвека характеризуется возникновением ряда крупных геометрических школ, объединяющих большие коллективы исследователей. Интенсивно развивалась школа классической дифференциальной геометрии в Москве, возглавлявшаяся С. П. Финиковым. Наряду с дифференциальной геометрией метрического пространства основным предметом исследований школы являлись проективно-дифференциальная, аффинная, конформная геометрия, иначе говоря, геометрия однородных пространств, т. е. пространств, обладающих фундаментальной группой. Для этой школы характерно широкое применение метода внешних форм в сочетании с методом подвижного репера, а также его дальнейшее развитие — теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований Г. Ф. Лаптева. В Харькове геометрическую теорию дифференциальных уравнений (теорию коннексов, геометрию пфаффовых и монжевых уравнений) разрабатывал Д. М. Синцов со своими учениками.

Риманову геометрию и ее обобщения развивали методами тензорного анализа П. А. Широков в Казани и В. Ф. Каган со своими учениками и сотрудниками в Москве. В настоящее время это направление представлено школой П. К. Рашевского в Москве, А. П. Нордена в Казани и В. В. Вагнера в Саратове.

Геометрия «в целом» интенсивно развивается в школе А. Д. Александрова в Ленинграде, Н. В. Ефимова в Москве и А. В. Погорелова в Харькове. В этой геометрии основные результаты за последние десятилетия получены именно советскими геометрами, путем сочетания чисто геометрических методов и методов теории функций, дифференциальных уравнений и топологии. Исследования по геометрии «в целом» проводятся в настоящее время и в Новосибирске. Вопросами линейчатой геометрии в направлении школы Финикова занимаются также коллективы геометров Томска и Киева. Успешно развиваются исследования по дифференциальной геометрии в прибалтийских республиках, а также в республиках Закавказья.

В Советском Союзе выходят периодические издания по геометрии. Издаются (с 1930 г.) «Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике», геометрические сборники в Томске, Харькове, Казани.



С. П. Фиников.

В 1934 г. в Москве состоялась Первая международная конференция по тензорной дифференциальной геометрии и ее приложениям. Проводятся всесоюзные геометрические конференции. Первая конференция геометров состоялась в Киеве в 1962 г., вторая — в Харькове в 1964 г., третья — в Казани в 1967 г. В работе каждой из этих конференций участвовало свыше 350 делегатов из разных городов страны. Созываются конференции по дифференциальной геометрии в Прибалтике. Первая Прибалтийская конференция состоялась в Вильнюсе в 1963 г., вторая — в Тарту в 1965 г. При Институте информации АН СССР успешно работает всесоюзный геометрический семинар, который издает свои труды.

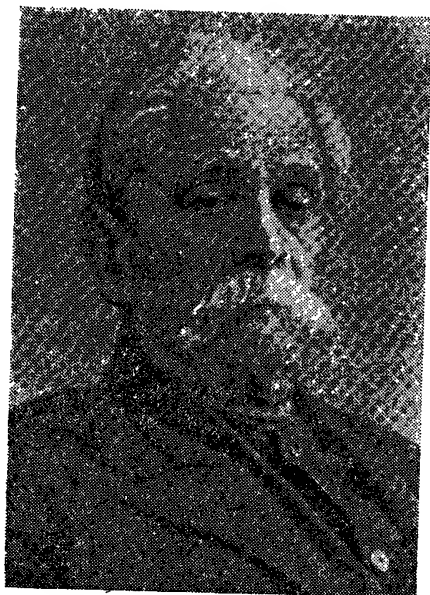
### **Классическая дифференциальная геометрия**

В послеоктябрьский период больших успехов достигла школа классической дифференциальной геометрии в Москве. Наиболее выдающимся ее представителем является С. П. Фиников.

Первый цикл работ Финикова относится к теории изгибаний на главном основании<sup>1</sup>. В магистерской диссертации он впервые получил систему дифференциальных уравнений, определяющих все главные основания данной поверхности (если такие существуют), и применил их к отысканию всех главных оснований на поверхностях второго порядка, а также к отысканию поверхностей, несущих наибольшее — двупараметрическое — множество главных оснований. Такой поверхностью (кроме тривиального случая шара) оказался геликоид.

Другой вывод уравнений всех главных оснований линейного элемента дал в магистерской диссертации С. С. Бюшгенс. Ему удалось доказать существование главных оснований для линейного элемента поверхности вращения и разделить их на классы. Анализ условий сов-

<sup>1</sup> Это понятие введено К. М. Петерсоном. При изометрическом соответствии двух поверхностей существует общая сопряженная сеть (основание изгибания). Если три изометрические поверхности имеют общую сопряженную сеть, то существует однопараметрическое множество таких поверхностей. Их общая сопряженная сеть называется главным основанием изгибания.



Б. Я. Букреев.

местности системы дифференциальных уравнений, определяющих главные основания изгибаний, привел затем Н. Н. Лузина к выводу, что свойство изгибаться на главном основании присуще лишь узкому классу поверхностей. В линейном элементе можно произвольно задать два коэффициента и с большим произволом подобрать третий так, чтобы линейный элемент не допускал изгибаний на главном основании. Вместе с тем изучение этого специального класса изгибаний представляет большой интерес, ввиду многочисленных связей с другими геометрическими теориями.

Качением поверхности по ее изгибанию называется такое ее движение с двумя степенями свободы, при котором приходят в совпадение соответствующие по изометрии точки. Если при таком каче-

нии точка  $M$  переместится в направлении  $du, dv$ , мгновенная ось вращения будет расположена в общей касательной плоскости в направлении  $\delta u, \delta v$ . Такие два направления связаны взаимной проективной зависимостью и называются кинематически сопряженными направлениями, а огибаемые ими сети — кинематически сопряженными сетями. Фиников исследовал изгибание поверхности с сохранением кинематически сопряженной сети — изгибание на кинематически сопряженном основании. Вся эта теория, по состоянию на 1937 г., до работ Лузина, получила исчерпывающее освещение в монографии Финикова «Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи» (1937 г.).

Теории неголономных поверхностей посвятил большую серию исследований Д. М. Синцов, работавший с 1903 по 1946 г. в Харьковском университете. Фундаментальные исследования по теории коннексов, выполненные в основном еще в дооктябрьский период, привели его, начиная с 1926 г., к разработке дифференциальной геометрии пфаффовых и монжевых многообразий.

Уравнение Пфаффа

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

в случае, когда выполнено условие интегрируемости  $G = 0$ , определяет однопараметрическое семейство поверхностей. Если  $G \neq 0$ , интегральные кривые, проходящие через произвольную точку пространства, касаются в ней плоскости

$$P(X - x) + Q(Y - y) + R(Z - z) = 0.$$

Интегральные кривые, для которых эти плоскости служат соприкасающимися, играют роль асимптотических линий. Нормальная кривизна определяется по формуле

$$K_n = \cos \varphi K_\varphi = -\frac{SdPdx}{ds^2 SP^2},$$

являющейся обобщением теоремы Менье. Отрезки  $l = \sqrt{\left|\frac{1}{K_n}\right|}$ , отложенные на касательных к интегральным кривым, проходящим через точку пространства, определяют аналог индикатрисы Дюпена. Это дает основание для классификации точек пространства на эллиптические, гиперболические и параболические. Естественно обобщается понятие сопряженных касательных. Но соответствие сопряженных направлений, хотя и проективное, оказывается не инволюционным. Экстремальные кривизны определяются из квадратного уравнения, позволяющего ввести среднюю кривизну  $H$  и полную кривизну  $K$ . Интегральные кривые, огибающие направления главных кривизн, составляют линии кривизны первого рода, а интегральные кривые, вдоль которых нормали к плоскостям системы образуют развертывающиеся поверхности, — линии кривизны второго рода.

Если в плоскости, соответствующей точке  $M$ , взять две бесконечно близкие точки  $M'$ ,  $M''$  и нормали, соответствующие этим точкам, отобразить на единичную сферу, то пределом отношения площади сферического отображения к площади треугольника  $MM'M''$  является некоторая величина  $K'$ . Этот предел Синцов называет гауссовой кривизной системы. Полная и гауссова кривизны вообще не совпадают, так как  $K + 4K' = G^2 SP^2$ . Полная кривизна равна произведению нормальных кривизн, соответствующих направлениям линий кривизны первого рода, гауссова же кривизна равна произведению нормальных кривизн, соответствующих направлениям линий кривизны второго рода. Геодезическими линиями первого рода, или «прямейшими», называются интегральные кривые, у которых главная нормаль совпадает с нормалью системы. Геодезическими линиями второго рода, или «кратчайшими», называются интегральные кривые, служащие экстремалами вариационной задачи

$$\delta \int (1 + \lambda SPx' + \mu Sx'^2) ds = 0.$$

Синцов построил индикатрису геодезического кручения, геометрическое место кругов кривизны, обобщил соотношение Эннепера — Бельтрами и исследовал отдельные случаи неголономных поверхностей — конические, цилиндрические, развертывающиеся, неголономные поверхности вращения.

Если по геометрии пфаффовых многообразий Синцов пополнил и систематизировал результаты предшествующих исследователей (Фосса, Роджерса, Дарбу), то по дифференциальной геометрии монжевых уравнений, т. е. уравнений вида

$$F(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

однородных, но нелинейных относительно дифференциалов, до Синцова был получен единственный результат (Ли), обобщающий теорему Менье. Синцов обобщил понятие асимптотических линий как интегральных



Харьковский государственный университет им. А. М. Горького.

кривых, у которых соприкасающиеся плоскости касаются конусов, определяемых монжевым уравнением. Если  $F$  имеет степень  $r$  относительно дифференциалов, то через точку в пространстве проходит  $r(r+1)$  асимптотических линий. Обобщение задачи об экстремальных кривизнах приводит к  $r(3r-1)$  направлениям, огибающим линии кривизны первого рода. Линиями кривизны второго рода служат интегральные кривые, вдоль которых пересекаются бесконечно близкие нормали к конусам. Среди интегральных кривых существуют геодезические двух типов — «прямейшие», вдоль которых главные нормали совпадают с нормальными к конусам, и «кратчайшие» — экстремали вариационной задачи о минимуме длины дуги. Синцов получил выражения для кривизны и кручения асимптотических линий монжева уравнения. Исследования Синцова по геометрии пфаффовых и монжевых уравнений были продолжены его учениками (Я. П. Бланком, М. А. Николаенко).

В 1944 г. неголономной геометрией трехмерного евклидова пространства занялся С. С. Бюшгенс. Он изучил геометрию векторного поля, применив метод подвижного репера и внешних форм Картана. Целью этих исследований являлось приложение дифференциальной геометрии к теории стационарных потоков для выяснения их геометрической структуры.

Поверхностью переноса называется поверхность, образованная параллельным перенесением кривой  $C$ , когда одна из ее точек описывает кривую  $\Gamma$ . Последовательные положения кривой  $C$  и траектории ее точек образуют два семейства кривых переноса. Поверхность переноса, огнесенная к сети переноса, определяется уравнением  $\bar{x} = \bar{a}(u) + \bar{b}(v)$ . Поверхность переноса может обладать и второй сетью кривых переноса, но, если сетей больше двух, она несет континуум таких сетей. По-

верхности, несущие две сети переноса, были определены Ли, доказавшим, что у таких поверхностей касательные к кривым переноса всех четырех семейств пересекают бесконечно удаленную плоскость по алгебраической кривой четвертого порядка, а координаты поверхности выражаются посредством абелевых интегралов.

Н. Г. Чеботарев обобщил теорему Ли на  $n$ -мерное пространство (Ли получил обобщение своей теоремы на четырехмерное пространство). Ему принадлежит также широкое обобщение понятия поверхности переноса, заключающееся в следующем.

Пусть задана в трехмерном пространстве  $r$ -параметрическая непрерывная группа преобразований  $G$  и поверхность  $S$ . Возникает вопрос, возможно ли найти на поверхности  $S$  семейство кривых, удовлетворяющих таким условиям: 1) через каждую точку поверхности  $S$  проходит одна и только одна кривая семейства; 2) в группе  $G$  существуют преобразования, переводящие любую кривую семейства в любую другую кривую этого семейства. Такое семейство кривых Чеботарев назвал системой импримитивности группы  $G$  на поверхности  $S$ , а саму поверхность  $S$  — обобщенной поверхностью переноса. Если  $G$  — группа параллельных переносов, то поверхность переноса обычная. Он доказал, что разыскание систем импримитивности приводит к интегрированию системы  $r - 1$  дифференциальных уравнений в частных производных  $(r - 2)$ -го порядка, а условие их интегрируемости подчиняет уравнение поверхности  $r - 1$  дифференциальным уравнениям в частных производных  $(2r - 1)$ -го порядка. В случае трехпараметрической некоммутативной группы поверхность может иметь либо континуум, либо не более четырех систем импримитивности; вопрос о том, может ли она иметь все четыре системы, либо не более двух, оставался нерешенным.

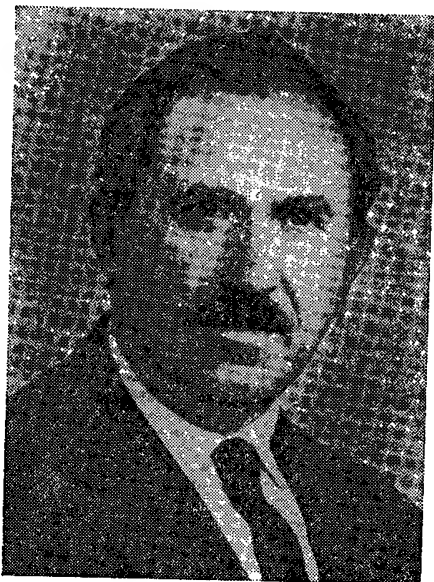
Хорошим примером обобщенных в смысле Чеботарева поверхностей переноса служат поверхности переноса (или сдвига) в неевклидовых пространствах — эллиптическом, квазиэллиптическом и др. Как показали Я. П. Бланк и его ученики



Д. М. Синцов.



С. С. Бюшгенс.



Я. П. Бланк.

Л. Т. Моторный и Е. А. Косачевская, в квазиэллиптическом пространстве в классе поверхностей вращения и винтовых поверхностей есть поверхности переноса и они несут четыре сети переноса. Тем самым был получен положительный ответ на указанный выше вопрос Чеботарева.

Поверхности переноса являются частным случаем поверхностей Петерсона, несущих сопряженную сеть конических линий. Аналитически поверхности Петерсона определяются уравнением

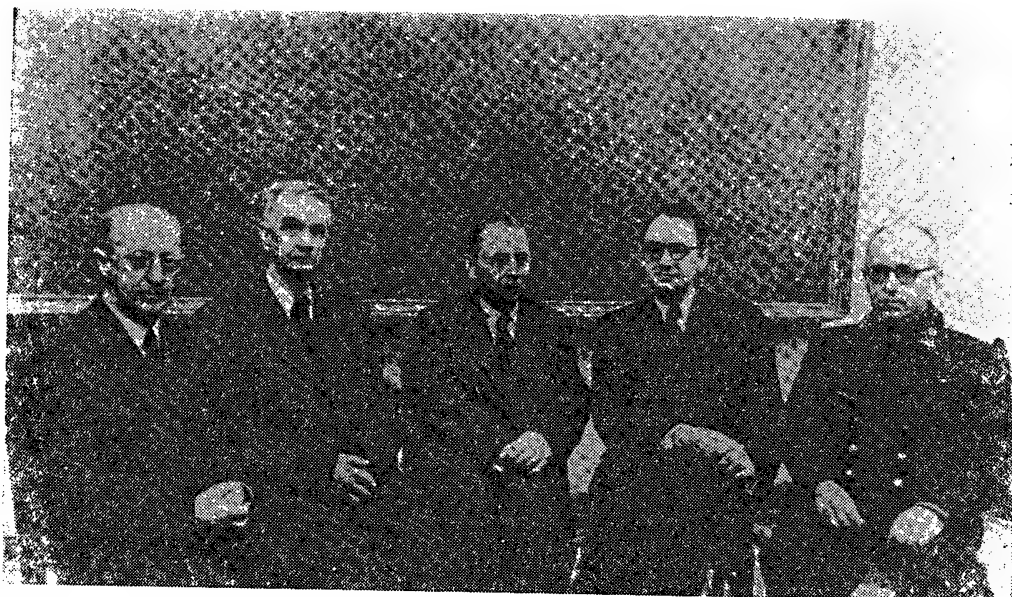
$$\bar{X} = \frac{\bar{a}(u) + \bar{b}(v)}{\alpha(u) + \beta(v)}.$$

Бланк доказал, что только поверхности второго порядка несут  $\infty^4$  конических сетей; не существует поверхностей, несущих  $\infty^3$  таких сетей; все поверхности, несущие  $\infty^2$  конических сетей, — линейчатые, принадлежат линейной конгруэнции (т. е. их прямолинейные образующие пересекают пару прямых), и их уравнения удастся записать в конечном виде. Им найдены также поверхности, несущие однопараметрическое множество конических сетей.

Линейчатой геометрией называется геометрия пространства, в котором основным элементом служит прямая линия. Прямая в пространстве зависит от четырех параметров. Однопараметрическое множество прямых образует линейчатую поверхность, двухпараметрическое — конгруэнцию, трехпараметрическое — комплекс. Таким образом, теория конгруэнций играет в линейчатой геометрии роль, аналогичную роли теории поверхностей в геометрии, где основным элементом служит точка. Возникнув из задач механики и геометрической оптики, теория конгруэнций оказалась тесно связанной со многими вопросами теории поверхностей. Обширный цикл работ посвятил теории конгруэнций прямых С. П. Фиников. Он построил проективную теорию расслоенных пар конгруэнций. Работы Финикова по проблеме расслоенности относятся к проективно-дифференциальной геометрии, которая изучает дифференциально-геометрические свойства фигур, сохраняющиеся при проективных преобразованиях.

Понятие расслоенной пары ввели Демулен и Фубини. Говорят, что две конгруэнции  $K$  и  $K'$  расслоены в одну сторону, если между их лучами можно установить взаимно однозначное соответствие, такое, что плоскости, проходящие через луч конгруэнции  $K'$ , касаются  $\infty^1$  поверхностей  $\Sigma$  так, что точки касания лежат на соответствующем луче конгруэнции  $K$ . Конгруэнции  $K$ ,  $K'$  образуют расслоенную пару (двусторонне расслоены), если, кроме того, существует семейство поверхностей  $\Sigma'$ , у которых плоскости, касательные в точках пересечения с лучом конгруэнции  $K'$ , проходят через соответствующий луч конгру-





Группа московских геометров из семинара С. П. Финикова (слева направо): С. Д. Россинский, С. С. Бюшгенс, С. П. Фиников, Л. Н. Сретенский, Г. Ф. Лаптев. 50-е годы.

экции К. Фубини показал, что в паре просто расслояемых конгруэнций одна конгруэнция может быть взята произвольно. К ней всегда можно присоединить вторую конгруэнцию так, чтобы обе конгруэнции были расслояемы в одну сторону. Однако, как показал Фиников, не всякая конгруэнция может входить в двусторонне расслояемую пару. Они образуют особый класс. Общая конгруэнция этого класса зависит от одной произвольной функции двух аргументов.

Конгруэнция прямых в общем случае состоит из общих касательных двух поверхностей. Точки касания луча конгруэнции с этими поверхностями называются фокусами, касательные плоскости к ним — фокальными плоскостями, а сами поверхности — фокальными поверхностями. Таким образом, конгруэнция прямых реализует точечное соответствие между ее фокальными поверхностями; соответствующими точками служат оба фокуса луча конгруэнции. Если при этом асимптотическим линиям одной поверхности соответствуют асимптотические линии на второй, конгруэнция называется конгруэнцией  $W$ . Таким образом, конгруэнция  $W$  осуществляет асимптотическое преобразование одной поверхности в другую. Частным случаем конгруэнций  $W$  являются конгруэнции  $R$ . Если на поверхности существует такая сопряженная сеть, что касательные к кривым каждого из двух семейств сети образуют конгруэнцию  $W$ , сеть называется сетью  $R$ , поверхность, несущая такую сеть, — поверхностью  $R$ , а сами конгруэнции — конгруэнциями  $R$ .

С. П. Фиников нашел все расслояемые конгруэнции  $W$ . Оказалось, что конгруэнциями этого класса служат конгруэнции  $R$ , конгруэнции с линейчатыми фокальными поверхностями и конгруэнции линейного комплекса. Они всегда входят в пары с конгруэнциями того же типа.





С. Д. Россинский.

а конгруэнция с линейчатыми фокальными полостями составляет пару сама с собой. Проблема расслоимости привела Финикова к известной конфигурации  $T$ : пространственный четырехугольник перемещается с двумя степенями свободы так, что стороны его касаются поверхностей, описанных вершинами. Таким образом, конфигурация состоит из четырех конгруэнций, последовательно связанных фокальными поверхностями. Эта конфигурация возникает при преобразованиях  $T$  конгруэнций. Так называется преобразование, введенное Финиковым, которое в теории конгруэнций играет роль, аналогичную роли асимптотического преобразования в теории поверхностей. Две конгруэнции связаны преобразованием  $T$ , если фокусы каждой из них лежат в соответствующих фокальных плоскостях

другой. Для произвольной конгруэнции  $K$  существует бесконечность конгруэнций  $K'$ , которые являются преобразованиями  $T$  от  $K$ . Многообразие конгруэнций  $K'$  зависит от двух функций одного аргумента. Расслояемая пара есть частный случай преобразования  $T$ .

А. М. Васильев определил класс конгруэнций, обладающих интересными проективно-дифференциальными свойствами. С каждой точкой поверхности связана соприкасающаяся поверхность второго порядка Ли, определяемая как предельное положение поверхности второго порядка, проходящей через касательные к трем асимптотическим линиям одного семейства в точках их пересечения с одной асимптотической другой семейства, когда две точки стремятся к третьей. Конгруэнцией Васильева называется конгруэнция, у которой поверхности Ли, присоединенные к фокальным поверхностям в фокусах одного луча, касаются вдоль общей образующей. Общая образующая порождает вторую конгруэнцию Васильева. Обе конгруэнции являются частным случаем конгруэнций  $W$ .

Метрическая теория расслояемых пар также изучалась геометрией московской школы классической дифференциальной геометрии. В совместной работе С. С. Бюшгенс и С. Д. Россинский решили задачу: подобрать расслояемую пару конгруэнций  $K, K'$  так, чтобы расслоимость сохранилась при всех изгибаниях одной выбранной поверхности  $\Sigma$ . Оказалось, что  $\Sigma$  — поверхности постоянной кривизны либо поверхности, наложимые на поверхности вращения. Россинский исследовал расслояемые пары конгруэнций, у которых соответствующие лучи взаимно перпендикулярны, а их общий перпендикуляр описывает нормальную конгруэнцию. Он доказал существование расслояемых пар, у которых общий перпендикуляр соответствующих лучей образует изотропную конгруэнцию, т. е. конгруэнцию, у которой линии сжатия

каждой ее линейчатой поверхности пересекают луч конгруэнции в его центре.

Симметричной расслояемой парой конгруэнций называется пара, у которой соответствующие лучи пересекают их общий перпендикуляр по обе стороны от его центра на одинаковом расстоянии и образуют равные углы с биссектрисой его фокальных плоскостей. С. В. Бахвалов доказал существование однопараметрического семейства симметричных пар с одной общей конгруэнцией общих перпендикуляров. Присоединенное семейство симметричных пар образует конфигурацию Бахвалова. Лучи пар, пересекающие один и тот же общий перпендикуляр, образуют коноид.

С. П. Фиников разработал свой метод канонизации репера и независимых параметров, представляющий собой своеобразное развитие метода подвижного тетраэдра Дарбу — Картана. Метод Финикова изложен в его монографии «Проективно-дифференциальная геометрия» (1937 г.). Она содержит проективно-дифференциальную теорию поверхностей и конгруэнций трехмерного пространства. В дальнейшем Фиников широко применял в исследованиях по дифференциальной геометрии метод внешних форм и метод подвижного репера Э. Картана. Метод внешних форм Э. Картана изложен в монографии Финикова «Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Теория совместности систем дифференциальных уравнений в полных дифференциалах и в частных производных» (1948 г.). Теоретические положения метода проиллюстрированы на многих задачах из самых различных разделов дифференциальной геометрии. Эта книга способствовала развитию применения метода внешних форм в дифференциально-геометрических исследованиях как в Советском Союзе, так и за рубежом.

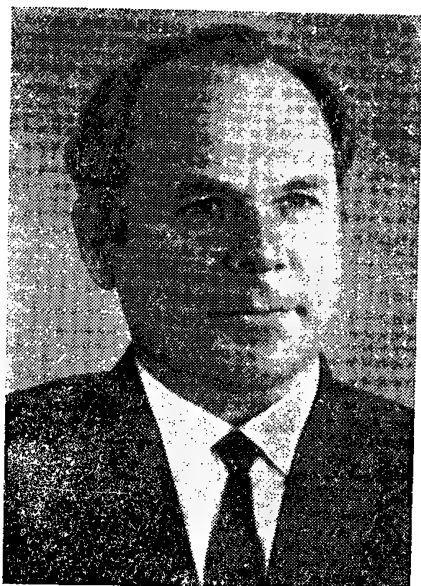
В 1950 г. Фиников опубликовал монографию «Теория конгруэнций», в 1956 г. — «Теория пар конгруэнций». Обе эти книги составляют как бы энциклопедию теории конгруэнций. В них охвачены как основные старые работы, так и последние работы автора и его учеников.

Наряду с теорией прямолинейных конгруэнций развиваются исследования по теории комплексов прямых. Теории комплексов прямых трехмерного пространства посвящены докторские диссертации Н. И. Кованцова и Р. Н. Щербакова.

В общем случае через произвольную точку пространства проходит конус прямых комплекса. В случае линейного комплекса конус вырождается в плоскость, а его образующие составляют пучок прямых. На каждом луче комплекса в общем случае есть четыре точки, называе-



С. В. Бахвалов.



Н. И. Кованцов.

мые инфлекционными центрами. Это те точки луча, у которых конусы образуют в сечении с произвольной плоскостью кривую, имеющую перегиб. Инфлекционные центры могут совпадать между собой. Кратность инфлекционных центров послужила основанием для классификации комплексов в проективном пространстве (Мантре).

Н. И. Кованцов решил вопрос о строении комплексов с кратными центрами, и тем самым дифференциально-геометрические свойства таких комплексов стали геометрически наглядными. Так, согласно его результату, чтобы построить комплекс с одним двойным инфлекционным центром на каждом луче, следует взять произвольную конгруэнцию и через каждую точку одной из ее фокальных поверхностей в фокальной плоскости, касающейся

второй фокальной поверхности, провести пучок прямых. Выбранная фокальная поверхность является геометрическим местом двойных инфлекционных центров. Чтобы построить произвольный комплекс с двумя двойными инфлекционными центрами на каждом луче, надо взять произвольную конгруэнцию  $W$  с линейчатыми фокальными поверхностями и через каждую точку любой из них провести пучок прямых в фокальной плоскости, касающейся второй фокальной поверхности. Каждая из фокальных поверхностей представляет собой геометрическое место двойных инфлекционных центров.

Комплекс с тройным инфлекционным центром получается при помощи того же построения, что и в случае одного двойного центра, однако конгруэнция при этом будет не произвольной, а специального вида. Чтобы построить комплекс с четырехкратным инфлекционным центром, надо взять произвольную линейчатую поверхность, задать между ее криволинейными асимптотическими произвольную инволюцию и через каждую точку любой из образующих в плоскости, касающейся поверхности в соответствующей по инволюции точке этой образующей, провести пучок прямых. Выбранная линейчатая поверхность служит геометрическим местом четырехкратных центров. Таким образом, каждый из комплексов с кратными инфлекционными центрами представляет собой двупараметрическое семейство плоских пучков прямых. Такие комплексы Кованцов называет квазиспециальными (специальный комплекс — совокупность прямых, касательных к поверхности, — представляет собой именно двупараметрическое множество плоских пучков). Он доказал, что вершина плоского пучка комплекса необходимо является инфлекционным центром всех прямых этого пучка. Возможны четыре класса квазиспециальных комплексов: комплексы, допускающие однократное, двукратное, трехкратное и четырехкратное расслоения в дву-

параметрические пучки. Все эти комплексы и исследованы Кованцовым. Чтобы получить общий квазиспециальный комплекс, надо взять произвольную конгруэнцию, через каждый ее луч провести произвольную плоскость и в ней, через один из фокусов конгруэнции, — пучок прямых.

А. М. Васильев ввел в рассмотрение и исследовал четырежды инволютивную систему комплексов.

Пусть заданы два линейных комплекса. В каждой плоскости расположены два пучка лучей этих комплексов с вершинами  $A$ ,  $B$ . Прямая  $AB$  есть общий луч этих комплексов и, следовательно, принадлежит их общей линейной конгруэнции и пересекает ее директрисы в точках  $M$ ,  $N$ . При вращении плоскости вокруг отрезка  $MN$  точки  $A$ ,  $B$  изменяют свое положение на прямой. Если при этом точки  $A$ ,  $B$  гармонически разделяют  $M$  и  $N$ , т. е. образуют инволюцию, линейные комплексы находятся в инволюции. Два произвольных комплекса прямых, содержащих общий луч, пересекаются в нем инволютивно, если касательные к ним линейные комплексы находятся в инволюции. Васильев доказал существование четырежды инволютивной системы комплексов и определил произвол системы. Это означает, что существуют системы из четырех однопараметрических семейств комплексов, таких, что через каждую прямую трехмерного проективного пространства проходят четыре комплекса, по одному из каждого семейства, и каждые два комплекса пересекаются по лучу инволютивно. Четырежды инволютивные системы комплексов проективного пространства соответствуют четырежды ортогональным системам поверхностей четырехмерного конформного пространства.

Проективную теорию пар комплексов изучал М. А. Акивис. Им определены и исследованы пары  $T$  комплексов. Пару  $T$  комплексов можно определить следующим образом. Пусть даны два комплекса  $K$ ,  $K'$ , между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие. Пусть лучу  $l$  соответствует луч  $l'$ . Каждая точка  $A$  луча  $l$  является вершиной конуса комплекса. Пусть  $\Pi$  — плоскость, касательная к этому конусу вдоль луча  $l$ . Луч  $l'$  пересекает плоскость  $\Pi$  в точке  $A'$ . Плоскость  $\Pi'$ , касательная к конусу комплекса  $K'$  с вершиной в точке  $A'$  вдоль луча  $l'$ , в общем случае не проходит через точку  $A$ ; если же такая инцидентность осуществляется для всех точек  $A$  любого луча  $l$ , комплексы  $K$  и  $K'$  образуют пару  $T$ . Характеристическим свойством пар  $T$  комплексов служит существование общей квадрики, гармонически пересекающей соответствующие лучи  $l$ ,  $l'$  обоих комплексов. Комплексы пары  $T$  имеют в соответствующих лучах общий касательный линейный комплекс.

Как мы видели, в исследованиях по линейчатой геометрии успешно применяется метод внешних форм в сочетании с методом подвижного репера. При этом обычно фиксируется канонический репер данного геометрического образа.

Р. Н. Щербаков в исследованиях по линейчатой геометрии пользуется полуканоническими реперами, т. е. такими не до конца фиксированными реперами геометрических образов, которые являются кано-

ническими реперами произвольных подмногообразий. Метод репеража подмногообразий он последовательно применил в докторской диссертации в теории конгруэнций и комплексов трехмерного пространства. Этим методом им исследованы метрическая, аффинная и проективная теории.

Проективной теории комплексов прямых многомерного пространства посвятил докторскую диссертацию К. И. Гринцевичюс. В  $(n - 1)$ -мерном пространстве множество прямых зависит от  $(2n - 4)$  параметров. Его  $(2n - 5)$ -параметрическое подмножество Гринцевичюс называет комплексом прямых. Основным аппаратом диссертации является групповой метод дифференциально-геометрического исследования погруженных многообразий, развитый Г. Ф. Лаптевым. Гринцевичюс получил полный геометрический объект комплекса прямых как в трехмерном, так и в многомерном проективном пространстве. Наиболее интересные его результаты заключаются в геометрическом построении и интерпретации понятий дифференциальной окрестности второго порядка луча комплекса прямых в многомерном пространстве.

Проективная дифференциальная геометрия многомерного пространства была предметом исследований Р. М. Гейдельмана. Им рассмотрена проблема одностороннего расслоения пары двухпараметрических семейств прямых в  $n$ -мерном проективном пространстве  $P_n$ . Расслаивающее семейство всегда фокально. Если и расслаиваемое семейство является фокальным, то развертывающиеся поверхности обоих семейств соответствуют и эти семейства образуют сопряженную пару  $T$  (т. е. фокальные плоскости расслаивающей конгруэнции проходят через фокусы расслаиваемой). Гейдельманом рассмотрена также проблема расслаивания пары  $k$ -параметрических семейств  $(k - 1)$ -мерных плоскостей в пространстве  $P_n$ .

В докторской диссертации Гейдельмана построена инвариантная общая теория семейства  $(m - 1)$ -мерных плоскостей. Такое семейство обладает инвариантными дифференциальными формами четных степеней, являющимися элементарными симметрическими многочленами от квадратов стационарных расстояний бесконечно близких плоскостей семейства. С дифференциальной окрестностью порядка  $\nu$  в общем случае связаны абсолютные ковариантные тензоры валентностей  $2\nu, 4\nu, \dots, 2m\nu$ . Система этих тензоров определяет все алгебраические инварианты семейства.

М. А. Акивис изучал многомерные поверхности специальных проективных типов. Вопрос о необходимости изучения таких поверхностей был поставлен Э. Картаном еще в 1920 г. К ним относятся поверхности, несущие сети сопряженных линий, многомерные сопряженные системы и тангенциально вырожденные поверхности. Акивис исследовал  $m$ -мерные поверхности  $n$ -мерного аффинного пространства, несущие сети сопряженных линий. Асимптотические квадратичные формы их могут быть одновременно приведены к сумме квадратов. Для таких поверхностей он установил условия голономности сопряженной сети и условия, при выполнении которых поверхность принадлежит своей первой соприкасающейся плоскости, а также изучил строение поверхности

в том случае, когда эти условия не выполнены. Им рассмотрен вопрос о возможности присоединения к поверхности  $V_m$ , несущей сеть сопряженных линий, семейства нормалей, лежащих в ее соприкасающихся плоскостях, индуцирующих на поверхности связность, по отношению к которой ее сопряженная сеть является сетью геодезических линий. Изучены преобразования многомерных поверхностей проективного пространства при помощи фокальных семейств лучей, сопряженные системы с многомерными компонентами, которые ранее рассматривались В. В. Рыжковым. Аквис исследовал строение неприводимой сопряженной системы с двумя многомерными компонентами, изучил тангенциально вырожденные  $n$ -мерные поверхности проективного пространства  $P_n$ , многомерные аналоги разворачивающихся поверхностей пространства  $P_s$ . Касательная плоскость таких поверхностей зависит от  $r$  параметров, где  $r < m$ , и они несут  $r$ -параметрическое семейство  $(m - r)$ -мерных плоских образующих, вдоль которых касательная плоскость остается постоянной. Для таких поверхностей определяются алгебраические фокальные образы и строение поверхности характеризуется при помощи структуры этих образов.

В. В. Рыжков получил следующую общую конструкцию поверхностей, касательная плоскость которых постоянна вдоль  $q$ -мерных образующих (тангенциально вырожденные поверхности ранга  $p$ ;  $p$  — число параметров, от которых зависит семейство касательных плоскостей). Всякая  $(p + q)$ -мерная поверхность ранга  $p$  в  $N$ -мерном евклидовом пространстве  $E_N$  может быть образована движением  $E_q$ , определяемым  $q + 1$  точками поверхностей, соответствующих в преобразовании параллелизма. Можно принять одну из этих поверхностей за основную и, не нарушая общности, считать, что она имеет ранг  $p$ , лежит в  $E_{N-q}$  и если ее соприкасающаяся плоскость имеет размерность  $\rho_0$ , то тангенциально вырожденная поверхность имеет соприкасающуюся плоскость размерности  $\rho = \rho_0 + q$ .

Известно, что дифференциальная геометрия окрестности порядка  $K$  поверхности  $V_n$  в пространстве  $E_N$  вполне определяется заданием поля дифференциальных форм

$$(d^s \bar{x})^2 = \Omega^s, \quad s = 1, 2, \dots, k,$$

которые при достаточно большом  $K$  определяют поверхность с точностью до движения (Бомпьяни, Витали, Майер и Бурстин). Рыжков доказал следующую теорему погружения: для форм  $\Omega^s$ , удовлетворяющих условию аналитичности, в пространстве  $E_N$ , где

$$N = \sum_{s=1}^k C_{n+2s-1}^{2s},$$

существуют поверхности, для которых  $(d^s \bar{x})^2 \equiv \Omega^s$ ; такие поверхности определяются с произволом  $\sum C_{n+2s-2}^{2s-1} (k + 1 - s)$  функций  $(n - 1)$  аргументов. Эта теорема означает, что общая поверхность  $V_n$  в пространстве  $E_N$  изгибается с указанным произволом, в смысле изгибания порядка  $k$ .

В. В. Рыжков исследовал изгибания  $n$ -мерных поверхностей  $N$ -мерного аффинного или евклидова пространства, рассматриваемых как многообразия, образующим элементом которых служит точка или касательная плоскость  $E_n$ , или пара точка — касательная плоскость  $(M, E_n)$ , — точечное, тангенциальное или точечно-тангенциальное изгибания. При этом изгибание понимается в смысле Картана. В аффинном пространстве в принципе возможны изгибания типа  $(k+1, k)$  — точечное изгибание порядка  $k+1$ , тангенциальное — порядка  $k$ , типа  $(k, k)$  и типа  $(k, k+1)$ . Рыжков доказал, что поверхности, допускающие тангенциальное наложение, не сводящееся к точечно-тангенциальному, несут соответствующие на них полные сопряженные системы. Он установил, что из тангенциальной наложимости порядка  $k > 1$  двух поверхностей вытекает точечная наложимость того же порядка в том же соответствии между поверхностями (но точечно-тангенциального наложения может и не быть, так как точечные и тангенциальные окрестности будут, вообще говоря, налагаться при разных аффинных преобразованиях). Им подробно изучен случай изгибания двумерных поверхностей в четырехмерном аффинном пространстве.

Конформную дифференциальную геометрию разрабатывали Р. М. Гейдельман и М. А. Акивис. Гейдельман исследовал конформно-дифференциальную теорию поверхности трехмерного пространства, построил канонический репер, получил инвариантные характеристики поверхностей со сферическими линиями кривизны, каналовых и изотермических поверхностей, а также циклид Дюпена, рассмотрел конформно инвариантные сети, инвариантные дифференциальные формы и задачу конформного изгибания поверхности. Он изучал также геометрию конгруэнций (двупараметрических семейств) окружностей. Им доказано, что конгруэнция окружностей может иметь одно и два семейства каналовых поверхностей. У первого класса конгруэнций, получивших название конгруэнций  $K_1$ , одна пара фокальных поверхностей огибает  $\infty^2$  фокальных сфер. У конгруэнций второго класса, названных конгруэнциями  $K$ , обе пары фокальных поверхностей огибают по  $\infty^2$  фокальных сфер. Гейдельман решил задачу конформного изгибания конгруэнций окружностей, получил дифференциальные уравнения для конгруэнций, допускающих конформное изгибание, и исследовал классы конгруэнций  $K$  и  $K_1$ , для которых существует изгибание. Поставил и решил проблему одностороннего и двустороннего расслоения пары конгруэнций окружностей. При одностороннем расслоении расслояющей конгруэнцией служит конгруэнция  $K$ . У двусторонне расслояемой пары конгруэнций все окружности ортогональны одной сфере. На всех парах фокальных поверхностей этих конгруэнций линии кривизны соответствуют, и эти фокальные поверхности находятся в конформном соответствии.

Р. М. Гейдельман исследовал классы трехпараметрических сфер, допускающих конформное изгибание, и дал их геометрическую характеристику. Им построена общая теория двупараметрических семейств сфер, найдена последовательность фундаментальных объектов и доказано, что фундаментальный объект третьего порядка определяет се-

мейство с точностью до конформного преобразования, установлено, что дупараметрические семейства сфер, допускающие изгибание второго порядка, совпадают с циклическими системами Рибокура, у которых одна пара фокальных поверхностей представляет одну и ту же каналовую поверхность, а вторая пара вырождается в две кривые. Он изучал также семейства окружностей и сфер многомерного конформного пространства. Им указан принцип фокальной классификации семейств окружностей и сфер  $n$ -мерного конформного пространства  $C_n$ . Согласно этой классификации конгруэнции, или параметрические семейства, окружностей делятся по числу семейств каналовых поверхностей на  $n$  классов. У конгруэнций, обладающих максимальным числом —  $(n - 1)$  семействами каналовых поверхностей,  $2n - 2$  фокальных гиперповерхностей попарно огибают  $n - 1$  семейств по  $\infty^{n-1}$  гиперсфер. Для семейств сфер в пространстве  $C_n$  получена последовательность фундаментальных объектов, найдены инварианты семейства и выяснен их геометрический смысл.

Работы М. А. Акивиса посвящены конформной теории многомерных поверхностей. В них применяется метод дифференциально-геометрических исследований вложенных многообразий, развитый Г. Ф. Лаптевым. Акивис построил конформную теорию сначала гиперповерхностей, а затем поверхностей произвольной размерности. Нашел инвариантное оснащение поверхности, которое в общих случаях определяется дифференциальной окрестностью третьего порядка; построил полную систему тензоров, определяющую поверхность с точностью до конформного преобразования пространства, и нашел условия, аналогичные уравнениям Гаусса — Петерсона — Кодацци в классической теории поверхностей. Им изучены  $m$ -мерные поверхности  $n$ -мерного конформного пространства  $C_n$ , несущие сети линий кривизны. Свойства таких поверхностей во многом близки к свойствам гиперповерхностей. Получено условие голономности сети линий кривизны и условие принадлежности поверхности своей первой соприкасающейся сфере, а также изучено строение таких поверхностей в тех случаях, когда эти условия не выполняются. Найдено инвариантное условие, определяющее циклиды Дюпена в трехмерном конформном пространстве.

Н. Г. Туганов положил начало развитию исследований по дифференциальной геометрии многообразий кривых второго порядка (коник). Он изучал конгруэнции индикатрис поверхности в евклидовом, аффинном и проективном пространствах, построил канонический репер общей конгруэнции коник в пространстве  $P_3$  и ввел для нее понятие соприкасающейся линейной конгруэнции.

Работы Туганова явились исходными для исследований В. С. Малаховского по дифференциальной геометрии многообразий квадратичных элементов, составивших содержание его докторской диссертации. Малаховский дал систематическое построение дифференциальной геометрии конгруэнций и комплексов кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве, а также исследовал многообразия квадратичных и плоских алгебраических элементов четного порядка в  $n$ -мерном проективном пространстве. Наиболее общая конгруэнция коник



имеет шесть фокальных поверхностей и шесть фокальных семейств (Дарбу). Он доказал, что конгруэнция коник с неопределенными фокальными поверхностями и семействами характеризуется принадлежностью всех коник конгруэнции общей квадрике  $Q$ . Вырождение фокальной поверхности в точку понижает общее число невырождающихся фокальных поверхностей на две единицы. Для невырожденных конгруэнций им получена система инвариантов и дана их геометрическая характеристика. Если плоскости коник конгруэнции образуют однопараметрическое семейство, то точки  $A_1, A_2$  пересечения коники с характеристикой ее плоскости являются ее фокальными точками. Конгруэнция имеет одно счетверенное фокальное семейство, которому соответствуют четыре точки пересечения двух смежных коник, принадлежащих одной плоскости. Малаховский установил для них связь с линейчатой геометрией и неголономной теорией поверхностей, а также исследовал комплексы коник, плоскости которых образуют двухпараметрическое семейство.

Погружение пространств аффинной связности в аффинное пространство и аффинное изгибание многомерных поверхностей исследовал Г. Ф. Лаптев. С текущей точкой  $M$   $n$ -мерной поверхности в  $N$ -мерном аффинном пространстве можно связать  $(N - n)$ -мерную плоскость (нормаль), имеющую с касательной плоскостью в точке  $M$  только одну общую точку  $M$ . Полученное таким образом поле нормалей и саму поверхность будем предполагать достаточно гладкими. Проектирование касательной плоскости в соседней точке  $M + dM$  на касательную плоскость в исходной точке  $M$  параллельно нормали в точке  $M$  определяет аффинное отображение соседней касательной плоскости на исходную. Главные части этих отображений определяют в многообразии аффинных плоскостей аффинную связность без кручения, зависящую от выбранного поля нормалей. Таким образом, на поверхности возникает совокупность («комплекс») геометрий аффинной связности. Этот комплекс геометрий можно выделить некоторыми естественными требованиями. Задача погружения  $n$ -мерного пространства аффинной связности без кручения в аффинное пространство ставится, по Картану, следующим образом. В  $N$ -мерном аффинном пространстве требуется определить  $(N - n)$ -мерную поверхность и оснастить ее полем  $(N - n)$ -мерных нормалей так, чтобы определенная на ней этим полем аффинная связность совпала с заданной. Лаптев доказал, что такое погружение локально осуществимо, если  $N \geq \frac{n^2 + 2n - 1}{2}$ . Доказательство этой теоремы

потребовало весьма тонкого исследования совместности системы дифференциальных уравнений в частных производных, к которой сводится задача погружения.

С точки зрения комплекса внутренних геометрий можно определить понятие наложимости поверхностей. Две поверхности аффинного пространства называются наложимыми, если между ними можно установить взаимно однозначное точечное соответствие, при котором совпадали бы комплексы внутренних геометрий аффинной связности, определенные на этих поверхностях путем проектирования при всевозможных выборах

семейства нормалей. Оказалось, что такое аффинное наложение совпадает с наложением второго порядка в смысле Картана.

Г. Ф. Лаптев доказал следующие теоремы.

1. Неспециальная  $n$ -мерная поверхность допускает изгибание с сохранением комплекса внутренних геометрий (т. е. изгибание второго порядка по Картану) в  $N$ -мерном аффинном пространстве, если

$$N \geq \frac{n^2 + 3n - 2}{2}.$$

При этом, если

$$N > \frac{n^2 + 3n - 2}{2},$$

любые две поверхности наложимы. Если же

$$N = \frac{n^2 + 3n - 2}{2},$$



Г. Ф. Лаптев

поверхность, налагающаяся на данную, и точечное соответствие между ними определяются  $n^2 + 3n - 2$  произвольными функциями от  $n - 1$  аргументов.

2. Пусть  $n$ -мерная поверхность в  $N$ -мерном аффинном пространстве в каждой точке своей обладает  $(n + \rho)$ -мерной соприкасающейся плоскостью и через каждую ее точку проходит  $(n - r)$ -мерная плоская образующая, вдоль которой касательная плоскость постоянна. Тогда эта поверхность изгибаема с сохранением комплекса внутренних геометрий, если

$$N \geq n + \frac{r(r+1)}{2} \quad \text{и} \quad \rho \geq \frac{r(r+1)}{2}.$$

Вопрос о существовании поверхностей, удовлетворяющих этим условиям, остается пока открытым при  $r > 0$ .

В первой половине XX в. интенсивно развивалась аффинная и, особенно, проективная дифференциальная геометрия поверхностей. При этом с утратой метрики отпали методы гауссовой теории поверхностей и вместе с тем методы тензорного анализа римановой геометрии; основные результаты получались в специально подбираемых системах отнесения и не имели инвариантной формы.

Г. Ф. Лаптевым впервые дано систематическое инвариантное построение проективной дифференциальной геометрии поверхности. В основу исследований им положены исчисление внешних форм Картана и теория представлений групп. Существо вопроса состоит в том, что последовательные продолжения инвариантного дифференциального уравнения поверхности приводят к последовательности геометрических объектов (фундаментальные объекты поверхности), которая и определяет всю дифференциальную геометрию поверхности: все геометрические факты определяются комитантами (охваченными объектами) фундаментальных объ-

ектов. В результате продолжений возникает фундаментальный объект, надлежащее задание которого определяет поверхность с точностью до проективных преобразований. Этот объект играет в проективной теории такую же роль, как коэффициенты первой и второй квадратичных форм в гауссовой теории. С помощью фундаментальных объектов были получены в инвариантной форме канонический пучок проективных нормалей, пучок поверхностей Дарбу, линейный элемент Фубини и т. д.

Примененный метод позволил обобщить основные факты проективно-дифференциальной геометрии поверхности на гиперповерхность многомерного проективного пространства, а затем на гиперповерхность пространства проективной связности с кривизной и кручением. В процессе решения задачи инвариантного построения проективно-дифференциальной геометрии поверхности был развит общий теоретико-групповой метод исследования погруженных многообразий. Вначале его развил Лаптев применительно к многообразиям геометрических образов в пространствах представлений конечных групп Ли и пространствах геометрических элементов с фундаментально-групповой связностью. А. М. Васильев заметил, что метод применяется для исследования многообразий, вложенных в пространства представлений бесконечных групп Ли. Тем самым открылась возможность применения метода для дифференциально-геометрического исследования объектов анализа (поверхностных интегралов, систем дифференциальных уравнений). Дальнейшее развитие метод получил в работах Лаптева по теории расслоенных многообразий.

Суть метода состоит в том, что с каждой дифференциальной окрестностью текущего элемента погруженного многообразия инвариантно связывается фундаментальный геометрический объект. Все другие дифференциально-геометрические объекты рассматриваемой дифференциальной окрестности, инвариантно связанные с текущим элементом многообразия, охватываются фундаментальным объектом (являются его комитантами). Последовательность фундаментальных объектов в любом случае строится совершенно автоматически при помощи рациональных алгебраических операций. Построение охваченных объектов сводится, по существу, к алгебраической теории исключений. В случае пространства представления конечной группы Ли или пространства геометрических элементов с фундаментально-групповой связностью все возникающие геометрические объекты представляют эту группу (или ее подгруппу). В случае пространства представления бесконечной группы геометрические объекты на каждом этапе продолжения представляют соответствующие дифференциальные продолжения исходной фундаментальной группы.

Метод нашел широкие приложения в работах М. А. Акивиса по конформной дифференциальной геометрии, П. И. Швейкина по дифференциальной геометрии многомерных поверхностей в аффинном пространстве, Н. М. Остиану по геометрии поверхностей в многомерном симплектическом пространстве и в многомерном проективном пространстве, Д. В. Беклемишева по геометрии минимальных и комплексно-аналитических поверхностей, М. В. Васильевой по геометрии инте-

грала, Л. Е. Евтушика по геометрии интеграла и по теории производной Ли, К. И. Гринявичюса по теории многомерных комплексов, В. И. Ближникаса по геометрии метрических пространств линейных элементов и В. С. Малаховского по теории многообразий алгебраических элементов.

Для аффинного пространства и пространства аффинной связности проблема оснащения ставится так. С текущей точкой  $M$   $n$ -мерной поверхности в  $N$ -мерном пространстве требуется инвариантно связать  $(N - n)$ -мерную плоскость (аффинную нормаль), которая имеет с  $n$ -мерной касательной плоскостью в  $M$  только одну общую точку.

В работах Лаптева с помощью метода продолжений и охватов инвариантно оснащена  $r$ -мерная поверхность в  $\frac{n(n+3)}{2}$ -мерном аффинном пространстве. Этим же методом построено инвариантное оснащение  $n$ -мерной поверхности в  $N$ -мерном пространстве аффинной связности с кривизной и кручением, когда  $N \leq \frac{n(n+3)}{2}$  (при этом предполагалось отличие от нуля инварианта, охваченного фундаментальным объектом второго порядка). Лаптевым, совместно с А. Зайцем, рассмотрен случай, когда

$$\frac{n(n+1)}{2} < N - n \leq \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

и кручение отсутствует.

Проблема оснащения  $n$ -мерной поверхности в  $N$ -мерном аффинном пространстве при любых  $n$  и  $N$  была изучена с помощью метода продолжений и охватов П. И. Швейкиным.

Пусть дано  $n$ -мерное аналитическое пространство (база  $B$ ), каждой точке которого соответствует  $m$ -мерное пространство (слой  $F$ ) представлений некоторой  $r$ -параметрической группы Ли (структурная группа  $G$ ). При этом все представления изоморфны между собой. В многообразии слоев устанавливается фундаментально-групповая связность, если заданы главные части отображений соседних слоев на исходный текущий слой, причем эти отображения выдерживают структурную группу  $G$  и удовлетворяют определенным условиям регулярности.

Следуя Картану, расслоенное многообразие с фундаментально-групповой связностью можно задать с помощью системы пфаффовых форм  $\omega^1, \dots, \omega^n, \omega^{n+1}, \dots, \omega^{n+r}$ , определенных на базе  $B$ . При переходе к эквивалентным связностям эти формы изменяются. Поэтому в них можно ввести дополнительные параметры. Лаптев доказал основную теорему: система форм  $\omega^i, \omega^\alpha$  (зависящих от любых переменных в любом количестве) тогда и только тогда является системой форм, определяющих пространство с фундаментально-групповой связностью с  $n$ -мерной базой и структурной группой  $G$ , когда эти формы подчинены структурным уравнениям

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i];$$

$$D\omega^\alpha = \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha [\omega^\beta \omega^\gamma] + R_{ij}^\alpha [\omega^i \omega^j];$$

$$[\omega^1 \dots \omega^n] \neq 0$$

$$(i, j, k = 1, \dots, n; \alpha, \beta, \gamma = n+1, \dots, n+r),$$

где  $C_{\beta\gamma}^\alpha$  — структурные константы группы  $G$ .

Если в каждом слое фиксируется определенный геометрический образ, то получается пространство геометрических элементов с фундаментально-групповой связностью. Теорию таких пространств также развивал Лаптев. Им изучен тензор кривизны и его подтензоры. Строго доказана теорема о том, что при обходе слоя по бесконечно малому циклу, расположенному в двумерной площадке базы, тензор кривизны определяет в главном отображении слоя на себя. Обобщена сформулированная выше основная теорема.

Аксиоматически определяется дифференциальная (инфинитезимальная) связность в расслоенном многообразии со связной базой, слоями которого являются топологические пространства, гомеоморфные  $m$ -мерному евклидову кубу. В таком пространстве возникает группа голономии. Лаптевым доказана теорема: если группа голономии конечная, то пространство является пространством с фундаментально-групповой связностью, причем группа голономии и является фундаментальной группой. Классификация таких связностей сводится к классификации групп Ли, допускающих  $m$ -мерные представления.

Лаптев изучал пространства с расслоенной структурой. В процессе нормальных продолжений Картана бесконечной группы Ли возникающие инвариантные формы имеют специфическую структуру, которую можно назвать расслоенной структурой. Первые интегралы этих форм определяют локальные координаты точки некоторого расслоенного многообразия, в котором действует продолженная группа. Система пфаффовых форм  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n, \omega^{n+1}, \dots, \omega^{n+r}$  называется системой форм расслоенной структуры, если выполняются структурные уравнения

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i];$$

$$D\omega^\alpha = \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha [\omega^\beta \omega^\gamma] + [\omega^k \omega_k^\alpha];$$

$$[\omega^1, \dots, \omega^n] \neq 0$$

$$(i, j, k = 1, \dots, n; \alpha, \beta, \gamma = n+1, \dots, n+r),$$

где  $C_{\beta\gamma}^\alpha$  — структурные константы некоторой группы Ли (структурной группы  $G$ ). Лаптевым найдены наиболее общие формы  $\omega^i, \omega^\alpha$ , имеющие расслоенную структуру. Эти формы определяют главное расслоенное многообразие, базой которого является пространство первых интегралов вполне интегрируемой системы форм  $\omega^i$ . Слоями являются групповые пространства структурной группы  $G$ : формы  $\omega^\alpha$  становятся инвариантными формами группы  $G$ , действующей в слое при фиксации точки базы, т. е. при  $\omega^i = 0$ . Им показано, что при последовательных продолжениях форм  $\omega^i, \omega^\alpha$  расслоенной структуры возникает последовательность форм  $\omega^i, \omega^\alpha, \omega_j^i, \omega_j^\alpha, \omega_{jk}^i, \omega_{jk}^\alpha, \dots$  также расслоенной структуры, связанные с ними главные расслоенные многообразия имеют одну и ту

же (исходную) базу. Слоями же являются групповые пространства групп Ли, инвариантными формами которых становятся формы  $\omega_j^i, \omega_j^\alpha, \omega_{jk}^i, \omega_{jk}^\alpha \dots$  при фиксации точки базы, т. е. при  $\omega^i = 0$ . Присоединенные расслоенные многообразия геометрических объектов определяются вполне интегрируемыми системами форм вида

$$\omega^i, \Delta x^I \equiv dx^I - \xi_\alpha^I(x) \omega^\alpha.$$

Поле геометрического объекта  $\{x^I\}$  определяется как погруженное многообразие в пространстве первых интегралов этой системы форм и задается системой дифференциальных уравнений

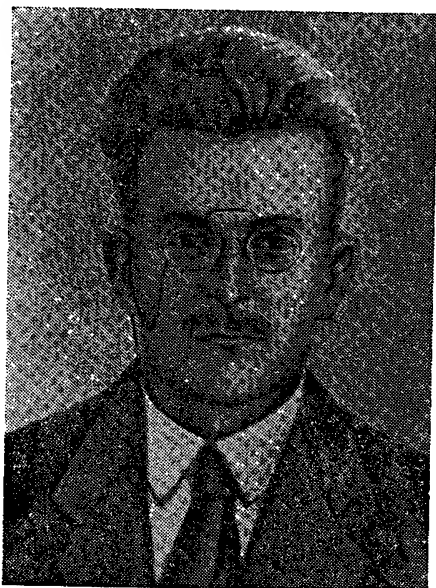
$$\Delta x^I = x_k^I \omega^k.$$

Основная теорема и тот факт, что формы  $\omega^i, \omega_j^\alpha$  в структурных уравнениях образуют вполне интегрируемую систему, определяющую расслоенное многообразие объектов связности, позволяют всякую фундаментально-групповую связность с  $n$ -мерной базой и структурной группой  $G$  определить с помощью погруженного многообразия (поля объекта связности), заданного системой уравнений  $\omega_j^\alpha = R_{jk}^\alpha \omega^k$ . При этом альтернатива возникающего фундаментального объекта  $R_{jk}^\alpha$  дает тензор кручения кривизны  $R_{[jk]}^\alpha$  получающегося пространства со связностью. Многообразие геометрических элементов с фундаментально-групповой связностью, в котором задан образующий геометрический объект  $\{x^I\}$ , определяется, если дополнительно задать поле этого объекта.

Изучение инвариантных свойств многомерных поверхностных интегралов, систем дифференциальных уравнений, метрических пространств линейных элементов сводится к дифференциально-геометрическому изучению многообразий, погруженных в пространства представлений продолженной группы аналитических преобразований. Лаптевым выписаны структурные уравнения, которым подчиняются симметризованные инвариантные формы  $\omega_j^i, \omega_{jk}^i, \dots, \omega_j^i, \dots, \omega_{jp}^i$  продолженной группы аналитических преобразований любого порядка  $p$ . К получившимся расслоенным дифференциальным структурам присоединены расслоенные аффинные структуры: при фиксации точки базы формы  $\omega_j^i, \omega_{jk}^i, \dots, \omega_{j1\dots jp}^i$  интерпретируются как компоненты инфинитезимального перемещения векторного репера в аффинном пространстве подлежащего числа измерений. Тем самым построены линейные представления дифференциальных групп малого порядка.

## **Риманова геометрия и ее различные обобщения**

Через три года после опубликования мемуара Б. Римана о гипотезах, лежащих в основании геометрии, в Казани вышла в свет работа профессора Казанского университета Ф. М. Суворова «О характеристиках систем трех измерений» (1871 г.), в которой рассмат-



П. А. Широков.

ривалась теория кривизны трехмерного риманова пространства. После полувекового перерыва в Казанском университете возобновились исследования в этой важной области математики. В 1925 г. П. А. Широков опубликовал статью «Постоянные поля векторов и тензоров в римановых пространствах». Незадолго перед этим (с 1922 г.) начал свою научно-педагогическую деятельность в Московском университете В. Ф. Каган. Им и другими участниками организованного в 1927 г. под его руководством семинара по векторному и тензорному анализу разрабатывались тензорные методы в связи с их применениями прежде всего в геометрии, а также в механике и физике.

В римановых пространствах общего типа существуют постоянные тензоры, например фундаментальный и дискриминантный. Они постоянны в том смысле, что их первая абсолютная производная равна нулю. П. А. Широков решил (1925 г.) общую задачу определения постоянных векторных полей и тензоров второго порядка. Он установил, что если  $n$ -мерное риманово пространство имеет  $\alpha$  независимых постоянных векторных полей, то его дифференциальная квадратичная форма может быть приведена к виду

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^\alpha)^2 + g_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k = \alpha + 1, \dots, n),$$

где  $g_{ik}$  зависят только от  $x^1, x^2, \dots, x^\alpha$ .

В пространствах ненулевой кривизны может существовать не более  $n - 2$  независимых постоянных векторных полей. При существовании  $n - 1$  таких полей пространство будет евклидовым. Если в пространстве существуют постоянные симметрические тензоры с различными главными значениями, то его дифференциальная квадратичная форма может быть представлена в виде

$$ds^2 = \sum_{i,k=m_1}^{n_1} g_{ik} dx^i dx^k + \sum_{i,k=m_2}^{n_2} g_{ik} dx^i dx^k + \dots + \sum_{i,k=m_r}^{n_r} g_{ik} dx^i dx^k$$

$$(m_1 = 1, \quad m_2 = n_1 + 1, \quad m_3 = n_2 + 1, \dots, \quad n_r = n).$$

Такие пространства названы Широковым ламеллярными. Они содержат системы параллельных геодезических поверхностей. Для существования в римановом пространстве постоянных симметрических тензоров второго порядка, отличных от фундаментального тензора, необходимо и достаточно, чтобы пространство было ламеллярным. Единственным ламеллярным пространством постоянной кривизны является пространство Евклида.

Широков ввел понятие *A*-пространства, матрица фундаментального тензора которого в канонической системе координат имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 \dots 0 & g_{a_1 b_1} \dots g_{a_1 b_r} \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & g_{a_r b_1} \dots g_{a_r b_r} \\ \hline g_{b_1 a_1} \dots g_{b_1 a_r} & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \\ g_{b_r a_1} \dots g_{b_r a_r} & 0 \dots 0 \end{vmatrix}.$$

Составляющие фундаментального тензора удовлетворяют системе уравнений

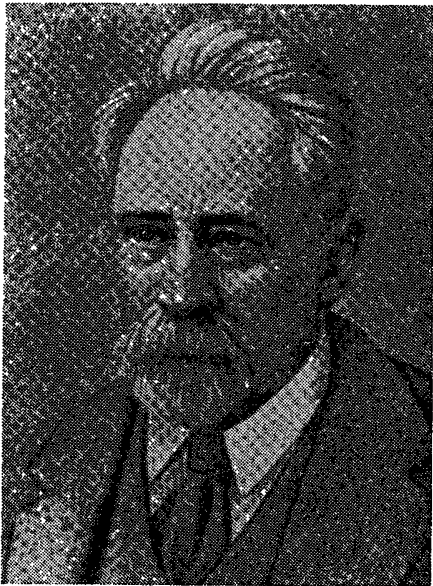
$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}.$$

*A*-пространство является четномерным. Доказана теорема: для существования в пространстве постоянных антисимметрических тензоров второго порядка необходимо и достаточно, чтобы оно или принадлежало к типу *A*-пространств, или было ламеллярным, в котором существует по крайней мере одна система параллельных геодезических поверхностей типа *A*.

Введенные Широковым *A*-пространства изучались в дальнейшем многими исследователями. В 1933 г. Келер ввел тип пространств, по существу эквивалентный *A*-пространствам Широкова. В зарубежной литературе эти пространства нередко фигурируют под названием келеровых. Частным случаем *A*-пространств является комплексное унитарное пространство вещественной постоянной кривизны, изучавшееся впервые Фубини (1903 г.) и Штуди (1905 г.). Эти пространства изучал также П. К. Рашевский (1949 г.).

Широков рассмотрел (1925 г.) пространства с постоянным тензором кривизны (абсолютная производная от тензора кривизны равна нулю), которые впоследствии стали называть симметрическими. Эти пространства также изучались многими исследователями. Некоторые результаты, полученные Широковым в этой области, были опубликованы после его смерти под редакцией его сына А. П. Широкова, иногда при участии других геометров.

В работе «К теории симметрических пространств» (1955 г.) устанавливаются три типа симметрических пространств: 1-й тип пространств допускает 6-членную



В. Ф. Каган.



стационарную подгруппу и приводит к пространствам постоянной кривизны, 2-й — 4-членную и 3-й — 2-членную стационарные подгруппы. Эти результаты переносятся на пространство  $V_4$  с неопределенной метрикой. В работе «Об одном типе симметрических пространств» (1957 г.) рассмотрено симметрическое пространство четного числа измерений, тензор кривизны которого имеет специальную структуру. Изучены строение фундаментального тензора, геодезические линии и другие вопросы.

П. А. Широковым рассмотрены также неприводимые симметрические римановы пространства 1-го класса без ограничений на знакоопределенность. Найдены все неприводимые конформно-евклидовы симметрические пространства. Они разделяются на два класса. А. С. Феденко и В. Т. Воднев нашли (1959 г.) группы движений этих пространств, ими получены структурные формулы групп. Группы движений пространств одного класса — полупростые, другого — неполупростые.

В. Ф. Каган ввел (1933 г.) понятие субпроективного пространства. Пусть  $X_n$  — пространство  $n$  измерений, в котором заданы коэффициенты  $\Gamma_{ij}$  параллельного перенесения. Пространство  $X_n$  называется проективным, если в соответствующей координатной системе геодезические линии выражаются линейными уравнениями. Если система уравнений геодезических содержит  $k$  линейных уравнений, то пространство называется  $k$ -кратно проективным и обозначается  $P_n^k$ . Изучение проективных пространств представляет значительный интерес, к их числу относятся пространства постоянной кривизны.

Каганом рассмотрены такие пространства  $P_n^{n-2}$ , геодезические линии которых лежат в двумерных плоскостях, проходящих через одну и ту же точку  $O$  — полюс пространства. Эти пространства  $P_n^{n-2}$  названы субпроективными. Им найдены необходимые и достаточные условия, при которых пространство аффинной связности, заданное коэффициентами связности, является субпроективным. Подробно исследованы все возможные случаи субпроективных пространств.

Субпроективные пространства и их обобщения привлекли в дальнейшем внимание многих исследователей как в СССР, так и за рубежом. Рассмотрена метрика (Г. М. Шапиро, 1933 г., В. А. Янков, 1955 г.), найдены тензорные признаки субпроективных пространств (П. К. Рашевский, 1933 г.). Доказано, что субпроективное пространство  $V_n$  основного случая может быть реализовано на некоторой гиперповерхности в евклидовом пространстве  $E_{n+1}$  (П. К. Рашевский).

Г. И. Кручкович исследовал полуприводимые римановы пространства, к которым принадлежат субпроективные пространства. Риманово пространство  $V_n$  называется полуприводимым, если существует такая система координат, в которой его метрика принимает вид

$$ds^2 = ds_0^2(x^\alpha) + \sigma(x^\alpha) ds_1^2(x^\beta) \quad (\alpha = 1, \dots, c; \quad \beta = c + 1, \dots, n),$$

где

$$ds_0^2 = g_{\gamma\delta} dx^\gamma dx^\delta \quad (\gamma, \delta = 1, \dots, c);$$

$$ds_1^2 = a_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu,$$

$(\lambda, \mu = c + 1, \dots, n)$  — самостоятельные метрики, зависящие каждая от своих аргументов;  $\sigma$  зависит только от переменных из  $ds_0^2$ . Кручковичем решен вопрос о единственности полуприводимых разложений, найдены тензорные признаки, исследованы конкретные типы полуприводимых пространств.

И. П. Егоровым, Г. И. Кручковичем и румынским математиком Г. Вранчану изучены движения в субпроективных и проективных пространствах. Егоров доказал, что если риманово пространство  $V_n$ , не являющееся пространством Эйнштейна ( $R_{ij} \neq \lambda g_{ij}$ ), допускает группу движений порядка

$$r > \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 3,$$

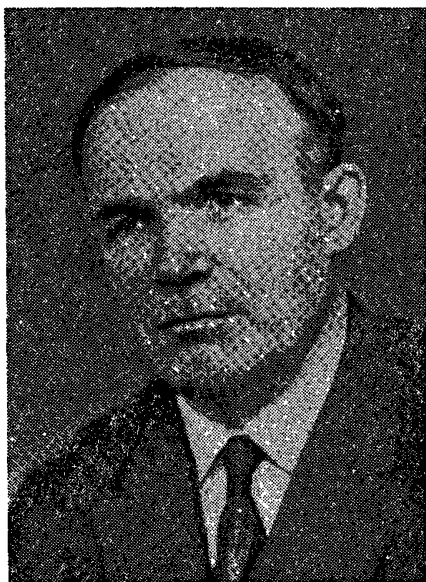
то оно является субпроективным и

$$r = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{или} \quad r = \frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

Советскими и зарубежными геометрами рассмотрены обобщенные субпроективные пространства, т. е. пространства аффинной связности  $A_n$ , геодезические линии которых лежат в плоскостях  $E_{a+1}$  ( $1 \leq a \leq n-2$ ), проходящих через фиксированную плоскость  $E_{a-1}$ . Значительно меньше изучены общие  $(n-2)$ -кратно проективные пространства  $P_n^{n-2}$ , частными случаями которых являются субпроективные пространства.

Д. В. Веденяпин рассмотрел пространства аффинной связности  $A_n$  без кручения, которые являются  $k$ -проективными, при  $k = n-2$  и  $k = n-3$ , но не являются субпроективными. Частично проективные пространства изучали П. А. Широков (1934—1935 гг.), А. П. Норден (1945 г.), Я. Л. Шапиро (1955 г.) и другие геометры.

Основы тензорной теории сетей на поверхностях разработаны в трудах Я. С. Дубнова. Существенную роль в его исследованиях играет определенный тензор, названный им чебышевским. Дубнов получил тензорные характеристики различных сетей. Его результаты составили основное содержание главы «Основы теории сетей» в известном двухтомном труде



И. П. Егоров.



Я. С. Дубнов.

В. Ф. Кагана «Основы теории поверхностей» (1947—1948 гг.). В этом сочинении отражены также другие результаты Дубнова (в частности, по тензорной геометрии прямолинейных конгруэнций).

В. Ф. Каган поставил (1937 г.) вопрос о распространении явлений двойственности (существующей, например, на эллиптической плоскости между точками и расстояниями между ними, с одной стороны, и прямыми и углами между ними — с другой) на более широкий класс объектов.

Идеи метрической двойственности привели П. К. Рашевского к рассмотрению полиметрической геометрии (1941 г.), в основе которой лежит двойственность длин и углов эллиптической геометрии. Элементом биметрической системы он называет точку  $x, y$  некоторого двумерного пространства вместе с определенным направлением в ней  $z = \frac{dy}{dx}$ .

Бесконечно близкие элементы  $(x, y, z)$  и  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  называются примыкающими, если  $dy - zdx = 0$ ; кривой — однопараметрическое семейство элементов, вдоль которого соблюдается условие  $dy - zdx = 0$ . Рашевский вводит два мероопределения, т. е. два рода длин на кривых

$$ds_1 = A_1 dx + B_1 dz;$$

$$ds_2 = A_2 dx + B_2 dz,$$

где  $A_1, B_1, A_2, B_2$  — функции  $x, y, z$ . Эта пара метрик называется биметрической системой. Каждой из метрик  $ds_1$  и  $ds_2$  ставится в соответствие угловая метрика. Таким образом, вводится пара угловых метрик. Частным случаем биметрической системы является двойственная система, а частным случаем последней — гауссова теория поверхностей. Далее развивается теория триметрических систем, которая может быть обобщена и на  $n$ -метрические системы. Разработанный Рашевским аппарат применялся затем другими исследователями (например, М. А. Джавадовым) при решении конкретных геометрических вопросов<sup>2</sup>.

Рашевский исследовал расслоенные пространства. Им рассмотрено (1948 г.)  $2n$ -мерное аналитическое многообразие, отнесенное к координатам  $x^1, x^2, \dots, x^n, u^1, u^2, \dots, u^n$ ; система координат задана с точностью до преобразования

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^n);$$

$$u^{j'} = u^{j'}(u^1, u^2, \dots, u^n)$$

так, что каждая из двух групп по  $n$  координат преобразуется отдельно. Это многообразие при некоторых дополнительных требованиях называется расслоенным, оно расслоено на  $\infty^n$  поверхностей  $n$  измерений. Рашевским дана геометрическая характеристика расслоенных пространств, введена метрика, рассмотрены связность и тензор кривизны

<sup>2</sup> Полиметрическая геометрия Рашевского подробно изложена в статье А. Д. Александрова «Геометрия и топология в Советском Союзе. II» (Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 5 (21), стр. 70—77).

расслоенного пространства, внутренняя связность на поверхностях расслоения, реализация  $2n$ -мерного расслоенного пространства в  $(n + 1)$ -мерном аналитическом многообразии  $X_{n+1}$ , в котором задана однопараметрическая группа  $G_1$  отображений  $X_{n+1}$  на себя. Расслоенное пространство изучено им вблизи данной поверхности расслоения.

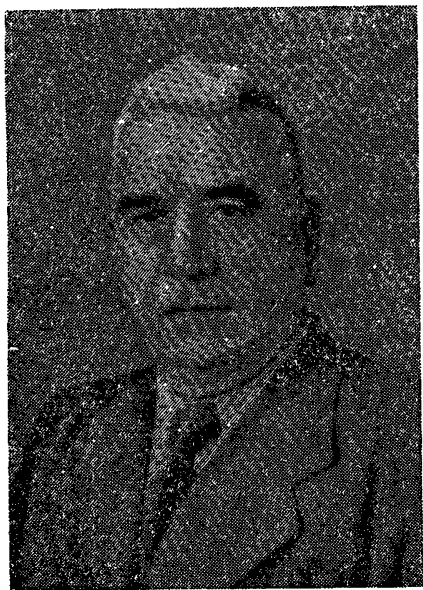
В 1950 г. Рашевский рассмотрел пары связностей на  $n$ -мерных поверхностях в  $2n$ -мерном расслоенном пространстве. Расслоенные пространства родственны  $A$ -пространствам Широкова, они являются обобщениями пространств постоянной кривизны. Б. А. Розенфельд применил (1949 г.) теорию расслоенных пространств Рашевского к теории эрмитовых пространств.

Рашевский ввел также новый класс пространств аффинной связности с кручением, у которых при параллельном перенесении сохраняется не только тензор кривизны, но и тензор кручения. Он назвал их симметрическими пространствами с кручением. С теорией этих пространств тесно связана теория групп Ли. Рашевский решил (1954 г.) задачу определения всевозможных линейных представлений дифференциальной группы  $\nu$  раз дифференцируемых преобразований координатных систем, рассматриваемых в окрестности



П. К. Рашевский.

некоторой точки заданного  $n$ -мерного дифференцируемого многообразия с точностью  $\nu$ -го порядка. Позднее (1956, 1960 гг.) он рассмотрел однородное пространство  $K = G/H$ , где  $G$  — транзитивная группа Ли преобразований пространства  $K$ ,  $H$  — стационарная подгруппа. Им найдены необходимые и достаточные условия, при которых пространство  $K$  допускает проективную модель. Поверхность  $K^*$  проективного пространства  $P$  называется проективной моделью пространства  $K$ , если группа  $G$  представляется в пространстве  $P$  в виде группы проективных преобразований  $\varphi(G)$ ,  $K^*$  является поверхностью транзитивности группы  $\varphi(G)$ , а стационарная подгруппа  $H$  отображается в стационарную подгруппу  $\varphi(H)$  группы  $\varphi(G)$ , которая рассматривается как группа преобразований  $K^*$ .



М. А. Джавадов.



А. П. Норден.

А. П. Норден предложил метод нормализации, который применяется с успехом многими геометрами. Поверхность  $X_m$  в  $n$ -мерном проективном пространстве  $P_n$  называется нормализованной, если в каждой ее точке  $M$  задана плоскость  $P_{n-m}$  (нормаль первого рода  $N_1$ ), проходящая через точку  $M$ , но не имеющая с касательной гиперплоскостью больше общих точек, и в каждой касательной гиперплоскости задана плоскость  $P_{m-1}$  (нормаль второго рода  $N_2$ ), не проходящая через точку  $M$ . В трехмерном пространстве, следовательно, обе нормали будут прямыми. Относя ко всякому направлению, исходящему из точки  $M$  в касательной плоскости, соответствующую точку на  $N_2$ , Норден определяет аффинную связность без кручения так, что при параллельном перенесении направления соответствующая ему точка на  $N_2$  приобретает бесконечно

малое смещение в плоскости, содержащей  $N_1$ . Эта связность называется внутренней связностью нормализованной поверхности. Всякая аффинная связность без кручения может быть реализована в виде внутренней связности поверхности  $X_m$  в пространстве  $P_n$ . Теории поверхностей евклидова, неевклидова, псевдоевклидова, аффинного, центраффинного пространств можно рассматривать как частные случаи теории нормализованных поверхностей.

Пользуясь своим методом, Норден, его ученики и другие исследователи получили много результатов в различных областях дифференциальной геометрии: в теории поверхностей, линейчатой геометрии, конформной геометрии.

В. И. Ведерников рассмотрел конформную наложимость поверхностей конформного пространства, Г. Н. Тевзадзе — риманову метрику поверхностей проективного пространства. А. И. Чахтаури развил внутреннюю геометрию плоских сетей в связи с ее приложениями к теории поверхностей; он нашел инвариантные характеристики проективной деформации поверхностей. А. П. Широков построил нормализации, соответствующие конформно-евклидовым симметрическим пространствам П. А. Широкова. В. И. Шуликовский рассмотрел тройки сетей в тензорном изложении проблемы изгиба на главном основании, теории поверхностей переноса, Фосса и другие вопросы. В исследованиях Шуликовского важную роль играют введенные им понятия трансверсального вектора для векторного поля в римановом пространстве и пространстве Вейля, геодезического вектора сети — в пространстве  $V_2$ , относительных геодезических векторов сети — в пространстве  $A_2$  и др. Шуликовский систематизировал многочисленные исследования по теории сетей, выполненные до него (Я. С. Дубнова,

А. П. Нордена, Н. В. Ефимова, А. Е. Либера), и в ряде вопросов развил и углубил эту теорию.

В работах геометров Горьковского педагогического института (Ведерников и др.) рассматривается связь теории нормализации Нордена с общей теорией связности. Метод нормализации Нордена обобщается ими на инфинитезимальную связность в произвольном главном расслоенном пространстве. Ведерников изучает так называемые приводимые инфинитезимальные связности и их приложения, главным образом в теории нормализаций. Исследуются также редуктивные связности в связи с теорией нормализации. В последнее время (1963 г.) метод нормализации нашел новое применение в работе Нордена, посвященной пространствам декартовой композиции поверхностей.

В тесной связи с теорией нормализованных поверхностей развивается дифференциальная геометрия над алгебрами. Норденом (начиная с 1949 г.) построена дифференциальная геометрия кривых и поверхностей биаксиального и биаффинного пространств. Биаксиальной геометрией эллиптического типа называется геометрия, фундаментальная группа которой изоморфна подгруппе проективных преобразований трехмерного пространства, переводящих в себя две сопряженные сильно мнимые прямые. Четырехмерное пространство, фундаментальной группой которого является подгруппа аффинных преобразований, сохраняющих две бесконечно удаленные сильно мнимые сопряженные прямые, называется биаффинным пространством. Исследования в этой области привели Нордена к обобщению известного принципа перенесения Котельникова — Штуди и к классификации пространств Эйнштейна в смысле А. З. Петрова.

А. П. Широков, исследуя многомерные обобщения биаксиального пространства, вновь пришел (1954 г.) к  $A$ -пространствам П. А. Широкова и расслояемым пространствам Рашевского. Изучая вопрос об интерпретации конформно-евклидовых симметрических пространств, он доказал (1956 г.), что связность любого такого пространства может быть реализована как внутренняя связность гиперквадрики, переходящей в себя при некоторой проективной инволюции и нормализованной прямыми этой инволюции и их полярами. В последние годы А. П. Широков проводит далеко идущие обобщения геометрии над алгебрами весьма широкого класса.

Производная Ли для тензоров и объектов связностей в пространстве  $X_n$  была введена в 1931—1932 гг. Слебодзинским и в 1933 г. — Схоутеном и Ван Кампеном. В 1938 г. Б. Л. Лаптев применил операцию дифференцирования Ли при рассмотрении аффинных коллинеаций как отображений, переводящих пути в пути с сохранением аффинного параметра в пространствах линейных элементов аффинной связности. В 1945 г. понятие производной Ли от дифференциально-геометрического объекта в пространстве  $X_n$  рассмотрел В. В. Вагнер, затем, в 1950—1954 гг., Б. Л. Лаптев ввел это понятие, как дальнейшее обобщение, в пространство опорных элементов  $(x^\alpha, \omega^i)$ , где  $\omega^i$  — дифференциально-геометрический объект, изучил свойства производной Ли и указал ее приложения.



Б. Л. Лаптев.

Под геометрическим объектом понимают систему величин (компонент)  $f^i$ , которые при преобразованиях данной группы Ли с параметрами  $A^\alpha$  преобразуются по определенному закону (представление группы):

$$f^{i'} = f^i (f^k, A^\alpha).$$

Примером геометрического объекта может служить поле тензора. Пространство опорных элементов является обобщением пространств линейных элементов, пространств гиперплоскостных элементов и др.

Результаты, полученные Б. Л. Лаптевым, применяются им в теории автоморфизмов пространств опорных элементов с фундаментальным объектом, а производная Ли — также в теории вариаций кратных интегралов. При образовании производной Ли предпола-

галось, что опорный объект соседнего элемента образуется путем увлечения. В последнее время Лаптев рассматривает более общие задачи: когда варьирование опорного объекта возникает не только вследствие смещения точки. Он отказывается от обязательного связывания опорного объекта с некоторым геометрическим точечным образом. Производная Ли, построенная при этом предположении, названа им полной производной Ли.

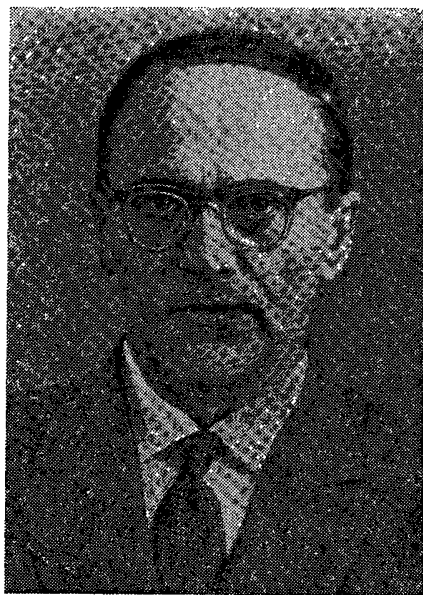
Исследования в области дифференциальной геометрии в связи с ее приложениями к теории относительности проводит начиная с 1946 г. А. З. Петров со своими учениками. В общей теории относительности отсутствуют инерциальные системы координат, поэтому особую роль играют инвариантные методы изучения. Петров, исследуя алгебраическую структуру тензора кривизны, доказал, что существует три и только три типа пространств Эйнштейна, т. е. пространств  $V_4$  с тензором Риччи  $R_{ij} = \kappa g_{ij}$ . Первый вариант доказательства был предложен им в 1950 г., второй, более простой, — в 1954 г. Предлагались доказательства А. П. Норденом (1954 г.) и другими исследователями. Классификация Петрова получила широкую известность и нашла отражение в мировой литературе. Методом теории групп Ли Петров и его ученики исследовали поля тяготения, в частности для групп движений, групп конформных преобразований, бесконечно малых геодезических отображений. Монография Петрова «Пространства Эйнштейна», содержащая эти результаты, издана в СССР (1961 г.) и в переработанном виде за рубежом (1965 г.).

В Советском Союзе интенсивно разрабатывается теория движений в различных пространствах.

Продолжительное время оставался нерешенным вопрос: сущест-



вуют ли  $n$ -мерные пространства аффинной связности, обладающие полными группами движений порядка  $n^2 + n - 1$ . Этот вопрос полностью решил в 1945 г. И. П. Егоров, доказав, что вообще не существует кривых пространств аффинной связности, допускающих полные группы движений порядка  $r$ , превышающего  $n^2$  (группа движений  $G_{n^2}$  состоит из проективных преобразований  $n$ -мерного проективного пространства  $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ , оставляющих на месте абсолюты  $y'^2 + \varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon = -1, 0, 1$ ). Таким образом, был установлен факт наличия лакун (провалов) в порядках групп движений. Отсюда возникла проблема распределения возможных порядков полных групп движений в различных пространствах и определения для этих порядков самих групп движений и соответствующих им пространств. Например,



А. З. Петров.

если пространство аффинной связности  $A_n$  допускает полную группу движений  $G_r$ , то для полной группы  $r$  не может принимать значений  $n^2 < r < n^2 + n$  (первая лакуна) и  $n^2 - n + 1 < r < n^2 - 1$  (вторая лакуна). Доказано существование третьей лакуны в распределении порядков полных групп движений эквиаффинных пространств:  $n^2 - 2n + 5 \leq r \leq n^2 - n - 2$ . Исследованы пространства  $A_n$ , обеспечивающие точность верхней границы третьей лакуны. Такие пространства являются проективно-евклидовыми пространствами, тензор Риччи которых имеет ранг 1 или 2.

Вопрос об определении пространств с кривизной, реализующих максимальную подвижность (наличие которых ранее не подозревалось), Егоров рассмотрел сначала для пространств  $A_n$ , определенных симметрическими по нижним индексам коэффициентами аффинной связности, а затем для пространств общей несимметрической и полусимметрической связности. Им найдены важные классы максимально подвижных римановых пространств первых лакунарностей. Установлено, что максимальный порядок полных групп неэйнштейновых римановых пространств равен точно  $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ , наибольший порядок групп движений для пространств Эйнштейна непостоянной кривизны не превышает  $\frac{n(n-1)}{2} + 2$ . Показано, что интервал  $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1, \frac{n(n+1)}{2}\right)$  является интервалом запрещенных порядков полных групп движений. Позднее Егоров полностью решил вопрос о второй лакуне и пространствах второй лакунарности, причем без учета ограничения на определенность метрики пространства. Он доказал также, что максимальный порядок групп движений эйнштейновых пространств любой сигнатуры, отличных от пространств постоянной кривизны, равен точно  $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 5$ .



Исследуя максимально подвижные римановы пространства  $V_4$  непостоянной кривизны, Егоров определил все пространства  $V_4$ , обладающие группой движений  $G_8$  при условии  $ds^2 > 0$ . Группа  $G_9$  для пространства  $V_4$  невозможна, а группа  $G_{10}$  дает пространство  $V_4$  постоянной кривизны. Пространства  $V_4$  с группой  $G_8$  были пропущены Фубини в его классификации по группам движений (1904 г.). Егоров впервые получил групповую характеристику субпроективных пространств. Он показал, что эти пространства в смысле подвижности являются непосредственно предшествующими по отношению к пространствам постоянной кривизны. Римановы пространства, допускающие преобразования, которые переводят в себя фундаментальный тензор пространства с точностью до постоянного множителя, называются гомотетическими пространствами. Егоров определил все гомотетические пространства первой, второй и третьей лакуарности. В последнее время им изучены гомотетические преобразования в метриках Келера-Широкова и в бергмановских метриках (в локальном смысле). Отдельные результаты Егорова позднее повторяли зарубежные математики (румынские, японские).

Учениками Егорова определены трехмерные римановы пространства и свободные поля тяготения, допускающие нетривиальные гомотетические движения. Исследованы однородные обобщенные пространства путей трех переменных, наделенных аффинной связностью, изучены движения и гомотетии в четырехмерных собственно римановых и псевдоримановых пространствах, определены все двумерные и трехмерные финслеровы пространства, допускающие движения и гомотетии.

Приложением полуприводимой геометрии к изучению групп движений в римановых пространствах занимается Г. И. Кручкович. Он получил новую характеристику субпроективных пространств и их обобщений, доказав теорему: субпроективные пространства Кагана и обобщенные субпроективные пространства основного типа и только они допускают максимально возможную нетранзитивную группу движений с неизотропными орбитами данной размерности. Кручкович опубликовал несколько работ, посвященных классификации римановых пространств по группам движений. Им доказана теорема: собственно риманово пространство  $V_n$  ( $ds^2 > 0$ ) не может допускать полной группы движений  $G_r$ , размерность которой удовлетворяет одному из неравенств

$$\frac{(n-1)(n-k+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} < r < \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2},$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad m = \left[ \frac{\sqrt{8n+1}-3}{2} \right].$$

Таким образом, существует  $m$  лакун.

Изучением геометрий над алгебрами занимаются Б. А. Розенфельд и его ученики. Ими построена (в работах начиная с 1945 г.) общая теория образов симметрии многомерных пространств, т. е. таких образов, которые переходят в себя при инволюционных преобразованиях (образами симметрии евклидовых и неевклидовых пространств являются плоскости, образами симметрии конформного пространства — сферы). В многообразиях образов симметрии и  $m$ -пар ( $m$ -мерная плоскость +

$+(n - m - 1)$ -мерная плоскость) введена инвариантная риманова или псевдориманова метрика, найдены системы геометрических объектов, определяющие системы образов с точностью до движения основных групп. Монография Розенфельда «Неевклидовы геометрии» (1955 г.) посвящена теории неевклидовых геометрий, группами движений которых являются простые группы Ли классов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , и связям этих геометрий с проективной и конформной геометриями.

Розенфельдом исследованы также неевклидовы геометрии, группы движений которых являются особыми группами Ли. Построена теория матричных координат многомерных плоскостей проективного и неевклидовых пространств. В 1959 г. им начат цикл работ, посвященных пространствам с проективной метрикой, группы движений которых получаются из полупростых групп Ли предельным переходом. В них развивается общая теория квазиэллиптических пространств  $R_n^m$ . Так называется  $n$ -мерное проективное пространство  $P_n$ , в котором задан мнимый конус («абсолютный» конус)



Б. А. Розенфельд.

$$\sum_{\alpha} (x^{\alpha})^2 = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m)$$

с  $(n - m - 1)$ -мерной плоской вершиной («абсолютная» плоскость)  $x^{\alpha} = 0$  и невырожденной мнимой квадрикой («абсолютная» квадрика)

$$x^{\alpha} = 0, \quad \sum_u (x^u)^2 = 0 \quad (u = m + 1, \dots, n).$$

Методом прямоугольных матриц находятся метрические инварианты квадрик пространства  $R_n^m$ .

Большое количество работ, посвященных исследованиям пространств с вырожденными абсолютами, выполнено учениками Розенфельда совместно с ним или под его руководством. Интегральную геометрию в неевклидовых пространствах изучает В. И. Семянистый, неевклидовы пространства в связи с их физическими интерпретациями — Р. И. Пименов.

В последние годы возрос интерес к предельным пространствам и группам. Как известно, Лобачевский первый рассматривал евклидово пространство как предельное для пространства Лобачевского. Эта точка зрения затем была отражена в работах Ф. Клейна.

Метод предельного перехода, позволяющий из римановых однородных пространств получать аналогичные пространства другого типа, применил А. С. Феденко (1958 г.). Он проводит равномерное растяжение  $x^i = \varepsilon \bar{x}^i$  ( $\varepsilon = \text{const}$ ) риманова пространства с аналитическими ком-

понентами основного метрического тензора  $G_{ij}$ . Если  $ds^2$  сократить на  $\varepsilon^2$  и потребовать, чтобы  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то получится линейный элемент евклидова пространства. Если проводить растяжение другим способом,  $x^i = (\varepsilon)^{h_i} \bar{x}^i$ , то после соответствующего сокращения получится пространство, которое, вообще говоря, не будет евклидовым. Выбирая в качестве исходных пространств римановы пространства нулевой сигнатуры, Феденко применяет этот метод к отысканию некоторых неприводимых симметрических пространств. Таким путем он приходит к неприводимым симметрическим пространствам 1-го класса непостоянной кривизны, впервые рассмотренным П. А. Широковым, и показывает, что эти пространства  $(2n - 2)$ -проективны и группа их движений неполупростая. Феденко получает неприводимые пространства, которые также  $(2n - 2)$ -проективны, но не субпроективны. Он нашел (1959 г.) все симметрические пространства с простыми некомпактными фундаментальными группами классических серий и их геометрические интерпретации, все симметрические пространства с простыми фундаментальными группами, являющиеся пространствами Раппельского.

Геометрии над алгебрами исследовал также М. А. Джавадов. Им рассмотрены (1954 г.) проективные пространства, координаты точек которых являются вещественными и комплексными матрицами, определена неевклидова метрика и найден вид движений в полученных неевклидовых пространствах. Совместно со своими учениками Джавадов изучил аффинные, проективные и неевклидовы пространства над алгеброй альтернионов  $A_m$ . Это вещественная алгебра ранга  $2^{m-1}$  с базисом, состоящим из  $1, l_1, l_2, \dots, l_{m-1}$  и всевозможных произведений  $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_k}$ , причем  $l_i l_j = -l_j l_i$ ,  $l_i^2 = +1$  для  $l$  значений индекса  $i$ ,  $l_i^2 = -1$  для остальных значений  $i$ . Алгебра  $\circ A_m = A_m$  — алгебра чисел Клиффорда. Джавадов обобщил результаты Нордена и Розенфельда для  $m = 1, 2$  ( $A_1$  — поле вещественных чисел,  $A_2$  — поле комплексных чисел,  $A_3$  — тело кватернионов). Пространства над альтернионами применены им для геометрического истолкования спинорных представлений групп движений вещественных неевклидовых пространств. Этот способ отличен от способа Картана, он более нагляден. В 1958 г. Н. Т. Аббасов дал новое доказательство теоремы Джавадова и показал, как, пользуясь его методом, можно получить аналогичный результат для евклидовых пространств.

Обширная программа исследований осуществлена (с 1935 г.) саратовской школой геометров, прежде всего ее руководителем В. В. Вагнером. В этой школе разрабатывались две основные проблемы: основания дифференциальной геометрии и приложения дифференциальной геометрии к механике, вариационному исчислению и дифференциальным уравнениям. Вагнер развил общую теорию неголономных многообразий. Введенный им тензор кривизны является обобщением тензора кривизны Римана — Кристоффеля. Обращение в нуль этого тензора является необходимым и достаточным условием для существования в неголономном многообразии  $V_n^m$  абсолютного параллелизма. Вагнером доказана теорема приведения относительно полной системы дифференциальных ин-

вариантов  $V_n^m$ . Рассмотрена и полностью решена для  $m = n - 1$  проблема погружения заданного многообразия в пространство Евклида. В дальнейшем неголономная геометрия была им значительно обобщена.

Разработанные Вагнером (1943, 1948 гг.) теория составного многообразия и теория геометрических объектов значительно расширили область приложений дифференциальной геометрии. Составным многообразием  $L_m(B_n)$  называется множество  $m$ -пространств одного и того же типа  $L_m$ , поставленное во взаимно однозначное соответствие с множеством точек базисного общего дифференциально-геометрического пространства  $X_n$ . Теория составного многообразия является развитием идей Картана и Схоутена о локальных пространствах. С этими исследова-



В. В. Вагнер.

ниями тесно связана общая теория геометрических объектов. В 1945 г. Вагнер доказал, что группа инвариантности геометрического объекта является группой Ли и каждой группе Ли соответствует свой характеристический объект. Таким образом, была установлена связь между геометрическими объектами и группами Ли и дан общий метод отыскания всех геометрических объектов. Развитие теории геометрических объектов потребовало проведения исследований псевдогрупп преобразований в арифметическом пространстве.

Вагнер определил обобщенные группы и обобщенные груды (1953, 1956 гг.) и провел их абстрактно-алгебраическое исследование. Обобщенной группой называется полугруппа  $G$ , удовлетворяющая двум требованиям: все идемпотентные элементы из  $G$  коммутируют друг с другом; для любого  $a$  из  $G$  существует такой элемент  $a_1$ , что  $aa_1a = a$ . Обобщенными грудями названы множества с некоторой специальной тернарной алгебраической операцией. Абстрактную теорию обобщенных групп и обобщенных груд Вагнер применил для обоснования дифференциальной геометрии.

В работах Вагнера теория поля локальных  $m$ -поверхностей применена к вариационному исчислению. Им построены геометрическая интерпретация простейшей вариационной задачи Лагранжа и соответствующая ей теория поля локальных кривых в пространстве  $X_3$ , геометрическая теория сингулярной вариационной задачи и соответствующая ей теория поля локальных сингулярных гиперповерхностей в пространстве  $X_n$ , геометрическая теория общей вариационной задачи Лагранжа, заданной «полувнутренним» образом, и соответствующая ей теория поля локальных  $m$ -мерных гиперполос в пространстве  $X_n$ . До Вагнера в этих областях почти ничего не было сделано. Он разработал также с новой точки зрения геометрию Финслера, которая

является специальным случаем общей теории поля локальных  $m$ -поверхностей.

Другие работы Вагнера посвящены изучению общей геометрической теории дифференциальных уравнений в частных производных, рассмотрению дифференциальной геометрии проективных, центрально-аффинных и других пространств, построению общей теории семейств  $k$ -мерных плоскостей в  $n$ -мерных евклидовых и эллиптических пространствах. Эти исследования проводятся им в связи с геометризацией различных вариационных задач. В последнее время он изучает алгебраические вопросы дифференциальной геометрии высшего порядка и геометрию так называемых расщепленных пространств.

Симметрические обобщенные группы, их алгебраические характеристики исследовал А. Е. Либер. Он изучал также комитанты геометрических объектов и характеристические объекты. Им получена классификация объектов аффинной связности в пространстве  $X_2$ . Опираясь на общую теорию геометрических объектов и теорию составного многообразия, Либер исследовал многомерные поверхности аффинного, проективного пространства и вообще произвольного пространства Клейна; для этих поверхностей внутренним образом построено оснащение. Он нашел основные геометрические дифференциальные объекты на поверхности, определяющие ее с точностью до автоморфизмов соответствующего пространства. Рассмотрены также двумерные пространства с алгебраической финслеровой метрикой и полуметрикой. Полученные результаты он применил в теории двумерных поверхностей, в аффинных и проективных пространствах и в теории  $p$ -тканей. В трехмерном евклидовом пространстве изучены три-ткани, в  $n$ -мерных пространствах получены тензорные характеристики голономных и нормальных сетей, чебышевских сетей трех типов (сильно-чебышевских, слабо-чебышевских, метрически-чебышевских), геодезических сетей и др. В связи с этим изучены некоторые специальные римановы пространства, например чебышевские римановы пространства.

Саратовскими геометрами найдены все одномерные и двумерные геометрические дифференциальные объекты в пространстве  $X_n$ , установлена связь между размерностью и классом геометрических дифференциальных объектов в пространстве  $X_1$  (Ю. Е. Пензов), развивается геометрическая теория преобразований Каратеодори для некоторых регулярных и сингулярных вариационных задач (И. И. Кабанов), изучаются геометрические теории вариационных задач с производными выше первого порядка (М. В. Лосик).

Субсимметрические пространства <sup>3</sup> изучает Л. В. Сабинин. Им рассматриваются вполне геодезические поверхности ( $m$ -мерные «зеркала»), состоящие из неподвижных точек субсимметрии. Доказано, что однородное риманово пространство, стационарная группа которого является неразрешимой группой Ли, а также однородное риманово простран-

<sup>3</sup> Пусть  $V_n$  —  $n$ -мерное связное риманово пространство. Субсимметрией  $S_A$  называется изометрическое отображение пространства  $V_n$  на себя, если точка  $A$  неподвижна и  $S_A^2$  есть тождественное преобразование.

ство с  $ds^2 > 0$ , фундаментальной группой Ли и нетривиальной группой Ли вращений — субсимметричны. Порядком субсимметрического пространства называется наименьшая возможная размерность «зеркал» в данном пространстве. Субсимметрическое пространство нулевого порядка — известное симметрическое пространство, введенное П. А. Широковым и Э. Картаном. Предлагается классификация неприводимых субсимметрических пространств с положительно определенной метрикой первого порядка, т. е. пространств, обладающих в каждой точке осью симметрии. Получено 11 типов таких пространств. Рассмотрены однородные римановы пространства, через каждую точку которых проходят два взаимно ортогональных зеркала.



Н. Н. Яненко.

Преобразования риманова пространства в себя, переводящие геодезические линии снова в геодезические, называются проективными (геодезическими). Проективные преобразования римановых пространств  $V_3$  ( $n \geq 3$ ) с положительно определенной метрикой изучает А. С. Солодовников. Он получил полную классификацию пространств  $V_n$  по проективным группам, более широким, чем группы движений. Среди этих пространств есть так называемые пространства  $V(K)$ . Изучены также пространства с общими геодезическими.

Н. С. Синюков занимается обобщением теории геодезических отображений. Он рассматривает также задачу классификации так называемых почти симметрических пространств.

Классификацией римановых многообразий по их дифференциальным инвариантам занимается П. И. Петров. Им получены (1949 и 1952 гг.) независимые дифференциальные инварианты 1-го и 2-го порядков пространства симметрической аффинной связности двух и трех измерений. Дана классификация римановых пространств  $V_4$  сигнатуры  $s = 4; 0; -2$ . Рассмотрены конформно-плоские и эйнштейновы пространства  $V_4$ .

Классом  $m$ -мерной метрики  $U_m$  ( $ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ ,  $\alpha, \beta = 1, \dots, m$ ) называется такое число  $a$ , что метрика допускает вложение в пространство  $E_{m+a}$ , т. е. метрика  $U_m$  может быть реализована на  $m$ -мерной поверхности  $V_m$  в  $(m + a)$ -мерном евклидовом пространстве  $E_{m+a}$ , но не допускает вложения в пространство  $E_{m+b}$  ( $b < a$ ). К римановым пространствам класса 1 относятся, например, пространства постоянной кривизны. С 1880 г. геометров занимала задача нахождения условий, при которых риманово пространство, определяемое тензором  $g_{ij}$ , было бы пространством класса 1. Н. А. Розенсон получила в инвариантной форме необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять тензор  $g_{ij}$  риманова пространства класса 1, когда ранг

$r$  тензора  $b_{ij}$  второй квадратичной формы не менее 3. Позднее она исследовала и случай  $r \leq 2$ . Этой задачей занимался также А. М. Лопшиц.

Общую задачу вложения метрики  $U_m$  в пространство  $E_{m+a}$  рассматривал Н. Н. Яненко. Для трижды дифференцируемых или вообще аналитических метрик изучаются проблема класса (определить класс метрики) и проблема изгиба (если  $V_m \subset E_{m+a}$  есть реализация метрики  $U_m$ , то будет ли эта реализация однозначной). Яненко нашел критерии класса для достаточно общего класса метрик, а также установил необходимые и достаточные условия изгиба для довольно широкого класса изгибаемых поверхностей.

## Вопросы геометрии „в целом“

Геометрия «в целом» — это одна из тех областей геометрии, где основные результаты за последнюю четверть века принадлежат советским математикам. Эти достижения связаны прежде всего с именами выдающихся геометров Б. Н. Делоне, А. Д. Александрова и Н. В. Ефимова, а также их многочисленных учеников.

Вопросы геометрии в целом были предметом исследований многих известных математиков (Коши, Миндинга, Кристоффеля, Либмана, Минковского, Гильберта, Вейля, Бляшке, Г. Леви и др.). В их работах возможности аналитического аппарата для решения вопросов этой области были практически исчерпаны. В качестве примера можно привести известную проблему Вейля о существовании замкнутой выпуклой поверхности с данной метрикой, заданной на многообразии, гомеоморфном сфере. Решение проблемы, намеченное в общих чертах самим Вейлем в 1916 г., было завершено только в 30-х годах Г. Леви путем использования очень тонких результатов построенной им аналитической теории уравнений типа Монжа — Ампера.

Стало совершенно ясно, что дальнейшее развитие геометрии в целом возможно только при условии применения совершенно новых методов исследования. Поиски таких методов были предприняты А. Д. Александровым и его учениками на пути общих идей развития современной математики и использования последних ее достижений в смежных областях (топологии, теории функций, функциональном анализе, дифференциальных уравнениях). Прекрасной иллюстрацией этого является построенная Александровым теория общих выпуклых поверхностей.

Под выпуклой поверхностью Александров понимает область на границе выпуклого тела, в частности это может быть вся граница (полная поверхность), расстояние между двумя точками на поверхности — точная нижняя грань длин соединяющих эти точки кривых. Кратчайшей называется кривая, длина которой равна расстоянию между ее концами на поверхности, а геодезической — кривая, допускающая покрытие кратчайшими. Для кривых  $\gamma$  и  $\gamma'$ , исходящих из общей точки  $O$  на выпуклой поверхности, определяется угол. Для этого на кривых

берутся точки  $X$  и  $X'$  и строится плоский треугольник со сторонами  $\rho(O, X)$ ,  $\rho(O, X')$ ,  $\rho(X, X')$  ( $\rho$  — расстояние на поверхности). Предел угла  $\alpha(X, X')$  этого треугольника, противолежащего стороне  $\rho(X, X')$ , по определению называется углом между кривыми  $\gamma$  и  $\gamma'$  в точке  $O$ .

Понятие угла между кривыми позволяет определить кривизну поверхности (интегральную кривизну). Для геодезического треугольника (стороны кратчайшие) кривизна по определению равна  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы треугольника. Оказывается, что она неотрицательна. Для произвольного же открытого множества кривизна определяется как верхняя грань суммы кривизн систем попарно неперекрывающихся треугольников, содержащихся в этой области. Затем понятие кривизны определяется для любых точечных множеств обычными приемами теории мер.

С помощью понятия угла Александров вводит важное понятие направления кривой. По определению кривая, исходящая из данной точки на выпуклой поверхности, имеет определенное направление в этой точке, если она сама с собой образует угол, равный 0. Оказывается, что существование направления у кривой в данной точке эквивалентно существованию полукасательной к ней в этой точке. Простые кривые, исходящие из данной точки  $O$  на выпуклой поверхности и не имеющие других общих точек, разбивают окрестность точки  $O$  на два «сектора». Если в точке  $O$  эти кривые имеют определенные направления, то за меру угла сектора принимается соответствующий угол между полукасательными кривых в точке  $O$  на развертке касательного конуса поверхности. Александров доказал, что угол сектора допускает эквивалентное чисто внутреннее определение и, таким образом, относится к внутренней геометрии поверхности.

Важнейшей внутренней характеристикой регулярной кривой на регулярной поверхности является ее геодезическая кривизна. При переходе к нерегулярным кривым и нерегулярным поверхностям это понятие теряет смысл. Однако оказывается возможным разумно обобщить понятие интегральной геодезической кривизны (поворот кривой). Это осуществляется следующей конструкцией. Пусть  $\gamma$  — простая кривая и  $\bar{\gamma}$  — ее отрезок с концами в точках  $A$  и  $B$ . Кривая  $\gamma$  разбивает окрестность  $\bar{\gamma}$  на две полуокрестности (условно — правую и левую). Если кривая  $\gamma$  имеет в точках  $A$  и  $B$  определенные направления со стороны  $\bar{\gamma}$ , то  $A$  можно соединить с  $B$  простой ломаной  $\Gamma$  в любой из этих полуокрестностей. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — углы, образуемые начальным и конечным звеньями ломаной с кривой  $\bar{\gamma}$ , а  $\Theta_n$  — углы между последующими звеньями ломаной. Тогда поворот кривой с данной стороны (справа, слева) определяется как предел выражения  $\alpha + \beta + \sum (\pi - \Theta_n)$  при условии, что ломаная  $\Gamma$  сходится к кривой  $\bar{\gamma}$ , оставаясь в соответствующей полуокрестности (правой, левой). Доказывается, что этот предел всегда существует и как функция  $\bar{\gamma}$  обладает свойством аддитивности.

Для поворота кривой А. Д. Александров устанавливает фундаментальную теорему, обобщающую известную теорему Гаусса — Бонне для регулярных поверхностей: кривизна  $\omega$  гомеоморфной кругу области





А. Д. Александров.

на выпуклой поверхности и поворот  $p$  ограничивающей ее кривой связаны соотношением  $\omega + p = 2\pi$ . Для введенной таким образом кривизны поверхности установлено ее фундаментальное свойство: она неотрицательна и вполне аддитивна на кольце борелевских множеств. При всей общности рассматриваемых поверхностей для них имеет место теорема, обобщающая известную теорему Гаусса: кривизна поверхности на любом борелевском множестве равна площади сферического изображения (сферическое изображение определяется с помощью внешних нормалей опорных плоскостей поверхности в точках данного множества).

Очевидно, понятие угла между кривыми и понятие кривизны, введенные для выпуклых поверхностей, имеют смысл для любого метризованного многообразия. Возникает естественная проблема: при каких

условиях такое многообразие изометрично некоторой выпуклой поверхности, иначе говоря, при каких условиях многообразие допускает изометрическое погружение в евклидово пространство в виде выпуклой поверхности. Ответ на этот вопрос дается следующей замечательной теоремой Александрова: если метрика многообразия внутренняя (расстояние между любыми точками равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих эти точки на многообразии) и кривизна неотрицательна (на любом множестве), то она допускает локальное изометрическое погружение в пространство в виде выпуклой поверхности. Полное метрическое многообразие с внутренней метрикой и неотрицательной кривизной реализуется полной выпуклой поверхностью. В частности, внутренняя метрика с неотрицательной кривизной, заданная на многообразии, гомеоморфном сфере, реализуется замкнутой выпуклой поверхностью. Эта теорема дает исчерпывающее решение проблемы Вейля в самых общих предположениях относительно заданной метрики.

Основным средством исследования А. Д. Александрова является приближение общей выпуклой поверхности выпуклыми многогранниками и приближение выпуклой метрики (внутренней метрики многообразия с неотрицательной кривизной) многогранными метриками. Весьма оригинально второе из указанных приближений. Оно состоит в следующем. Рассматриваемое многообразие триангулируется (разбивается на геодезические треугольники), и каждый геодезический треугольник заменяется плоским треугольником с теми же сторонами. Доказывается, что при переходе от геодезического треугольника к плоскому его углы не возрастают. Из неотрицательности кривизны исходного многообразия следует, что сумма углов треугольников, сходящихся в любой вершине триангуляции, не превосходит  $2\pi$ , а это значит, что

построенное указанным способом многообразие из плоских треугольников будет также многообразием неотрицательной кривизны. Метрика такого многообразия называется многогранной. Она отличается тем, что каждая точка многообразия имеет окрестность, изометричную конусу или плоскости, как у многогранника. Александров устанавливает свою теорему о реализуемости выпуклых метрик сначала для многообразий с многогранной метрикой (они реализуются на выпуклых многогранниках), а затем предельным переходом (измельчая триангуляцию) распространяет полученный результат и на общие многообразия.



С. П. Оловянишников.

Изучая многообразия с выпуклой метрикой, Александров широко пользуется методом, который он назвал методом склеивания. Его применение основано на следующей теореме Александрова (теорема «о склеивании»): многообразие  $M$ , образуемое при отождествлении границ многообразий  $M_k$  с выпуклой метрикой, само является многообразием с выпуклой метрикой, если отождествляемые участки границ имеют одинаковые длины, сумма поворотов неотрицательна и в точках, принадлежащих более чем двум многообразиям  $M_k$ , сумма углов (секторов) не превосходит  $2\pi$ . Эта теорема открывает неограниченные возможности конструирования многообразий с выпуклой метрикой и является мощным средством при решении многих трудных вопросов.

Применяя теорему «о склеивании» и теорему о реализации для метрик, заданных на гомеоморфном сфере многообразии, С. П. Оловянишников нашел все возможные реализации полной выпуклой метрики, заданной на многообразии, гомеоморфном плоскости. Такие метрики реализуются на бесконечных выпуклых поверхностях.

Если из какой-нибудь точки  $O$  бесконечной выпуклой поверхности, не являющейся цилиндром, провести всевозможные лучи внутрь тела, ограниченного этой поверхностью, то они заполняют некоторый выпуклый конус — предельный конус поверхности. Кривизна этого конуса равна кривизне поверхности. Лучом на бесконечной выпуклой поверхности называется бесконечная в одну сторону геодезическая, являющаяся кратчайшей на любом участке. Оказывается, направление луча при удалении на бесконечность сходится к направлению одной из образующих предельного конуса поверхности. Эта образующая называется предельной образующей для луча. Теперь упомянутая выше теорема Оловянишникова гласит: полная выпуклая метрика с кривизной  $\omega < 2\pi$  реализуется на бесконечной выпуклой поверхности с наперед заданным предельным конусом (кривизна  $\omega$ ) и наперед заданной предельной образующей для данного луча.



С. Э. Кон-Фоссен.

Другим эффективным применением теоремы «о склеивании» является установление возможности изгибаний любой выпуклой поверхности, которая получается из замкнутой удалением области с положительной кривизной (А. С. Лейбин).

А. Д. Александров показал, что метод склеивания может быть с успехом применен при решении различных экстремальных задач. Классические методы вариационного исчисления в таких задачах часто оказываются неприменимыми из-за нерегулярности объекта, на котором экстремум достигается. В качестве примера можно привести теорему Александрова о том, что среди всех выпуклых поверхностей с данной кривизной  $\omega < 2\pi$  и длиной ограничивающего контура  $L$  наибольшую площадь имеет прямой круговой конус.

Развитые Александровым методы исследования выпуклых поверхностей в евклидовом пространстве применимы в полном объеме к выпуклым поверхностям в пространствах постоянной кривизны — эллиптическом пространстве и пространстве Лобачевского. Это позволило Александрову перенести основные свои результаты, в частности теорему о реализуемости абстрактно заданной метрики выпуклой поверхностью, на случай выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны.

Регулярная выпуклая поверхность в пространстве постоянной кривизны  $K$  имеет в каждой точке гауссову кривизну не меньшую  $K$ . Соответственно, общая выпуклая поверхность имеет удельную кривизну<sup>4</sup> не меньшую  $K$ . Отсюда следует, что реализуемость метрики многообразия выпуклой поверхностью в пространстве постоянной кривизны  $K$  во всяком случае требует, чтобы удельная кривизна была не меньше  $K$ . Оказывается, что остальные условия реализуемости те же, что и для случая евклидова пространства. Именно, имеет место следующая теорема А. Д. Александрова: если метрика многообразия внутренняя и удельная кривизна не меньше  $K$ , то это многообразие допускает локальное изометрическое погружение в пространство постоянной кривизны  $K$  в виде выпуклой поверхности. Полное метрическое многообразие с внутренней метрикой и удельной кривизной не меньшей  $K$  реализуется полной выпуклой поверхностью. В частности, внутренняя метрика с удельной кривизной не меньшей  $K$ , заданная на многообразии, гомеоморфном сфере, реализуется замкнутой выпуклой поверхностью.

Теоремы Александрова о реализуемости абстрактно заданной метрики выпуклой поверхностью устанавливают лишь принципиальную

<sup>4</sup> Под удельной кривизной поверхности в области  $G$  понимается отношение интегральной кривизны поверхности в области  $G$  к площади этой области.

возможность реализации, но не дают ответа на вопрос о том, сколько таких реализаций. Изучение этого вопроса составляет проблему однозначной определенности, если реализация однозначна с точностью до движения (зеркального отражения), и проблему изгиба, если реализация возможна с нетривиальным произволом.

Проблемой однозначной определенности занимались многие известные математики. Первый относящийся к этой проблеме результат принадлежит Коши, который доказал однозначную определенность замкнутых многогранников. Он установил, что замкнутые выпуклые изометрические многогранники равны (1813 г.). Много времени спустя (середина XIX в.) Миндинг высказал гипотезу об однозначной определенности сферы. Соответствующая теорема была доказана в конце XIX в. Либманом, Гильбертом и Минковским. В 1927 г. Кон-Фоссен доказал однозначную определенность замкнутых регулярных выпуклых поверхностей (овалоидов) в следующей форме: замкнутые трижды непрерывно дифференцируемые изометричные строго выпуклые поверхности (с положительной кривизной) равны. Герглотц (1942 г.) ослабил требование регулярности в теореме Кон-Фоссена до требования двукратной дифференцируемости и снял требование строгой выпуклости. Александров показал, что условие двукратной дифференцируемости Герглотца можно ослабить до требования условия Гельдера на первые производные. Качественно новый результат в проблеме однозначной определенности принадлежит Оловянишникову, который доказал однозначную определенность замкнутых выпуклых многогранников в классе всех выпуклых поверхностей (а не только многогранников, как в теореме Коши).

Проблема однозначной определенности для выпуклых поверхностей получила исчерпывающее решение в работах А. В. Погорелова. Именно, он доказал следующие теоремы об однозначной определенности полных выпуклых поверхностей.

1. Замкнутые изометричные выпуклые поверхности равны.
2. Бесконечные изометричные выпуклые поверхности с полной кривизной  $2\pi$  равны.
3. Бесконечные изометричные, одинаково ориентированные выпуклые поверхности с полной кривизной  $\omega < 2\pi$ , общим предельным конусом и общей предельной образующей соответствующих по изометрии лучей равны.

Эти теоремы Погорелова отличаются от всех полученных ранее результатов предельной общностью поверхности, которая не подчиняется никаким другим ограничениям, кроме выпуклости. Это очень важно, так как в ряде случаев для их применения при решении принципиальных вопросов (см. ниже) приходится устанавливать равенство двух поверхностей, из которых одна регулярна (даже аналитическая), а другая, изометричная ей, только выпукла (регулярность априори не предполагается). Доказательство теорем Погорелова в своей существенной части опирается на принцип максимума, который можно сформулировать в виде следующей теоремы: если две изометричные выпуклые поверхности расположены над плоскостью  $xy$ , однозначно про-



А. В. Погорелов.

ектируются на эту плоскость и обращены выпуклостью в одну сторону, то функция  $z_1 - z_2$ , где  $z_1$  и  $z_2$  — координаты  $z$  соответствующих по изометрии точек поверхностей, не может достигать ни строгого максимума, ни строгого минимума во внутренних точках поверхностей.

Как указано выше, неполная поверхность (поверхность с краем) может не быть однозначно определенной (теорема Лейбниа). Для однозначной определенности таких поверхностей необходимо стеснить деформацию края тем или иным условием. Приведем две теоремы такого характера.

1. Если две изометричные выпуклые поверхности  $F_1$  и  $F_2$  расположены над плоскостью  $xy$ , однозначно на нее проектируются, обращены выпуклостью в одну сторону и соответствующие по изометрии

точки вдоль края поверхностей одинаково удалены от плоскости  $xy$ , то поверхности равны. В частности, изометричные выпуклые шапки (поверхность с плоским краем, однозначно проектирующаяся на плоскость края) равны (теорема Погорелова).

2. Если две изометричные выпуклые поверхности с краем, звездно расположенные относительно центра  $O$ , от которого они могут быть отделены плоскостью, таковы, что их соответствующие по изометрии точки вдоль края одинаково удалены от центра  $O$ , то поверхности равны (теорема Александрова и Сенькина).

А. В. Погорелов перенес основные теоремы об однозначной определенности на случай выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны. В частности, он доказал однозначную определенность замкнутых общих выпуклых поверхностей в эллиптическом пространстве и пространстве Лобачевского. Один из вариантов перенесения теорем об однозначной определенности на случай пространств постоянной кривизны основан на теореме Погорелова, согласно которой каждой паре  $F_1$  и  $F_2$  изометричных поверхностей пространства постоянной кривизны явным образом сопоставляется пара также изометричных поверхностей евклидова пространства  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , причем равенство поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  влечет за собой равенство поверхностей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  и обратно.

Проблема изгиба выпуклой поверхности с краем (т. е. проблема нетривиальных изометрических преобразований, не сводящихся к движениям и зеркальным отражениям) принципиально решается теоремой «о склеивании». Применение теорем об однозначной определенности дает решение этой проблемы и для непрерывных изгибов. Действительно, если построить для данной выпуклой поверхности  $F$  с краем  $\gamma$  ее выпуклую оболочку (граница минимального выпуклого тела, содержащего поверхность  $F$ ), то полученная замкнутая поверхность разби-

вается кривой  $\gamma$  на две области. Одна из этих областей есть поверхность  $F$ , а другая —  $\bar{F}$  локально изометрична плоскости (налагается на плоскость, может быть с перекрытием). Для того чтобы найти все изометрические преобразования  $F$ , достаточно найти все плоские области  $\bar{F}$ , допускающие подклеивание к  $F$ . Ввиду простоты условий подклеивания, решение такого вопроса в конкретных случаях обычно не сложно. В силу теоремы об однозначной определенности для замкнутых выпуклых поверхностей непрерывной деформации  $\bar{F}$  соответствует непрерывное изгибание  $F$ . Отсюда следует, что для получения всех непрерывных изгибаний  $F$  достаточно найти все непрерывные деформации подклеиваемой плоской области  $\bar{F}$ .

Применением теорем «о склеивании» и однозначной определенности устанавливается следующая теорема: выпуклую поверхность с внутренне выпуклым краем всегда можно непрерывным изгибанием деформировать так, чтобы ее сферическое изображение было произвольно заданной выпуклой областью  $\omega$  с площадью, равной кривизне поверхности, и чтобы сферический образ данной точки на краю поверхности имел наперед заданное положение на краю области  $\omega$  (А. В. Погорелов).

Среди полных выпуклых поверхностей изгибания допускают только бесконечные выпуклые поверхности с кривизной меньше  $2\pi$ . Если кривизна поверхности равна нулю, то она цилиндрическая. Вопрос об изгибании таких поверхностей решается достаточно просто. Для поверхности, у которой кривизна меньше  $2\pi$ , но отлична от нуля, вопрос об изгибании решается применением теоремы реализации Оловянишникова и соответствующей теоремы об однозначной определенности.

Классическая теория поверхностей рассматривает достаточно регулярные поверхности и соответственно регулярные метрики. С этой точки зрения изложенное выше решение проблемы реализации, данное А. Д. Александровым, не является ее решением в классической постановке. Так возникла проблема регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой. Сущность ее состоит в решении вопроса о том, в какой степени регулярность внутренней метрики выпуклой поверхности (регулярность коэффициентов  $g_{ij}(u, v)$  линейного элемента поверхности) предопределяет регулярность самой поверхности, т. е. регулярность вектор-функции  $r(u, v)$ , задающей поверхность.

Эта проблема рассматривалась в работах А. В. Погорелова, где и получила исчерпывающее решение в виде следующей теоремы: если выпуклая поверхность имеет регулярную метрику класса  $C^n$  ( $n \geq 2$ ) и положительную гауссову кривизну, то сама поверхность принадлежит по крайней мере классу  $C^{n-1+\alpha}$  при любом  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ ; если метрика поверхности аналитическая, то поверхность аналитическая. Аналогичная теорема имеет место для выпуклых поверхностей с регулярной метрикой в пространствах постоянной кривизны.

Благодаря теореме о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой метод «склеивания» А. Д. Александрова в применении к регулярным поверхностям стал методом классической теории поверхностей и получаемые этим методом решения различных проблем, в част-

ности проблемы реализации и изгибания, стали приемлемыми с точки зрения классической геометрии. Проблемы, рассматриваемые до сих пор для поверхностей евклидова пространства и пространств постоянной кривизны, могут ставиться и для общих римановых пространств. Соответствующие исследования, проведенные А. В. Погореловым, привели к следующим основным результатам.

1. Пусть  $R$  — полное трехмерное риманово пространство и  $M$  — замкнутое, гомеоморфное сфере риманово многообразие с гауссовой кривизной, всюду большей некоторой постоянной  $c$ . Тогда, если кривизна пространства  $R$  всюду меньше  $c$ , то  $M$  допускает изометрическое погружение в  $R$  в виде регулярной поверхности  $F$ . Более того, это погружение можно осуществить так, чтобы данный двумерный элемент  $\alpha$  многообразия  $M$  (точка  $S$  и пучок направлений в ней) совпал с заданным изометричным  $\alpha$  двумерным элементом  $\alpha'$  в пространстве  $R$  и поверхность  $F$  располагалась по заданную сторону площадки элемента  $\alpha'$ .

Если метрика пространства  $R$  и многообразия  $M$   $k$  раз дифференцируемы ( $k \geq 6$ ), то поверхность  $F$  дифференцируема по крайней мере  $(k - 1)$  раз. Если метрика пространства и многообразия аналитические, то поверхность  $F$  аналитическая.

2. Поверхность  $F$ , существование которой утверждается теоремой 1, двумерным элементом  $\alpha'$  определяется однозначно.

3. Если в полном римановом пространстве  $R$  с кривизной в двумерных площадках меньшей  $c$  даны две, гомеоморфные сфере регулярные изометричные поверхности  $F_1$  и  $F_2$  с гауссовой кривизной большей  $c$ , то одна поверхность допускает непрерывное изгибание в другую (это изгибание нетривиально, если пространство не обладает свободной подвижностью).

Наряду с изгибанием внимание многих геометров, начиная с Дарбу, привлекали бесконечно малые изгибания поверхности. Бесконечно малым изгибанием поверхности  $r = r(u, v)$  называется деформация вида  $r = r(u, v) + \varepsilon \tau(u, v)$ , при которой длины кривых на поверхности в начальный момент деформации ( $\varepsilon = 0$ ) стационарны. Если вектор-функция  $r = r(u, v)$ , задающая поверхность и изгибающее поле  $\tau(u, v)$  (поле скоростей деформации) регулярны, то они удовлетворяют уравнению  $dr d\tau = 0$ . Это условие вместе с тем достаточно для того, чтобы деформация поверхности указанного вида была бесконечно малым изгибанием. Для бесконечно малых изгибаний рассматриваются две основные проблемы: установление самой возможности (невозможности) нетривиальных бесконечно малых изгибаний (изгибающее поле не должно быть полем скоростей движения поверхности как целого) и изучение всей совокупности нетривиальных бесконечно малых изгибаний, если таковые существуют.

Исторически одной из первых проблем для бесконечно малых изгибаний была проблема жесткости замкнутых выпуклых поверхностей — установление невозможности у такой поверхности иных бесконечно малых изгибаний, кроме тривиальных. В случае регулярных поверхностей и регулярных изгибающих полей эта проблема была решена Либманом и Бляшке.



Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей впервые рассматривал А. Д. Александров. Основной его результат состоит в следующем. Для того чтобы векторное поле  $\tau$ , заданное на общей выпуклой поверхности, было изгибающим, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условию Липшица в каждой компактной области на поверхности и чтобы почти везде удовлетворялось уравнение  $dr \, d\tau = 0$ .

Отправляясь от этого результата, А. В. Погорелов исследовал основные проблемы для бесконечно малых изгибаний общих выпуклых поверхностей и доказал следующие теоремы.

1. Общая замкнутая выпуклая поверхность, не содержащая плоских областей, жесткая. Если же поверхность содержит плоские области, то она жесткая вне этих областей. Это значит, что всякое изгибающее поле такой поверхности является тривиальным вне плоских областей.

2. Пусть  $F$  — общая выпуклая поверхность, однозначно проектирующаяся в строго выпуклую область плоскости  $xu$ . Пусть опорные плоскости поверхности  $F$  образуют с плоскостью  $xu$  углы меньше  $\frac{\pi}{2} - \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ). Тогда, какова бы ни была функция  $h$ , заданная на краю поверхности  $F$  и удовлетворяющая условию Липшица, существует изгибающее поле  $\tau$  поверхности  $F$ , вертикальная составляющая которого на краю  $F$  равна  $h$ .

Если поверхность  $F$  не содержит плоских областей, то поле  $\tau$  определяется однозначно с точностью до тривиальной горизонтальной составляющей. Если же поверхность  $F$  содержит плоские области, то поле  $\tau$  определяется однозначно с точностью до указанной тривиальной составляющей вне этих плоских областей.

3. Регулярная поверхность с положительной гауссовой кривизной не допускает иных бесконечно малых изгибаний, кроме регулярных.

Именно, если поверхность принадлежит классу  $C^{n+\alpha}$ ,  $n \geq 2$ , то каждое ее изгибающее поле принадлежит классу  $C^{n+\alpha'}$ , где  $\alpha'$  — любое число меньше  $\alpha$ .

Существенные результаты в теории бесконечно малых изгибаний за последние годы принадлежат И. Н. Векуа. Его исследования по теории систем линейных уравнений эллиптического типа дают общие методы решения многих краевых задач теории бесконечно малых изгибаний.

Во всех рассмотренных выше проблемах речь идет о двух или большем числе объектов, находящихся в изометрическом соответствии: о многообразии с заданной на нем метрикой и реализующей эту метрику поверхности в проблеме погружения, двух изометричных поверхностях в проблеме однозначной определенности, непрерывном семействе изометричных поверхностей в проблеме изгибания. В применении к регулярному случаю речь идет соответственно о многообразиях и поверхностях с общим линейным элементом  $ds^2$ , т. е. первой квадратичной формой. Задание этой формы в нерегулярном случае соответствует заданию внутренней метрики.



Аналогично обстоит дело с третьей квадратичной формой поверхности — линейным элементом сферического изображения ( $dn^2$ ). Эта аналогия продолжается и в постановке соответствующих задач. Здесь можно говорить о существовании поверхности с данным сферическим изображением (с данной третьей квадратичной формой в применении к регулярному случаю), можно ставить вопрос о равенстве двух поверхностей с общим сферическим изображением, можно формулировать проблему жесткости и т. п. Однако во всех этих постановках задач есть существенное отличие, которое заключается в том, что помимо равенства третьих форм (общего сферического изображения) необходимо поставить дополнительное требование, так как само по себе совпадение третьих форм практически всегда может быть достигнуто для двух произвольных поверхностей по крайней мере локально. Одно из наиболее общих таких требований состоит в том, что главные радиусы кривизны поверхности должны удовлетворять уравнению вида  $f(R_1, R_2, n) = \varphi(n)$ , где  $n$  — внешняя нормаль поверхности.

Исторически первые результаты в указанном направлении исследования выпуклых поверхностей были получены Кристоффелем и Минковским.

Проблема Кристоффеля состоит в решении вопроса о существовании и единственности замкнутой выпуклой поверхности, сумма главных радиусов кривизны которой ( $f = R_1 + R_2$ ) является заданной функцией  $\varphi(n)$  единичного вектора внешней нормали  $n$ . Предполагая существование поверхности, Кристоффель нашел формулы, восстанавливающие эту поверхность посредством функции  $\varphi(n)$ . Вопрос о простых необходимых и достаточных условиях, которым надо подчинить функцию  $\varphi(n)$  для существования выпуклой поверхности, до сих пор остается открытым. Известно только, что тривиально необходимо

$$\varphi > 0, \quad \int n\varphi(n) d\omega = 0,$$

где интегрирование выполняется по площади единичной сферы. Одно из достаточных условий состоит в требовании, чтобы функция

$$H(x, y, z) = r\varphi\left(\frac{r}{|r|}\right), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

была выпуклой функцией (А. В. Погорелов).

Проблема Минковского заключается в решении вопроса о существовании и единственности замкнутой выпуклой поверхности с заданным произведением главных радиусов кривизны  $f = R_1 R_2 = \varphi(n)$ , или, что то же самое, с данной гауссовой кривизной  $k$  как функцией внешней нормали  $n$ . Минковский доказал, что если функция  $\varphi$  положительна и

$$\int n\varphi(n) d\omega = 0,$$

то существует и притом единственная с точностью до параллельного переноса замкнутая выпуклая поверхность, у которой гауссова кривизна как функция единичного вектора внешней нормали  $n$  совпадает с данной функцией  $\varphi(n)$ . Ю. А. Волков рассмотрел вопрос об устойчи-

ности решения проблемы Минковского. Дело в том, что выпуклые поверхности, поставленные в соответствие по параллельности внешних нормалей, близки, если достаточно близки кривизны в соответствующих точках. Это следует из единственности в теореме Минковского. Волков дал оценку близости поверхностей в зависимости от близости кривизн. В решении Минковского, как и в решении А. Д. Александрова проблемы Вейля, не выясняется регулярность поверхности, существование которой доказывается. Другое решение проблемы Минковского было дано Г. Леви, который доказал существование аналитической поверхности, если функция  $\varphi(n)$  аналитическая, и Миранда, доказавшим существование регулярной поверхности, если достаточно регулярна функция  $\varphi(n)$ .

А. В. Погорелов доказал, что любая выпуклая поверхность (не обязательно замкнутая) с положительной гауссовой кривизной, регулярно зависящей от внешней нормали  $n$ , является регулярной поверхностью. Именно, если функция  $\varphi(n)$  принадлежит классу  $C^n (n \geq 3)$ , то поверхность принадлежит по крайней мере классу  $C^{n-1}$ . Если функция  $\varphi$  аналитическая, то поверхность аналитическая. Им же доказано, что для любой выпуклой области  $G$  на единичной сфере, любой положительной функции  $\varphi(n)$ , заданной в этой области, и любой непрерывной функции  $h$  на границе области  $G$  существует выпуклая поверхность с краем, имеющая своим сферическим изображением область  $G$ , гауссову кривизну  $\varphi(n)$  и опорную функцию на границе  $G$ , равную  $h$ . Эта поверхность определена однозначно. Она регулярна, если регулярна функция  $\varphi(n)$ , а именно принадлежит классу  $C^{n-1}$ , если  $\varphi(n)$  принадлежит классу  $C^n (n \geq 3)$ .

А. Д. Александрову принадлежат наиболее общие теоремы единственности для выпуклых поверхностей, поставленных в соответствие по параллельности внешних нормалей. Последним достижением Александрова в этом направлении является следующая теорема: если для двух выпуклых поверхностей  $m$ -мерного евклидова пространства значения функции  $f(R_1, R_2, \dots, R_{m-1}; n)$  главных радиусов кривизны  $R_i$  и единичного вектора внешней нормали  $n$  совпадают, то поверхности равны с точностью до параллельного переноса. Функция  $f$  предполагается дифференцируемой и строго монотонной по переменным  $R_i$ . Эта теорема поглощает практически все известные результаты такого сорта, кроме, может быть, одного, принадлежащего также Александрову, а именно: две аналитические выпуклые поверхности трехмерного евклидова пространства равны, если индикатрисы кривизны в точках с параллельными внешними нормальями взаимно непомещаемы строго одна внутри другой. Функция  $f(R_1, R_2, n)$  не подчинена никаким условиям, кроме монотонности по переменным  $R_1, R_2$ .

Для случая многогранников в соответствующих вопросах роль функции  $f$  играет функция, определенная на гранях. Это может быть площадь, периметр или другая характеристика грани, обладающая монотонностью. Так, проблема Минковского для многогранников состоит в решении вопроса о существовании замкнутого выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней. Минковский начал

решение своей проблемы именно со случая многогранника. Наиболее общая теорема единственности для замкнутых выпуклых многогранников в рассматриваемой постановке принадлежит А. Д. Александрову и состоит в следующем: если грани двух замкнутых выпуклых многогранников поставлены в соответствие по параллельности внешних нормалей и взаимно непомещаемы одна строго внутри другой параллельным переносом, то такие многогранники равны и параллельно расположены. Отсюда следует единственность многогранника с данными направлениями и площадями граней (Минковский), единственность многогранника с данными направлениями граней и периметрами и др.

При всем разнообразии теорем единственности для замкнутых выпуклых многогранников, вытекающих из общей теоремы Александрова, известна только одна теорема существования — существование многогранника с данными направлениями и площадями граней. Любопытно, что трудность в этом вопросе состоит не столько в доказательстве, сколько в формулировке теоремы (Александров нашел стандартный способ доказательства). Иначе обстоит дело в случае бесконечных многогранников. Для них имеет место следующая весьма общего содержания теорема существования Погорелова.

Пусть  $P$  — бесконечный выпуклый многогранник, однозначно проектирующийся на плоскость  $xy$  и обращенный выпуклостью в сторону  $z < 0$ ;  $n_1, \dots, n_m$  — любые единичные векторы, направленные внутрь сферического изображения  $\omega(P)$  многогранника  $P$ ;  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  — любые положительные числа. Пусть  $\sigma$  — любая функция, определенная для выпуклых многоугольников с плоскостями направлений  $n_k$  и удовлетворяющая условиям:

- 1) функция  $\sigma$  непрерывна и неотрицательна;
- 2) если многоугольник  $Q_1$  является частью многоугольника  $Q_2$ , то  $\sigma(Q_1) \leq \sigma(Q_2)$ ;
- 3) если многоугольник  $Q_2$  получается из многоугольника  $Q_1$  сдвигом в направлении  $z > 0$ , то

$$\sigma(Q_1) \leq \sigma(Q_2).$$

Пусть, наконец,  $\Omega_P$  — совокупность всех бесконечных выпуклых многогранников, совпадающих с  $P$  на бесконечности, с конечными гранями  $\alpha_k$  заданных направлений  $n_k$ . Тогда, если среди многогранников  $\Omega_P$  найдется такой многогранник  $P_0$ , что

$$\sigma(\alpha_i) \leq \sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

и для каждого многогранника из  $\Omega_P$ , расположенного над плоскостью  $z = ax + by + c$ ,

$$\sum \sigma(\alpha_i) \geq \sum \sigma_i,$$

то существует и притом единственный многогранник в  $\Omega_P$ , у которого значения функции  $\sigma$  на конечных гранях равны заданным числам  $\sigma_i$ . Из этой теоремы следует, в частности, существование и единственность бесконечного выпуклого многогранника с данными плоскостями бесконечных граней, заданными направлениями и площадями (или пери-

метрами) конечных граней. (В случае теоремы с периметрами надо потребовать, чтобы каждое из чисел  $\sigma_i$  было не меньше удвоенного отрезка, лежащего в опорной плоскости направлений  $n_i$  многогранника из  $\Omega_P$  с вырожденными конечными гранями.)

Соответствию между двумя поверхностями по параллельности внешних нормалей в известном смысле двойственным является соответствие, устанавливаемое центральным или параллельным проектированием. Для поверхностей, находящихся в таком соответствии, могут быть поставлены аналогичные проблемы. В частности, А. Д. Александров установил существование и единственность выпуклого многогранника с вершинами на данных лучах и заданными кривизнами в вершинах. А. В. Погорелов доказал существование многогранника с вершинами на данных лучах и заданными значениями монотонной функции многогранных углов в вершинах. Оба результата переносятся на случай общих выпуклых поверхностей.

Все рассмотренные геометрические проблемы в их аналитическом истолковании приводят к соответствующим проблемам существования и единственности решений (может быть, обобщенных) для дифференциальных уравнений в частных производных. Обычно — это уравнение Монжа — Ампера эллиптического типа. Наличие такой связи позволяет дать исчерпывающее решение многих вопросов для этих уравнений. Основные результаты в этом направлении получены А. Д. Александровым, А. В. Погореловым, И. Я. Бакельманом.

Общие выпуклые поверхности представляют собой замыкание класса регулярных поверхностей с положительной гауссовой кривизной. Естественным замыканием класса всех регулярных поверхностей с точки зрения их внутренней геометрии являются многообразия ограниченной кривизны, введенные А. Д. Александровым. Многообразия ограниченной кривизны определяются условием ограниченности сумм избытков для любой системы попарно неперекрывающихся треугольников. Это аксиоматическое определение эквивалентно двум конструктивным, в силу которых многообразия ограниченной кривизны допускают приближение римановыми многообразиями или многогранниками с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами. Наличие таких трех эквивалентных определений позволяет применять к исследованию многообразий ограниченной кривизны методы функционального анализа, классической теории поверхностей и теории многогранников. А. Д. Александров развил внутреннюю геометрию многообразий ограниченной кривизны в том же объеме, что и внутреннюю геометрию выпуклых поверхностей. В разработке этой теории активно участвовал В. А. Залгаллер. Ему принадлежат отдельные результаты и доказательства.

Ю. Г. Решетняк нашел аналитический подход к исследованию многообразий ограниченной кривизны. Он ввел на этих многообразиях изотермические координаты и дал аналитическую форму линейного элемента многообразия. Отправляясь от этого линейного элемента, Решетняк нашел соответствующие аналитические выражения для различных геометрических характеристик, в частности для поворота кривой на многообразии.



Н. В. Ефимов.

Подобно тому как для выпуклых поверхностей, для многообразий ограниченной кривизны может быть поставлена проблема погружения (реализации). К сожалению, в этом направлении практически ничего не сделано. Найдены только отдельные классы поверхностей, являющиеся многообразиями ограниченной кривизны. Первый нетривиальный класс таких поверхностей был указан А. Д. Александровым — это поверхности, допускающие в обычном аналитическом задании  $z = z(x, y)$  представление функции  $z(x, y)$  в виде разности выпуклых. И. Я. Бакельман рассмотрел поверхности с обобщенными вторыми производными.

А. В. Погорелов изучил поверхности ограниченной внешней кривизны. Это гладкие поверхности с конечной площадью сферического изображения при учете кратности покрытия. Для таких поверхностей

естественно вводится внешняя кривизна, которая, как выясняется, совпадает с внутренней. Положительность внутренней кривизны обеспечивает локальную выпуклость поверхности. Локальная изометрия плоскости влечет за собой обычное для развертывающихся поверхностей строение с прямолинейными образующими и стационарной касательной плоскостью вдоль образующей.

Ю. Ф. Борисов рассмотрел поверхности класса  $C^{1+\alpha}$  и показал, что связь между внутренней метрикой поверхности и ее внешней формой существенно зависит от величины  $\alpha$ . Например, при  $\alpha > \frac{2}{3}$  поверхность класса  $C^{1+\alpha}$ , являющаяся многообразием ограниченной внутренней кривизны, является также поверхностью ограниченной внешней кривизны со всеми вытекающими отсюда последствиями (локальная выпуклость при условии положительности кривизны, регулярность при условии регулярности внутренней метрики и положительности кривизны и др.). Напротив, при достаточно малом  $\alpha$  ( $\alpha < \frac{1}{13}$ ) таких связей нет, что устанавливается примерами.

В настоящее время Н. В. Ефимов и его ученики (Э. Г. Позняк, Э. Р. Розендорн и др.) интенсивно развивают теорию поверхностей отрицательной кривизны. Эти исследования начались с попытки обобщить известную теорему Гильберта о том, что в трехмерном евклидовом пространстве не существует всюду регулярной полной поверхности с постоянной отрицательной гауссовой кривизной. Некоторые геометры считали (в том числе Кон-Фоссен), что условие постоянства кривизны в теореме Гильберта не существенно. Важно то, что кривизна отделена от нуля отрицательным числом. Однако доказать эту гипотезу долгое

время не удавалось. Первый шаг был сделан Н. В. Ефимовым, который доказал, что не существует поверхности строго отрицательной гауссовой кривизны ( $k \leq \varepsilon < 0$ ), которая однозначно проектировалась бы на всю плоскость  $xy$ . Более того, не существует даже такой поверхности над квадратом со стороной  $\frac{14}{\sqrt{\varepsilon}}$ .

Продолжая эти исследования, Ефимов дал исчерпывающее решение проблемы, доказав гипотезу Кон-Фоссена в полном объеме в виде следующей теоремы: не существует в трехмерном евклидовом пространстве поверхности без особенностей на конечном расстоянии и со строго отрицательной гауссовой кривизной ( $k \leq \varepsilon < 0$ ). В поисках доказательства этой теоремы им получены другие интересные результаты о поверхностях отрицательной кривизны. В качестве примера можно привести теорему о том, что не существует полной поверхности отрицательной кривизны, у которой градиент выражения  $\frac{1}{\sqrt{|k|}}$  ( $k$  — гауссова кривизна) был бы ограничен некоторой постоянной  $q_0 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Заметим, что эта теорема не перекрывается с предыдущей, так как кривизна  $k$  может быть сколь угодно малой.

При всей трудности рассматриваемых проблем и силе полученных результатов главным в работе Н. В. Ефимова о поверхностях отрицательной кривизны является разработка методов исследований. Есть основание думать, что развитие этого направления исследований приведет к большой содержательной теории поверхностей отрицательной кривизны. Об этом свидетельствуют недавно появившиеся результаты: теорема о погружении любой конечной области многообразия отрицательной кривизны в виде поверхности трехмерного евклидова пространства (Э. Г. Позняк), теорема о существовании в евклидовом пространстве полной поверхности класса  $C^{1,1}$ , которая имеет гладкую метрику с дифференцируемой гауссовой кривизной  $k \leq -1$  (Э. Р. Розендорн).

Н. В. Ефимову принадлежат фундаментальные теоремы об изгибании регулярных поверхностей, содержащих точки уплощения, т. е. точки, где нормальные кривизны поверхности равны нулю по всем направлениям. Для таких поверхностей он устанавливает различие между изометрией и наложимостью (проблема Фосса): поверхности могут быть изометричными и не допускать непрерывного изгибания одна в другую. Наконец, Ефимову принадлежит совершенно неожиданный результат о неизгибаемости поверхности «в малом». Он доказал следующую теорему: существуют поверхности (с точками уплощения), не изгибаемые «в малом» в аналитическом классе.

Наряду с теорией нерегулярных многообразий разрабатывалась теория нерегулярных кривых евклидова пространства (А. Д. Александров). Серьезные результаты получены при изучении кривых на многообразиях ограниченной кривизны. Особо следует отметить исследования И. М. Либермана по теории геодезических линий на выпуклой поверхности, в частности его фундаментальную лемму: пусть  $\gamma$  — геодезическая на выпуклой поверхности  $F$  и  $g$  — полупрямая, образующая



И. М. Либерман.

Пуанкаре о существовании трех замкнутых геодезических без кратных точек на двумерном римановом многообразии, гомеоморфном сфере.

А. В. Погорелов доказал существование на замкнутой выпуклой поверхности трех замкнутых квазигеодезических без кратных точек<sup>5</sup>. Этот результат был распространен А. Д. Александровым на случай многообразий ограниченной кривизны, гомеоморфных сфере. Александровым установлены также многочисленные теоремы о кривых на многообразиях ограниченной кривизны. В частности, им и В. В. Стрельцовым дана оцен-



О. К. Житомирский.

ка длины кривой, лежащей в гомеоморфной кругу замкнутой области многообразия ограниченной кривизны, в зависимости от размеров области, от положительной части ее кривизны и от собственного поворота самой кривой.

Получены некоторые результаты по теории римановых пространств «в целом». Приведем в качестве примера теорему Топоногова: если в полном  $m$ -мерном римановом пространстве  $R^m$  неотрицательной кривизны существует  $k$  линейно независимых прямых (линий, каждый отрезок которых — кратчайшая), то  $R^m$  есть прямое метрическое произведение  $k$ -мерного евклидова пространства и  $(m - k)$ -мерного риманова пространства, кривизна которого неотрицательна.

<sup>5</sup> Квазигеодезической называется линия, поворот каждой дуги которой на обе стороны неотрицателен. В частности, каждая геодезическая является квазигеодезической.

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

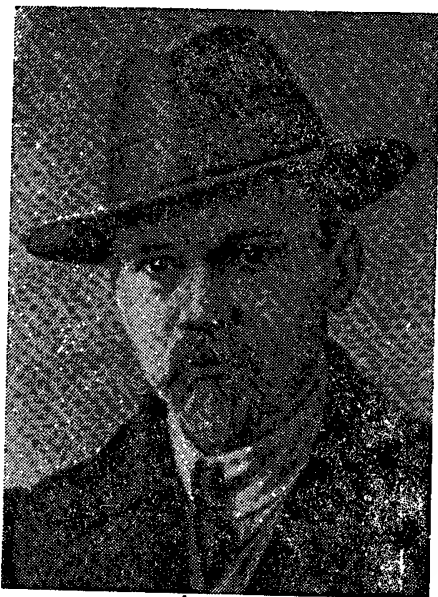
#### Проективная геометрия

Синтетическая проективная геометрия была включена в круг исследований московской геометрической школы одним из ее основателей профессором Московского университета В. Я. Цингером. В дальнейшем проективную геометрию успешно развивали также ученики Цингера К. А. Андреев и А. К. Власов. Первым крупным представителем советского периода, развивавшим синтетическое направление геометрии, является Н. А. Глаголев.

В течение многих лет Глаголев руководил научно-исследовательским семинаром по синтетической геометрии при Институте математики Московского государственного университета. Им разработана теория проективного исчисления (исчисление вурфов) и решена задача построения всех алгебраических коммутативных тел, элементами которых являются точки или группы точек пространства, причем арифметические действия выполнены с помощью проективных преобразований. Он определил проективное действие над вурфами как коллинеарное преобразование из некоторой группы. Требуя, чтобы каждое проективное действие подчинялось коммутативному и ассоциативному законам, Глаголев показал, что все коллинеации этой группы имеют общие двойные точки. Если же одно проективное действие  $/\pi/$  подчиняется распределительному закону по отношению к другому  $/\sigma/$ , то все коллинеации группы  $/\sigma/$  суть гомологии с общей плоскостью, проходящей через все двойные точки коллинеации  $/\pi/$ , кроме той, которая является модулем проективного действия. Глаголев назвал действие  $/\sigma/$  проективным сложением, а действие  $/\pi/$  — проективным умножением и показал, что проективному сложению соответствует лишь один тип коллинеаций, а проективному умножению — четыре типа. Он построил различные системы проективных гиперкомплексных чисел, соответствующих различным типам умножения. Им рассмотрены также вопросы проективного исчисления для случая  $n$ -мерного пространства.

Несколько работ Глаголева посвящено вопросам аксиоматики геометрии. В них показано, что полагаемая обычно в основу проек-





А. К. Власов.

тивной геометрии симметрическая система аксиом соединения Эрикссона недостаточна для построения на ней проективной геометрии, и приведен пример такой геометрической системы, в которой все аксиомы Эрикссона справедливы, но не справедливы дальнейшие геометрические предложения. Так, прямая, имеющая две общие точки с плоскостью, может не принадлежать этой плоскости. Глаголев указал пути исправления этой системы аксиом, построив новую систему. Уточненная им первая группа аксиом вошла в его учебник «Проективная геометрия» (1936 г.). Предложенные Глаголевым аксиомы обозначены буквами  $a$ ,  $b$  и цифрой 5.

В работе 1936 г. Н. А. Глаголев показал, что аналогично теореме Гильберта о свойствах проективной плоскости (недоказуемость теории Дезарга без простран-

ственных аксиом) линейная конгруэнция, взятая отдельно от линейного комплекса, теряет свои проективные свойства: можно построить конгруэнцию, обладающую свойствами линейной конгруэнции (через каждую точку пространства проходит один луч и в каждой плоскости лежит один луч) и в пересечении с двумя плоскостями, которые проходят через ее луч, не дающую коллинеарных полей.

Развитие аналитических методов обычной проективной геометрии и построение на их основе комплексной проективной геометрии поставило перед наукой задачу о зависимости проективных свойств от того поля, над которым построена геометрия. Больших успехов в решении этого вопроса добились советские математики А. Н. Колмогоров и Л. С. Понтрягин. Их работы проливают свет на аксиоматическое построение проективной геометрии, намеченное еще в конце XIX — начале XX в. Х. Штаудтом, Ф. Клейном, Д. Гильбертом и др.

А. Н. Колмогоров, воспользовавшись результатами Л. С. Понтрягина в топологической алгебре, построил (1932 г.) аксиоматику проективной геометрии, четко выделяющую ее топологическую сторону. При этом аксиомы порядка и непрерывности в проективной геометрии просто сводятся к обычным аксиомам топологического пространства.

Пусть даны три рода элементов (точки, прямые, плоскости); пусть, далее, они образуют топологические пространства  $R^0$ ,  $R^1$ ,  $R^2$  и связаны известными отношениями инцидентности. Вводятся следующие аксиомы:

- 1) пространства  $R^0$ ,  $R^1$ ,  $R^2$  бикомпактны;
- 2) справедливы обычные проективные аксиомы связи (инцидентности);
- 3) отношения инцидентности непрерывны (т. е., например, прямая как элемент  $R^1$  непрерывно зависит от двух ее точек как элементов  $R^0$ , пока эти точки не совпадают);

4) справедлива теорема Паскаля.

Указанные аксиомы определяют одно из двух проективных пространств: вещественное или комплексное. Доказательство этой теоремы основано на данной Л. С. Понтрягиным тополого-алгебраической характеристизации полей вещественных и комплексных чисел.

Важное значение имеют также работы П. К. Рашевского по аксиоматике двухмерной проективной геометрии (1940 г.). Он доказал интересное предложение, названное им теоремой о единственности проективной геометрии на плоскости.

Для построения проективной геометрии на плоскости в обычном смысле этого слова не достаточно основных аксиом принадлежности, аксиом порядка и непрерывности, так как они еще не определяют поведения прямых и любое семейство  $V^2$  замкнутых (самонепересекающихся) линий на плоскости, попарно пересекающихся в одной точке и соединяющих любые две точки плоскости, удовлетворяет такой аксиоматике. Чтобы выделить случай «настоящих» проективных прямых, необходимо добавить еще аксиому Дезарга, утверждающую, что если конфигурация Дезарга /10<sub>3</sub>/ осуществлена со всеми требуемыми ею инцидентностями, кроме, может быть, одной, то эта одна инцидентность автоматически имеет место. Рашевский доказал, что всякая попытка построить совокупность прямых на плоскости по принципу обязательного замыкания некоторой конфигурации непременно приводит к геометрии с аксиомой Дезарга или Паппа. Сформулированный результат верен не только при наличии обычных аксиом порядка и непрерывности, но и при гораздо более общих предположениях.

П. К. Рашевский рассмотрел плоские проективные геометрии, построенные при помощи аксиом связи и одной из конфигурационных аксиом, отличных от аксиом Дезарга и Паппа. Он исследовал некоторые случаи недезарговой геометрии элементов двух родов (точек и прямых), опирающихся на три аксиомы:

1) для каждой пары элементов одного рода существует один и только один элемент второго рода, им инцидентный;

2) каждый элемент одного рода инцидентен по крайней мере трем элементам другого рода;

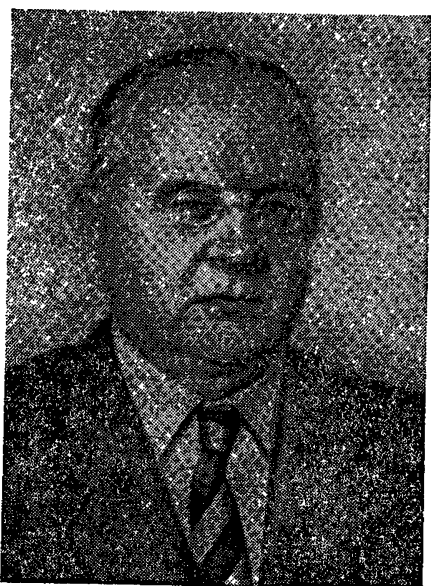
3) аксиому конфигурации, т. е. аксиому, требующую автоматического выполнения последней инцидентности в любом осуществлении какой-либо определенной конфигурации.

Рашевский специально рассмотрел две конфигурации:

1) три диагональные точки полного четырехугольника лежат на одной прямой;



Н. А. Глаголев.



А. А. Глаголев.

2) если точки  $A, B, C$  одной прямой перспективно (центр  $S$ ) связаны с точками  $A', B', C'$  другой прямой, то и после круговой подстановки над точками  $A', B', C'$  перспективное соответствие сохраняется (центр  $S$ ).

Обе геометрии носят дискретно-комбинаторный характер. Для первой геометрии Рашевский дал некоторый алгоритм, до известной степени воспроизводящий исчисление отрезков Гильберта, а для второй — указал возможность лишь двух случаев, каждого с конечным числом элементов, либо конфигурации  $/13_4, 13_4/$ , либо конфигурации  $/21_5, 21_5/$ .

К названному направлению исследований советских геометров в области проективной геометрии относятся работы Д. З. Гордевского. Он рассмотрел (1953 г.) интерпретации геометрии трехмерного проективного пространства с помощью окружностей в конформной плоскости на основе инверсий относительно окружности действительного, мнимого, нулевого или бесконечного радиуса. Предложил (1957 г.) новую систему аксиом инцидентности  $/A_1 - A_8/$  многомерного проективного пространства, без ограничения числа измерений пространства, а также систему аксиом инцидентности  $n$ -мерного проективного пространства  $/A'_1 - A'_8/$ . Доказал, что постулаты Ходжа — Пидо эквивалентны системе аксиом  $/A'_1 - A'_8/$  и что из аксиом  $/A'_1 - A'_8/$  вытекают постулаты Менгера. Гордевский считает, что система аксиом  $/A_1 - A_8/$  является аксиоматическим фундаментом бесконечномерного проективного пространства, а при некоторой модификации приводит к континууммерной проективной геометрии.

Одним из видных геометров синтетического направления в настоящее время является А. А. Глаголев. Его работы посвящены теории инволюций высших порядков, кривым третьего и четвертого порядков, вопросам, связанным с геометрическими исследованиями Бурместера, и другим проблемам.

Работа А. А. Глаголева, выполненная в 1946 г., является продолжением и дальнейшим развитием исследований А. К. Власова, относящихся к многозначным соответствиям. Теория кубической полярной системы очень сложна. По мнению Глаголева, эта сложность зависит от того обстоятельства, что более простой геометрический образ, состоящий из двух сопряженных троек точек, определяется при помощи инволюции  $I_3^2$ , т. е. при помощи более сложного геометрического образа. Глаголев дал новое определение сопряженности двух троек точек, независимое от понятия кубической полярной системы: две тройки точек  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  конического сечения  $C^2$  называются кубически сопряженными, или апо-

лярными, если вершины и брианшоновы точки  $D$  и  $D'$  двух треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ , образованных касательными в точках  $x, y, z$  и  $x', y', z'$ , лежат на одном и том же коническом сечении  $ABCD A'B'C'D'$ . Основываясь на своем определении сопряженности двух троек точек, Глаголев не только построил весьма простую синтетическую теорию инволюции  $I^2_3$ , но и расширил самое понятие сопряженности двух троек точек: ввел новое понятие о сопряженности двух троек точек относительно конического сечения. Согласно этому понятию две тройки точек  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  конического сечения  $C^2$  сопряжены относительно конического сечения  $M^2$ , если касательные в точках  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  к  $C^2$  образуют соответственно треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$ , обладающие тем свойством, что их вершины  $A, B, C, A', B', C'$  и их полярные относительно  $M^2$  точки  $D$  и  $D'$  лежат на одном и том же коническом сечении.

Новое понятие о сопряженности двух троек точек относительно конического сечения  $M^2$  дало Глаголеву возможность обобщить некоторые классические теоремы относительно кубической полярной системы, что, в свою очередь, позволило весьма расширить сферу применения теории кубических инволюций к решению задач линейной геометрии трехмерного пространства. Основные результаты, полученные им в этом направлении, состоят в следующем. Дается простое построение, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками точек конического сечения  $C^2$ . Полярное соответствие обладает такими особенностями: точкам прямой пространства соответствуют треугольники, описанные около конического сечения  $C^2$  и вписанные в одно и то же коническое сечение, которое можно считать соответствующим прямой пространства; всем же прямым пространства соответствует  $\infty^4$  конических сечений, образующих некоторую нелинейную квадратичную систему  $T$ . Глаголев осуществил преобразование системы  $T$  в саму себя, причем любое коническое сечение плоскости, отличное от основного конического сечения  $C^2$ , однозначно определяет такое преобразование системы  $T$  в саму себя.

Поскольку конические сечения системы  $T$  отображаются в прямые пространства, взаимно однозначное соответствие между коническими сечениями системы  $T$  отображается во взаимно однозначное соответствие между прямыми пространства. Если между кривыми системы  $T$  при помощи некоторого конического сечения  $M^2$  установлено взаимно однозначное соответствие, то, оказывается, в этом соответствии существует  $\infty^3$  кривых, соответствующих самим себе. Эти кривые системы отображаются в пространстве в  $\infty^3$  прямых, образующих линейный комплекс. Последнее обстоятельство позволило Глаголеву свести задачи по теории линейных систем линейных комплексов к задачам, относящимся к теории тангенциальных линейных систем конических сечений, разработанных А. К. Власовым. Тем самым Глаголев получил весьма простую синтетическую теорию линейных систем линейных комплексов.

А. А. Глаголеву принадлежит следующее определение общей кривой третьего порядка. Если на плоскости  $/\pi/$  даны два треугольника  $ABC$  и  $A'B'C'$  и если точка  $X$  и проходящая через нее прямая  $x$  движутся по



Д. Д. Мордухай-Болтовской.

плоскости  $/\pi/$  таким образом, что вурф  $X/ABCx/$  сохраняет одно постоянное значение, равное  $k$ , а вурф  $X/A'B'C'x/$  сохраняет другое постоянное значение, равное  $k'$ , то точка  $X$  описывает общую кривую третьего порядка. Основываясь на обобщенных им теоремах Шаля и Кремона о двух и трех лежащих в одной плоскости проективных пучках алгебраических кривых в случае, когда эти пучки приведены в алгебраическое многозначное соответствие, он предложил общий метод построения кремонова соответствия на плоскости и в пространстве и, в частности, показал, как из данного плоского кремонова соответствия  $m$ -го порядка можно получить кремоново соответствие  $2m^2$ -го порядка и определить основные характеристические числа последнего преобразования. Глаголев доказал также не-

способ построения точек Бурместера.

Важное исследование, посвященное кривым и точкам Бурместера принадлежит А. П. Котельникову (1927 г.). Вопрос о многозначных соответствиях в проективной геометрии рассмотрела А. И. Мандзюк. Она дала (1953 г.) критический обзор относящихся к многозначным соответствиям работ К. А. Андреева, А. К. Власова и А. А. Глаголева и попутно изложила новые существенные дополнения к этим работам.

Еще в 1910 г. Д. Д. Мордухай-Болтовской доказал, что если пересечь алгебраическую кривую  $k$ -го порядка кривыми  $m$ -го порядка, принадлежащими пучку с  $t$  бесконечно удаленными центрами, то геометрическое место середин арифметических центров точек пересечения есть прямая  $l$ . В 1926 г. он рассмотрел эту теорему более подробно для случая  $k = 3$  и  $m = 2$  и доказал для этого частного случая новые теоремы относительно прямой  $l$ , названной им квадратичным диаметром кривой третьего порядка. Все эти теоремы Мордухай-Болтовского с более общей точки зрения были рассмотрены Мандзюк в 1936—1938 гг. Она же показала, что три теоремы Хаарблейхера о треугольниках Понселе и две теоремы Огино Шузаки о многоугольниках Понселе являются лишь частным случаем ранее опубликованных теорем Николадзе и Мандзюк.

В последнее десятилетие появилось много исследований советских геометров, посвященных разработке идей Д. Д. Мордухай-Болтовского, К. А. Андреева, А. К. Власова, Н. А. Глаголева и А. А. Глаголева. Это, в частности, работы А. И. Мандзюк, Л. А. Спицыной, В. А. Маневича, Л. С. Кишкиной, Р. С. Лавровой, М. П. Лащенко, П. К. Бельтюкова.

Остановимся на результатах В. А. Маневича. Его работы представляют собой развитие исследований А. К. Власова. Изучая произвольное коллинеарное соответствие, заданное тремя главными точками  $U_1, U_2, U_3$

и парой соответственных прямых (или точек), Маневич показал, что любую сеть коллинеаций можно рассматривать как полярную систему некоторого пучка конических сечений, причем этот пучок не является единственным, и всякое коррелятивное соответствие можно рассматривать как произведение трех полярных соответствий. Он решил задачу о представлении коллинеации в пространстве в виде произведения двух полярных соответствий, дал определение пучка поверхностей 2-го порядка, как совокупности таких поверхностей, проходящих через пространственную кривую  $\gamma^4$  4-го порядка, и доказал эквивалентность этого определения определению пучка поверхностей 2-го порядка, приведенному А. К. Власовым. Маневич показал, что геометрическое место полюсов произвольной плоскости  $\alpha$  относительно пучка поверхностей 2-го порядка  $/F^2/$  есть пространственная кривая 3-го порядка  $f^3$ . К этому направлению относятся также работы Л. С. Кипкиной и Р. С. Лавровой.

Некоторые исследования посвящены уточнению и обобщению классических теорем проективной геометрии и конфигураций. Это в первую очередь работа С. С. Бюшгенса (1955 г.), в которой он дает новое доказательство теоремы Власова об ассоциированных пятерках плоскостей в четырехмерном пространстве и обобщает ее на  $n$ -мерный случай.

Обобщением теоремы Паскаля занимались М. П. Черняев (1951 г.), Д. Д. Мордухай-Болтовской (1953 г.), Т. Г. Ивницкий (1956—1957 гг.) и др. Черняев обобщил (1961 г.) теорему Андреева — Шретера. Обобщение теоремы Штаудта выполнила Н. В. Наумович (1956 г.). Д. З. Горdevский рассмотрел (1957 г.) обобщение конфигурации  $4_{-1}^4$  четырехмерного пространства на шести- и восьмимерное, а затем и на произвольное четномерное проективное пространство. Он изучил структуру полученной конфигурации  $4_{-1}^{2k, k-1}$ , которая образована  $(k-1)$ -мерными пространствами общего положения, расположенными в  $2k$ -мерном проективном пространстве.

Н. Ф. Четверухин изучил (1962 г.) вопрос о парах треугольников и теореме Дезарга. Прямые, проходящие через соответственные вершины двух негомологичных треугольников, определяют линейчатую поверхность второго порядка. Соответственные стороны треугольников определяют на прямой пересечения их плоскостей два проективных ряда. Он доказал, что двойные элементы этих рядов суть точки пересечения их носителя с указанной выше поверхностью.

З. А. Скопец исследовал (1963 г.) задачу об использовании пространственной кривой третьего порядка  $C_3$  для отображения прямых трехмерного проективного пространства  $\pi_3$  на проективную плоскость  $\pi_2$  в виде квадратичной системы четвертой степени кривых второго порядка, а также задачу об отображении четырехмерного пространства  $\pi_4$  на трехмерное пространство  $\pi_3$  посредством норм-кривой  $C_4$ . В работе доказывается, что кривая  $C_3$  в пространстве  $\pi_3$  с заданными на ней четырьмя точками  $A_i$ , точкой  $M$  и касательной  $t$  в ней определяет с точностью до гомологии  $(S, \pi_3)$  в пространстве  $\pi_4$  норм-кривую  $C_4$ , проходящую через точки  $A_i$  и  $S$  и имеющую в точке  $S$  касательную  $t$  и соприкасающуюся плоскость  $\sigma$   $(t, S)$ . С помощью построения определяются следы бисекан-

ты кривой  $C_4$  и следы двумерной трисеканты относительно  $\pi_3$ . Результат используется для доказательства теоремы о том, что если точки пересечения прямой со сторонами треугольника, вписанного в кривую второго порядка, спроектировать на кривую из точки, принадлежащей кривой, то треугольник, образованный касательными к кривой в полученных точках, и данный треугольник перспективны.

## Начертательная геометрия

Исследования в области начертательной геометрии в нашей стране за годы Советской власти проводились Н. А. Рыным, М. А. Дешевым, Е. С. Федоровым, Д. И. Каргиным, А. К. Власовым, Н. А. Глаголевым, Н. Ф. Четверухиным, А. И. Добряковым и др. Особенно большое влияние на развитие этих исследований оказали труды Н. Ф. Четверухина и А. И. Добрякова.

А. И. Добряков изучил весьма важные вопросы из области перспективы и теории теней и сформулировал новые теоремы, позволившие получить удобные способы построения перспективы и теней при изображении архитектурных фрагментов. Им разработана классификация поверхностей, применяющихся в технике, изложена общая методика построения линий их взаимного пересечения, а также исследованы другие вопросы из теории изображений.

Работы Н. Ф. Четверухина представляют собой результат исследований в области методов изображений. Его «Теория условных изображений» является значительным вкладом в начертательную геометрию. В этом труде изложен параметрический метод исследования изображений, принадлежащий Четверухину, новые, сформулированные им, геометрические понятия, например точечный базис, коэффициент неполноты. Этой же теме посвящены другие работы Четверухина: «Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии» (1958 г.), «Полные и неполные изображения» (1947 г.), «Основные теоремы аксонометрии с точки зрения условных изображений», «Позиционные задачи на проекционном чертеже» (1946 г.), «Стереометрические задачи в проекционном черчении» (1946 г.). Ему принадлежат теоремы о необходимых и достаточных условиях изображения двух систем прямоугольных декартовых осей координат (1933 г.), об условных изображениях координатных систем в многомерном пространстве (1936 г.) и новое доказательство основной теоремы аксонометрии. Написанная им совместно с Е. А. Глазуновым книга «Аксонометрия» (1954 г.) является основным трудом в этой области отечественной начертательной геометрии.

Исследования советских ученых по начертательной геометрии охватывают следующие проблемы: основную теорему аксонометрии и ее обобщения, параметрический метод исследования изображений, многомерную начертательную геометрию, начертательную геометрию в пространстве Лобачевского, проекции с числовыми отметками и топографические поверхности, векторные методы, принцип двойственности, номографирование и приборы для черчения.

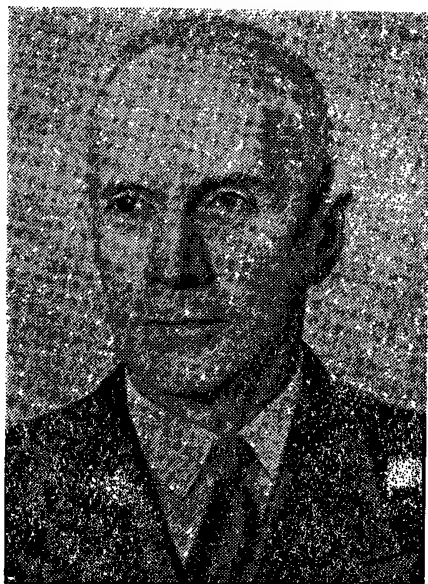


Основной теореме аксонометрии и ее обобщениям посвящены работы А. К. Владова, первым обратившего внимание на значение теоремы Польке — Шварца для аксонометрического проектирования, Н. А. Глаголева, доказавшего теорему о том, что всякий тетраэдр можно привести в параллельно-перспективное расположение с тетраэдром, подобным произвольно заданному второму тетраэдру, Н. Ф. Четверухина, Н. М. Бескина, Е. А. Мchedlishvili, В. Н. Первиковой, И. С. Джапаридзе, А. М. Лопшица.

Большой практический интерес представляет доказательство основной теоремы параллельной перспективы, которое дал Четверухин. Эта теорема формулируется так: полный четырехугольник и отрезок, соединяющий одну из его вершин с любой точкой, лежащей внутри треугольника, образованного тремя остальными вершинами, можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра, имеющего прямой трехгранный угол, и его высоты, опущенной из вершины упомянутого угла на противоположащую грань. Четверухину принадлежит элементарное доказательство теоремы Круппа о необходимых и достаточных условиях возможности центрального проектирования прямоугольного равнобедренного тетраэдра в полный четырехугольник, а также доказательство теоремы о двух тройках прямых: две тройки прямых с общим центром на плоскости изображений являются проекциями двух систем прямоугольных осей в пространстве в том и только в том случае, если они содержат раздельные пары. Им исследован и общий случай расположения двух систем в пространстве.

Н. М. Бескин уточнил другую теорему Круппа — о проектировании дезарговой конфигурации в пространстве в плоскую дезаргову конфигурацию. И. С. Джапаридзе дал весьма простое проективно-синтетическое доказательство этой теоремы. Е. А. Мchedlishvili получил необходимое и достаточное условие центральной проектируемости пространственной дезарговой конфигурации в плоскую конфигурацию путем использования свойств проективного соответствия.

Исследуя вопрос о точных данных на каждом проекционном изображении с учетом числа свободных его параметров, Н. Ф. Четверухин установил понятия позиционной и метрической полноты. Проекционное изображение называется позиционно-полным, или полным, если все отношения инцидентности элементов оригинала определены на его изображении. В противном случае изображение называется неполным, а число независимых параметров, определяющих недостающие элементы изображения, которые должны быть заданы, чтобы изображение стало полным, — коэффициентом неполноты. Полное изображение в параллельной



Н. Ф. Четверухин.



проекция определяет оригинал с точностью до аффинного преобразования. Если проекционное изображение определяет оригинал до преобразования подобия, то оно называется метрически полным, или метрически определенным. Число независимых параметров, которые должны быть заданы, чтобы данное изображение стало метрически определенным, называется параметрическим числом.

Четверухиным введено в теорию проекционных изображений понятие точечного базиса изображений. Точечный базис представляет собой систему независимых точек изображения, которая может заменить проекционное изображение в целом, так как все точки изображения могут быть построены по его точечному базису. Доказана теорема: точечный базис неполного изображения с коэффициентом неполноты  $k$  состоит из  $k + 4$  точек. Для любого полного изображения он содержит четыре точки.

Н. Ф. Четверухин доказал, что изображение многогранника, все углы при вершинах которого трехгранные, является всегда полным. Он же установил, что если  $n$  — число вершин многогранника ( $n > 4$ ), имеющего лишь треугольные грани, то его изображение является неполным с коэффициентом неполноты, равным  $n - 4$ . Из этих теорем, в частности, следует, что изображения многогранников, имеющих топологически эквивалентные сетки с тетраэдром, кубом или додекаэдром, являются полными, а изображения многогранников, имеющих топологически эквивалентные сетки с октаэдром или икосаэдром, — неполными. Четверухин ввел понятие аффинной жесткости многогранников. Многогранник назван аффинно-жестким, если всякий эквивалентный ему многогранник, имеющий грани, соответственно аффинные граням данного многогранника, является его аффинным преобразованием. Для того чтобы многогранник был аффинно-жестким, необходимо и достаточно, чтобы его проекционное изображение было полным.

О. А. Вольберг исследовал задачи построения инцидентных элементов с помощью «моногоенных», «бигенных» и т. д. фигур, задаваемых на вторичной проекции.

Разработанные Четверухиным теория условных изображений и параметрический метод исследования имеют большое теоретическое и прикладное значение и послужили основанием для дальнейших разработок методов изображений, проведенных его последователями.

Методы изображения геометрических образов в четырехмерном пространстве были предложены Е. С. Федоровым, успешно применены школой Н. С. Курнакова в физико-химическом анализе и развиты в ряде исследований.

В. Н. Лодочников, развивая векторный метод Федорова, разработал способ изображения на плоскости многомерных фигур, который был им использован при изображении многокомпонентных фигур. З. И. Прянишникова предложила изображать точки на плоскости чертежа многомерного пространства тройками коллинейных точек с параллельными линиями связи, что значительно упростило проекционные изображения на плоскости геометрических образов четырехмерного и  $n$ -мерного пространств и решение задач многомерной начертательной геометрии, кри-

сталлографии и физической химии. С именем В. П. Радищева связана разработка способа построения плоского комплексного чертежа для многомерных фигур, который отличается простотой построений и возможностью избежать наложения проекций.

В. Н. Первикова, исследуя центральные и параллельные проекции в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, дополненном несобственными элементами, пользовалась понятием обратной проекции, изучила геометрические образы, составленные линиями связи, сформулировала и доказала теорему об условиях инвариантности проекции точки при замене (расширении) «центрального пространства»  $P^{k-3}$  новым  $P^{n-3}$  ( $3 \leq k < n$ ). Ей принадлежит также обобщение теоремы Круппа о проектировании дезарговой конфигурации в пространстве в плоскую дезаргову конфигурацию на пространство  $n$  измерений при сохранении двумерной плоскости проекций. И. И. Котов применил неполные изображения в исследовании вопросов многомерной геометрии.

Д. Д. Мордухай-Болтовской применил начертательную геометрию трех- и четырехмерных пространств для выполнения геометрических построений в ограниченной области. Н. В. Наумович развила предложенный Мордухай-Болтовским метод использования многомерной геометрии при доказательстве теорем, получив ряд интересных результатов, в частности теорему о двух полных плоских  $k$ -вершинниках, которая при  $k = 4$  обращается в теорему Штаудта.

Д. Д. Мордухай-Болтовской, А. С. Смогоржевский, З. А. Скопец посвятили несколько своих исследований разработке вопросов начертательной геометрии в пространстве Лобачевского. Мордухай-Болтовской ввел основные понятия в указанной области. В работах З. А. Скопца рассмотрены способы проекционного отображения пространства Лобачевского на евклидову плоскость, дополненную несобственной плоскостью, и решены некоторые позиционные и метрические задачи. А. С. Смогоржевский изучил своеобразные проекции плоскости Лобачевского на евклидовой плоскости — так называемые интерпретации Бельтрами и Пуанкаре.

Одной из проблем начертательной геометрии являются проекции с числовыми отметками и топографические поверхности. Из исследований этого направления особенно важное значение имеют работы В. С. Соколова, И. И. Кстова, Н. А. Глаголева, Н. Н. Рыжова и др. Рыжов решил задачи, относящиеся к поверхностям каркаса, Котов показал приемы построения технических поверхностей, заданных контурами или сечениями («ключи»).

Векторные методы в начертательной геометрии развивали Б. Н. Горбунов, А. А. Уманский, занимавшиеся исследованием задач пространственной механики, и Я. Б. Шор, разработавший метод проекций с векторными отметками. Этот метод был применен в аксонометрии Н. Ф. Четверухиным. А. Д. Посвянский предложил «моторный репер», давший ему возможность свести операции с моторами к операциям над скалярами. Им исследовано также применение векторно-моторных методов к решению задач линейчатой геометрии и графо-аналитического метода — к вопросам зубчатых зацеплений.

Принципу двойственности посвящены работы И. И. Котова и А. И. Королевича. Котов предложил метод комбинированных изображений, при котором одно изображение получается проектированием оригинала на плоскость изображений, а другое — путем построения следов линейных элементов оригинала на этой же плоскости. Он доказал, что изображения фигур, двойственных в пространстве, двойственны на плоскости изображений.

А. И. Островский и М. В. Бурде разработали номограммы, по которым легко выбрать вид аксонометрической проекции, наиболее соответствующий данному предмету. В работах С. М. Колотова и его учеников изучены вопросы косоугольного проектирования, так называемого вспомогательного проектирования (по Колотову), которое во многих случаях дает возможность получить искомые результаты построения при меньшей загрузке чертежа линиями. М. Я. Громов исследовал графическими методами дифференциально-геометрические свойства кривых линий и поверхностей.

Разработка теории и конструкций механических приборов для вычерчивания различных кривых и преобразования проекций имеет важное значение, такие приборы упрощают процесс построения изображений. Существует большое количество механических приборов, изготовленных по различным схемам: шарнирно-рычажным, кулисно-рычажным, кривошипно-шатунным, зубчатым, зубчато-реечным, фрикционным, цепным и др. Д. Б. Тамбовцев разработал (1923 г.) оригинальный прибор для механического вычерчивания аксонометрических проекций, И. Н. Веняминов сконструировал (1933 г.) прибор для аксонометрического изображения тел, М. С. Розенталь построил (1940 г.) модель механического перспектографа. Приборами для черчения занимались также Д. Г. Барышев, А. А. Кон, С. А. Смирнов, А. М. Крот и др.

В последнее время разрабатываются более совершенные конструкции приборов, основанные на принципах электрифицирования с использованием средств электроники и кибернетики и открывающие большие возможности в автоматическом построении, контроле и распространении чертежей. В 1953 г. Г. А. Ушаков предложил проект прибора, с помощью которого можно трансформировать проекции с передачей изображения на заданное расстояние. В 1956 г. Г. Б. Вальц изготовил модель аксонографа, основанного на многополюсной магнитной передаче. Разработке теории и конструированию графических приборов посвящена книга Вальца и Ушакова «Механизмы для черчения и преобразования проекций» (1960 г.).

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

### ТОПОЛОГИЯ

#### Общая топология

Общая топология — это область математики, в которой изучаются общие геометрические свойства, сохраняющиеся при непрерывных и взаимно однозначных отображениях. Аксиоматически определяемыми объектами изучения общей топологии являются пространства и их непрерывные отображения. Под топологическим пространством понимается множество объектов произвольной природы, называемых точками, в котором выделена некоторая система подмножеств, называемых открытыми множествами пространства. Эта система должна включать в себя все пространство и пустое множество и содержать в себе вместе с любыми двумя множествами их пересечение и вместе с любым набором множеств множество, которое является их объединением. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологического пространства  $X$  в топологическое пространство  $Y$  называется непрерывным, если полный прообраз  $f^{-1}U$  всякого открытого в  $Y$  множества  $U$  открыт в  $X$ . Два пространства  $X$  и  $Y$  называются топологически эквивалентными или гомеоморфными, если существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение пространства  $X$  на пространство  $Y$ . Гомеоморфные пространства обладают одинаковыми свойствами с точки зрения топологии.

Потребность в развитии общего подхода к понятию пространства возникла довольно давно — в конце прошлого и начале нынешнего столетия. Этот подход оказывается необходимым уже при изучении евклидова пространства. Например, такое свойство евклидова пространства, как число измерений, является топологическим (т. е. сохраняется при гомеоморфных отображениях). Общий подход к понятию пространства и непрерывного отображения необходим и при изучении фигур или множеств, расположенных в евклидовых пространствах. В связи с развитием теории функций действительного переменного и функционального анализа возникли и другие объекты — функциональные пространства и их подмножества, — для исследования которых также требуются понятия и методы общей топологии. Первоначально функциональные пространства, встречающиеся в анализе, были метризуемыми. Однако вскоре естественное развитие анализа привело к изучению и таких функциональных пространств, которые не допускают метризации.



П. С. Александров.

В настоящее время топологические методы исследования применяются не только в анализе, но и во многих других отраслях математики. Значительной является роль топологических методов в дифференциальных уравнениях. В результате синтеза идей общей топологии и функционального анализа возникла теория топологических векторных пространств. Большое место в алгебре, геометрии и функциональном анализе занимают исследования различных непрерывных алгебраических образований — групп, полугрупп, колец и т. д. Абстрактные топологические пространства неожиданным образом могут возникать и применяться в самых различных областях математики. Примером может служить топология Зариского на алгебраическом многообразии.

Общепринятое ныне понятие топологического пространства возникло не сразу. Появившиеся ранее метрические пространства, которые и по сей день являются важным предметом изучения общей топологии, не могли удовлетворить математиков не только потому, что они не охватывают все возникающие в исследованиях пространственные объекты. Необходимость рассмотрения общих топологических пространств объясняется также и самим внутренним логическим развитием концепции пространства, потому что, как правило, наибольший интерес уже у метрических пространств представляют те их свойства, которые не зависят от специфики метрики, а являются топологическими. Поскольку метрика не сохраняется при гомеоморфизмах, вполне естественно возникла задача аксиоматизировать такую структуру, требующую инвариантности которой как раз выделяло бы класс топологических преобразований пространства. Такой структурой и является система открытых множеств (топология) на пространстве.

Первые достаточно общие определения топологического пространства даны в работах Фреше, Рисса и Хаусдорфа. Окончательно определение топологического пространства было сформулировано польским математиком К. Куратовским и П. С. Александровым.

Настоящий обзор посвящен достижениям советских математиков в области топологии, работы которых составляют глубокий и обширный вклад в развитие всей топологии в целом. основополагающие труды П. С. Александрова и П. С. Урысона, относящиеся к началу 20-х годов, сыграли огромную роль в развитии топологии как в нашей стране, так и за рубежом. Под влиянием этих работ в нашей стране в 20-е годы сформировалась сильная топологическая школа. Весной 1924 г. в Московском университете П. С. Александровым и П. С. Урысоном был основан первый в СССР топологический семинар. К сожалению, П. С. Уры-

сону не пришлось долго руководить семинаром — 17 августа 1924 г. он погиб. Под руководством Александрова и его сотрудников этот семинар работает и ныне. В 20—30-е годы появились работы П. С. Александрова, А. Н. Тихонова, Л. С. Понтрягина, А. Н. Колмогорова и других советских математиков, которые оказали решающее влияние на развитие всей топологии. Исследования советских топологов последних десятилетий вызывают большой интерес у широкого круга советских и зарубежных специалистов и занимают достойное место во всей международной математической литературе.



П. С. Урысон.

Обзор разделен на четыре части: общая теория топологических пространств, непрерывные отображения пространств, теория размерности и теория равномерных пространств и бикомпактных расширений. Разумеется, это деление в значительной степени условно, а порой и совершенно искусственно, поскольку можно привести немало примеров таких результатов, которые с равным основанием можно было бы отнести сразу к нескольким из указанных разделов. Естественно также, что обзор не может претендовать на исчерпывающую полноту. Пришлось отказаться от включения в него не только многих значительных результатов, но даже целых глав топологии (например, теории континуумов). Часто из нескольких одинаково интересных результатов приходилось выбирать тот, который допускает формулировку, более краткую и более доступную для читателя, не являющегося специалистом-топологом.

## 1

### Общая теория топологических пространств

*База и вес.* Под заданием топологии на множестве понимают выделение системы всех открытых подмножеств. Однако задать топологию на пространстве можно и с помощью выделения значительно меньшей системы множеств — базы топологического пространства. Система открытых множеств пространства  $X$  называется базой, если для любой точки  $x \in X$  и любой ее окрестности  $U$  в этой системе найдется такое множество  $V$ , что  $x \in V \subset U$  (окрестностью называется любое открытое множество, содержащее точку). Всякое открытое множество, очевидно, является объединением некоторых множеств из базы. Весом топологического пространства называется наименьшая мощность базы этого пространства. Пространства счетного веса называются также пространствами со счетной базой.



Основной топологический семинар МГУ. П. С. Александров, О. В. Локуциевский (1-й ряд), Б. А. Ефимов, В. И. Пономарев (2-й ряд). 1967 г.

Всякое множество в  $X$ , дополнение к которому является открытым, называется замкнутым в  $X$ . Точка  $x$  называется предельной для множества  $A \subset X$ , если всякая окрестность этой точки пересекает множество  $A$ . Замыканием множества  $A$  в пространстве  $X$  называется множество  $[A] \subset X$ , состоящее из всех предельных точек множества  $A$ ; очевидно,  $A \subset [A]$ . Замкнутые множества пространства  $X$  полностью характеризуются тем, что содержат все свои предельные точки.

*Аксиомы отделимости.* Топологические пространства изучаются с различных точек зрения, в зависимости от тех задач, в которых они возникают. При этом пространства, которые приходится рассматривать, как правило, удовлетворяют различного рода дополнительным условиям, например условиям типа компактности, условиям веса, размерности, локальным условиям и др. Изложению таких условий посвящена, фактически, большая часть настоящего параграфа.

Начнем с рассмотрения условий, которые получили название аксиом отделимости. Впервые классификация топологических пространств с точки зрения отделимости была дана в работах П. С. Александрова и П. С. Урысона. Перечислим наиболее употребительные из этих аксиом.

Аксиома  $T_0$  (А. Н. Колмогоров): из любых двух точек пространства по крайней мере одна обладает окрестностью, не содержащей другую точку.  $T_0$ -пространства нашли применение, в частности, в теории проекционных спектров Александрова.

Аксиома  $T_1$ : каждая из любых двух точек пространства имеет окрестность, в которой не содержится другая точка. Класс  $T_1$ -пространств существенно уже класса  $T_0$ . Пространство принадлежит классу  $T_1$  тогда

и только тогда, когда всякое одноточечное множество в этом пространстве замкнуто.

Аксиома  $T_2$  (Хаусдорф): всякие две точки пространства имеют непересекающиеся окрестности. Пространства этого класса называются хаусдорфовыми. Класс хаусдорфовых пространств играет существенную роль в общей топологии.

Аксиома  $T_3$ : для всякой точки и любого не содержащего ее замкнутого множества у этой точки найдется окрестность, замыкание которой не пересекается с этим множеством.  $T_1$ -пространства этого класса называются регулярными. Значение регулярных пространств видно из следующего классического результата П. С. Урысона<sup>1</sup>: пространство счетного веса тогда и только тогда является регулярным, когда оно гомеоморфно некоторому подмножеству гильбертова параллелепипеда (таким образом, класс регулярных пространств со счетной базой исчерпывается подмножествами гильбертова векторного пространства).

*Тихоновское произведение и аксиома  $T_p$ .* Одним из важнейших классов топологических пространств является класс вполне регулярных пространств — это  $T_1$ -пространства, удовлетворяющие аксиоме  $T_p$  (см. ниже). Вполне регулярные пространства введены А. Н. Тихоновым и поэтому называются также тихоновскими пространствами.

Аксиома  $T_p$ : для всякой точки  $x \in X$  и любого не содержащего  $x$  замкнутого множества  $F \subset X$  существует непрерывная на пространстве  $X$  функция  $f$ , такая, что  $fx = 0$  и  $fy = 1$  для всех  $y \in F$  (говорят, что эта функция отделяет  $x$  и  $F$ ).

Прежде чем объяснить значение вполне регулярных пространств в топологии, напомним определение бесконечного произведения топологических пространств, также принадлежащее А. Н. Тихонову.

Пусть  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$  — некоторое множество топологических пространств и  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  — множество, состоящее из всех функций  $x$ , опре-

деленных на  $A$  и таких, что  $x(\alpha) = x_\alpha \in X_\alpha$  для всякого  $\alpha \in A$ . Обозначим через  $\bar{U}_\alpha$  множество всех таких  $x \in X$ , для которых  $x_\alpha$  принадлежит фиксированному открытому множеству  $U_\alpha$  из пространства  $X_\alpha$ . Множества в  $X$  вида  $\bar{U}_\alpha$  и их всевозможные конечные пересечения можно взять в качестве базы открытых множеств. Нетрудно проверить, что таким способом на  $X$  определяется топология. Топологическое пространство  $X$  называется произведением топологических пространств  $X_\alpha$ . В качестве пространств  $X_\alpha$  можно взять набор единичных отрезков  $I = [0, 1]$ . Получающееся при этом топологическое произведение называется тихоновским параллелепипедом (при счетном  $A$  он превращается в гильбертов параллелепипед).

Оказывается, что на всяком вполне регулярном пространстве каждое множество функций, отделяющих точки от замкнутых множеств, определяет отображение в некоторый тихоновский параллелепипед, которое является гомеоморфизмом. Если при этом топологический вес пространства равен некоторому кардинальному числу  $\tau$ , то существует

<sup>1</sup> Приводим его в усиленной формулировке А. Н. Тихонова.



гомеоморфное отображение пространства  $X$  в параллелепипед  $I^n$  — произведение  $n$  единичных отрезков  $I$ . Таким образом, для вполне регулярных пространств справедливо следующее обобщение отмеченного выше результата П. С. Урысона: топологическое пространство веса  $n$  тогда и только тогда является вполне регулярным, когда оно гомеоморфно некоторому подмножеству тихоновского параллелепипеда  $I^n$ . Поскольку пространство  $I^n$  бикомпактно, то из этой теоремы Тихонова вытекает, что вполне регулярные пространства обладают бикомпактными расширениями (достаточно взять замыкание в  $I^n$  гомеоморфного образа пространства  $X$ ). Вполне регулярные пространства являются естественным классом пространств, который возникает в равномерной топологии, теории бикомпактных расширений, топологической алгебре и других разделах топологии.

*Нормальные пространства (П. С. Александров, П. С. Урысон).* Аксиома  $T_4$ : всякие два непересекающиеся замкнутые множества пространства имеют непересекающиеся окрестности.  $T_1$ -пространства, удовлетворяющие этой аксиоме, называются нормальными.

Как показал П. С. Урысон, на самом деле в нормальных пространствах непересекающиеся замкнутые множества отделимы функционально. Более того, справедлива следующая доказанная Урысоном теорема: ограниченная непрерывная функция, заданная на замкнутом подмножестве нормального пространства, может быть продолжена с этого подмножества на все пространство. Н. Б. Вedenisov показал, что условие ограниченности продолжаемой функции можно опустить.

Всякое нормальное пространство является вполне регулярным. Однако класс нормальных пространств существенно уже класса вполне регулярных пространств, более того, подмножество нормального пространства может, вообще говоря, не быть нормальным пространством (в то время как всякое подмножество вполне регулярного пространства вполне регулярно). Топологическое пространство, в котором всякое подмножество нормально, называется наследственно нормальным.

Оказалось, что многие классические результаты общей топологии (например, многие результаты из теории размерности), первоначально полученные для более узких классов пространств, наиболее естественно формулировать и доказывать именно для нормальных пространств.

На вполне регулярных и нормальных пространствах уже существует достаточно широкий запас функций, чтобы строить анализ на этих пространствах. Вполне регулярные и нормальные пространства широко используются в теории функций и функциональном анализе. И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров показали, что всякий бикомпакт полностью определяется своим кольцом непрерывных функций.

*Паракомпактные пространства.* Одним из наиболее важных классов топологических пространств, выделенных за последние десятилетия, является класс паракомпактных пространств. Эти пространства введены Дьедонне в 1944 г.<sup>2</sup> и играют существенную роль в теории не-

<sup>2</sup> Лежащее в основе их определения понятие локально конечного покрытия было введено П. С. Александровым еще в 1924 г.

прерывных отображений, теории размерности, теории гомологий общих пространств и многих других разделах топологии.

Пространство называется паракомпактным, если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Напомним, что покрытием пространства называется любая система множеств, объединение которых есть все пространство. Покрытие называется открытым, если все входящие в него множества открыты. Система множеств называется локально конечной, если у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств из этой системы. Существенную роль в теории метрических пространств играет тот факт, что всякое метризуемое пространство паракомпактно (Стоун).

Наряду с паракомпактными пространствами в литературе часто рассматриваются следующие классы пространств:

1. Счетно паракомпактные пространства — во всякое счетное открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие; представляет большой интерес гипотеза Даукера о том, что всякое нормальное пространство является счетно паракомпактным.

2. Сильно паракомпактные пространства — во всякое открытое покрытие можно вписать звездно конечное открытое покрытие (это значит, что каждый элемент покрытия пересекается лишь с конечным числом других элементов покрытия); сильно паракомпактные пространства (их называют также звездно паракомпактными) применяются в некоторых теоремах метризации и в теории размерности (Ю. М. Смирнов).

3. Слабо (или точечно) паракомпактные пространства — во всякое открытое покрытие можно вписать точечно конечное открытое покрытие (это значит, что каждая точка содержится лишь в конечном числе элементов покрытия).

*Свойства типа компактности.* Паракомпактность является ограничением иного рода, по сравнению с ограничениями, сформулированными в аксиомах отделимости. Паракомпактность — это одно из свойств «типа компактности».

Существенное влияние на развитие общей топологии оказало введенное П. С. Александровым понятие бикомпактности. Александров и Урысон создали теорию бикомпактных пространств. Бикомпактные пространства — один из главных объектов исследования в общей топологии — и в настоящее время находятся в центре внимания математиков. Они играют важную роль в теории размерности, теории гомологий и других разделах топологии, а также имеют основное значение в функциональном анализе. Как отмечалось выше, всякое вполне регулярное пространство является подмножеством некоторого бикомпактного хаусдорфова пространства.

В настоящее время наиболее распространенным является следующее определение бикомпактного пространства: пространство называется бикомпактным, если из всякого открытого покрытия этого пространства можно выбрать конечное число покрывающих множеств.

Таким образом, в основу определения бикомпактного пространства положено утверждение леммы Бореля — Лебега о выделении конеч-

ного покрытия из любого открытого покрытия замкнутого ограниченного множества евклидова пространства. В классической теореме Больцано — Вейерштрасса устанавливается следующий факт: замкнутые ограниченные множества среди множеств евклидова пространства характеризуются тем, что в них всякая последовательность точек содержит в себе сходящуюся подпоследовательность. Это утверждение было положено Фреше в основу определения компактности для метрических пространств и равносильно бикомпактности для этих пространств. В основу первоначального определения бикомпактного пространства П. С. Александровым было положено следующее условие, являющееся обобщением теоремы Больцано — Вейерштрасса: для каждого бесконечного множества  $M$  пространства  $X$  в этом пространстве должна существовать точка полного накопления, т. е. такая точка  $x$ , что всякая ее окрестность пересекает  $M$  по множеству, мощность которого равна мощности множества  $M$ . Александров и Урысон доказали эквивалентность этого определения определению на языке покрытий, а также эквивалентность бикомпактности пространства следующему условию, накладываемому на пространство: всякая вполне упорядоченная система непустых вложенных друг в друга замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Последнее, очевидно, является обобщением леммы о вложенных отрезках.

Определение компактности, данное Фреше для метрических пространств, можно без изменения применять и к общим топологическим пространствам. Однако в общем случае компактные пространства могут не быть бикомпактными: компактность топологического пространства эквивалентна требованию, чтобы из любого счетного открытого покрытия этого пространства можно было выбрать конечное покрытие. Аналогично, компактность топологического пространства эквивалентна тому, что любая счетная последовательность вложенных друг в друга непустых замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

В литературе можно встретить и другие классы пространств, родственные бикомпактным, например псевдокомпактные, квазикompактные. Различия между всеми этими классами стираются, если не выходить за пределы метризуемых пространств; в то же время каждый из них представляет самостоятельный интерес в общем случае. Бикомпактные пространства занимают главное место среди них и играют такую же роль в общей топологии, как компакты в классе метризуемых пространств.

Наибольший интерес представляют бикомпактные хаусдорфовы пространства, которые называются бикомпактами. Всякий бикомпакт автоматически является нормальным пространством.

Нетрудно заметить, что в определениях этого и предыдущего пунктов перед нами одна и та же схема — требуется, чтобы пространство обладало следующим свойством: в любое покрытие этого пространства некоторого специального типа можно вписать покрытие другого специального типа. Ю. М. Смирнов предложил называть подобные свойства топологического пространства свойствами типа компактности. К ним относится, например, даже свойство иметь размерность  $\dim$ , не превосходящую данного числа  $k$ . Отметим еще два из таких свойств.

1. Компактность в данном отрезке мощностей  $[\alpha, \beta]$ : в любое открытое покрытие мощности  $m$ , такой, что  $\alpha \leq m \leq \beta$ , можно вписать открытое покрытие мощности меньшей  $\alpha$ . Определение компактности в данном отрезке мощностей было дано первоначально на языке точек полного накопления (П. С. Александров, П. С. Урысон). Как показал недавно А. С. Мищенко, оба эти определения, хотя и не совпадают, тесно связаны между собой, а также с проблемой Даукера о счетно паракompактных пространствах (см. предыдущий пункт). Интересные результаты о пространствах, компактных в данном отрезке мощностей, получены Ю. М. Смирновым.

2. Финальная компактность: в любое открытое покрытие пространства можно вписать счетное открытое покрытие (частный случай предыдущего определения)<sup>3</sup>. Финально компактные пространства называются иногда также пространствами Линделефа.

К свойствам типа компактности относится и свойство  $H$ -замкнутости, введенное и исследованное П. С. Александровым и П. С. Урысоном. Хаусдорфово пространство называется  $H$ -замкнутым, если оно замкнуто во всяком объемлющем его хаусдорфовом пространстве.  $H$ -замкнутым пространствам посвящены также работы А. Н. Тихонова, А. Д. Александрова, С. В. Фомина, Н. А. Шанина.

Наконец, отметим еще один важный класс топологических пространств — локально бикompактные пространства. Пространство называется локально бикompактным, если каждая точка этого пространства обладает окрестностью с бикompактным замыканием. Локально бикompактные пространства ввел впервые П. С. Александров. Им было показано, что всякое локально бикompактное хаусдорфово пространство можно получить «выкалыванием» точки из некоторого бикompакта, называемогося одноточечным бикompактным расширением этого пространства.

*Проблема метризации.* Метрические пространства являются частным случаем топологических пространств. Элементарные примеры показывают, что одно и то же топологическое пространство может быть получено из нескольких различных метрических пространств, т. е. с одной и той же топологией совместимы разные метрики. Если на топологическом пространстве может быть задана хотя бы одна метрика, то говорят, что оно метризуемо. Естественно, возникает вопрос об отыскании топологических характеристик метризуемых пространств. В этом и состоит проблема метризации.

Проблема метризации постоянно находилась в центре внимания исследователей в области общей топологии. Первые условия метризуемости были найдены П. С. Александровым и П. С. Урысоном: для метризуемости топологического пространства необходимо и достаточно су-

---

<sup>3</sup> Бикompактные пространства — это, очевидно, такие пространства, которые одновременно компактны и финально компактны; отсюда и термин «бикompактность». В зарубежной литературе название «компактные пространства» все чаще употребляется для обозначения бикompактных пространств. Это объясняется тем, что в настоящее время именно понятие бикompактности воспринимается как основное среди свойств типа компактности.



Н. А. Шанин.

существование счетной системы открытых покрытий  $\alpha_n$  этого пространства таких, что 1) для любых двух пересекающихся элементов  $U', U''$  покрытия  $\alpha_{n+1}$  в покрытии  $\alpha_n$  найдется элемент, содержащий объединение  $U' \cup U''$ , и 2) для любой точки  $x$  пространства любой набор множеств  $U_i \in \alpha_i$ , содержащих точку  $x$ , является базисом окрестностей точки  $x$ .

Кроме этой общей теоремы были получены также некоторые удобные метризационные условия в специальных классах пространств. Приведем два результата П. С. Урысона: 1) пространство счетного веса метризуемо тогда и только тогда, когда оно регулярно; 2) компактное пространство метризуемо в том и только в том случае, когда оно хаусдорфово и имеет счетную базу. Аналогичного типа условие метризуемости получил П. С. Александров для локально компактных пространств.

Решение метризационной проблемы Александровым и Урысоном вовсе не означает, что условия метризации, содержащиеся в их теореме, являются окончательными, что нельзя найти какие-нибудь новые, эквивалентные им, но, может быть, более простые и удобные условия. Однако долгое время в этом направлении практически не было получено никаких новых результатов. И лишь в самом начале 50-х годов в проблеме метризации произошел новый сдвиг. Сразу три математика — Бинг, Нагата и Ю. М. Смирнов нашли следующее условие, необходимое и достаточное для метризуемости топологического пространства: топологическое пространство должно быть регулярным и иметь базу, распадающуюся на счетное множество локально конечных систем множеств<sup>4</sup>.

Интерес к проблеме метризации не был утрачен и после получения этого критерия метризуемости. П. С. Александров дал следующий критерий:  $T_1$ -пространство  $X$  тогда и только тогда метризуемо, если оно паракомпактно<sup>5</sup> и обладает открытой базой  $B$ , удовлетворяющей условию о том, что для всякой точки  $x \in X$  и любой ее окрестности  $Ox$  в  $B$  существует лишь конечное число множеств, имеющих непустое пересечение с  $X \setminus Ox$ . А. В. Архангельским в последнее время получены два результата: 1)  $T_1$ -пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно имеет базу, удовлетворяющую следующему условию: для всякой точки  $x$  пространства и всякой ее окрестности  $Ox$  найдется окрестность  $O_1x$  такая, что база имеет лишь конечное число элементов, одновременно пересекающихся с  $O_1x$  и с дополнением к  $Ox$ ; 2) хаусдорфово пространст-

<sup>4</sup> Условие метризуемости Бинга отличается от только что сформулированного, хотя и эквивалентно ему.

<sup>5</sup> В этой теореме условие паракомпактности может быть заменено более общим, но менее наглядным условием так называемой коллективной нормальности.

во метризуемо тогда и только тогда, когда в нем есть база, удовлетворяющая следующему условию: для любого бикompактного подмножества  $\Phi$  пространства и всякой его окрестности  $O\Phi$  база имеет лишь конечное число элементов, одновременно пересекающихся с  $\Phi$  и с дополнением к  $O\Phi$ . Следующая теорема доказана А. С. Мищенко: если бикompакт имеет точечно счетную базу, то он метризуем (база называется точечно счетной, если каждая точка пространства содержится не более чем в счетном числе ее элементов). Установлены и другие метризационные условия более специального типа.

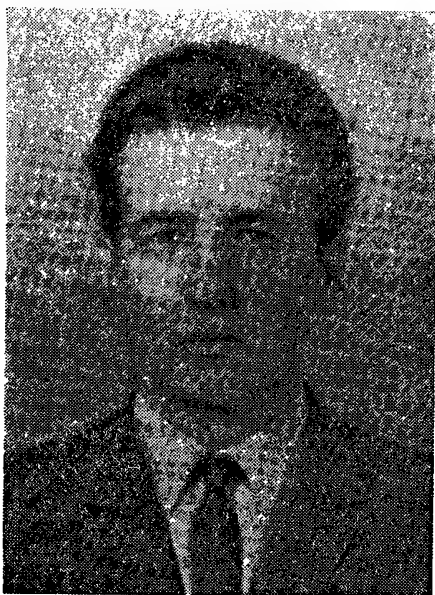
*Теорема сложения весов.* Предположим, что пространство  $X$  разложено в сумму своих подмножеств  $X_\alpha$  таким образом, что топологический вес каждого слагаемого, а также число всех слагаемых не превосходят данного кардинального числа  $\tau$ . Возникает вопрос, при каких условиях, накладываемых на само пространство или на слагаемые  $X_\alpha$ , можно утверждать, что топологический вес пространства  $X$  не превосходит  $\tau$ . Постановка этой задачи восходит еще к исследованиям П. С. Александрова и П. С. Урысона, где она сформулирована для значительно более частного случая.

Первый результат был получен Ю. М. Смирновым лишь в 1956 г. В установленной им аддиционной теореме пространство  $X$  хаусдорфово и локально компактно, а  $\tau$  счетно. Окончательное решение этой задачи сначала для бикompактов, а затем и для некоторых других классов пространств получено недавно А. В. Архангельским. В окончательной теореме Архангельского  $X$  — любое перистое пространство, а  $\tau$  — любое кардинальное число. Архангельский называет топологическое пространство перистым, если в каком-нибудь бикompактном расширении (а тогда, оказывается, и в любом) этого пространства существует такая счетная система открытых в расширении покрытий исходного пространства, что для всякой точки пространства пересечение всех ее звезд относительно этих покрытий содержится в пространстве. В классе перистых пространств содержатся все локально бикompактные пространства, все метризуемые, а также все полные в смысле Чеха пространства. Метод, которым Архангельский доказывает свою аддиционную теорему, позволяет ему показать, что топологический вес пространства не повышается при отображении на перистое пространство.

*Аппроксимация пространств полиэдрами.* Одним из фундаментальных методов исследования топологических пространств является предложенный П. С. Александровым метод аппроксимации пространств полиэдрами. В некотором смысле любое пространство с любой степенью точности можно приблизить полиэдром. Метод аппроксимации полиэдра-



Ю. М. Смирнов.



А. В. Архангельский.

ми тесно связан с методом покрытий — одним из наиболее основных средств исследования топологических пространств; при этом связь осуществляется посредством введенного Александровым в 1926 г. классического понятия нерва покрытия. Нервом покрытия топологического пространства называется комплекс, вершины которого взаимно однозначно соответствуют элементам покрытия, причем несколько вершин могут принадлежать какому-нибудь симплексу тогда и только тогда, когда соответствующие этим вершинам элементы покрытия имеют непустое пересечение. Таким образом, каждому открытому покрытию пространства можно поставить в соответствие комплекс; покрытиям специального типа (конечным, звездно конечным, ограниченной кратности и т. д.) соответствуют специальные комплексы (конечные, локально конечные, конечной размерности и т. д.). При этом, грубо говоря, чем мельче покрытие пространства, которое мы берем, тем точнее его нерв «приближает» пространство.

Если покрытие  $\alpha = \{U_\lambda\}$  пространства  $X$  локально конечно, то на этом пространстве существует система непрерывных функций  $f_\lambda$ , каждая из которых равна нулю вне множества  $U_\lambda$  и таких, что  $\sum_\lambda f_\lambda \equiv 1$ .

Такая система функций называется разбиением единицы, подчиненным покрытию  $\alpha$ . С помощью этих функций, используя барицентрические координаты в нерве покрытия  $\alpha$ , легко определить непрерывное отображение  $f$  пространства  $X$  в нерв, которое называется каноническим. Каноническое отображение играет существенную роль во многих исследованиях, особенно в теории размерности.

При помощи канонического отображения в нерв приближение пространства полиэдром можно осуществить чисто геометрически. Пусть  $X$  — компакт; без ограничения общности можно считать, что этот компакт лежит либо в евклидовом пространстве достаточно большой размерности, либо в гильбертовом пространстве. Взяв покрытие этого компакта открытыми множествами малого диаметра, реализуем нерв этого покрытия таким образом, чтобы вершины его симплексов находились в достаточной близости от соответствующих элементов покрытия. Этим способом можно добиться, чтобы расстояние между точками компакта и их образами при каноническом отображении было меньше любого наперед заданного числа. П. С. Александров называет канонические отображения такого вида  $\varepsilon$ -сдвигами пространства в полиэдры.

Наконец, топологические пространства можно получить и в качестве предела полиэдров (или комплексов). Это можно сделать двумя похожи-



ми, но различными способами. Один из этих способов предложен Фрейденталем для компактов и состоит в том, что пространство представляется в качестве обратного предела последовательности полиэдров с кусочно-линейными отображениями. Этот результат, как показал Б. А. Пасынков, справедлив в более слабой форме для произвольных бикомпактов, если вместо счетной последовательности брать направленное множество полиэдров. Такая аппроксимация бикомпактов оказывается полезной в некоторых задачах теории размерности.

Другой способ предложен П. С. Александровым еще в 20-х годах и заключается в том, что топологическое пространство представляется в качестве предела проекционного спектра. Первоначально проекционные спектры были определены лишь для компактов и состояли из счетного числа конечных комплексов. А. Г. Курош показал, что проекционные спектры существуют и для произвольных бикомпактов, однако в этом случае приходится рассматривать уже направленное множество конечных комплексов.

В. И. Пономарев рассмотрел проекционные спектры в полной общности и практически для любых пространств. Проекционный спектр — это направленное множество комплексов  $P_\alpha$  (не обязательно конечных) с симплициальными отображениями (проекциями)  $\pi_\beta^\alpha : P_\alpha \rightarrow P_\beta$ ,  $\beta < \alpha$ , удовлетворяющими обычному условию транзитивности. Нитью в спектре называется любой набор  $\{p_\alpha\}$  симплексов  $p_\alpha \in P_\alpha$  таких, что  $\pi_\beta^\alpha p_\alpha = p_\beta$  для любых  $\beta < \alpha$ ; назовем нить  $\{q_\alpha\}$  объемлющей нить  $\{p_\alpha\}$ , если при любом  $\alpha$  симплекс  $p_\alpha$  является гранью  $q_\alpha$ . Предельное пространство проекционного спектра — это пространство его максимальных нитей, т. е. таких, которые не содержатся ни в каких объемлющих нитях, отличных от них самих.

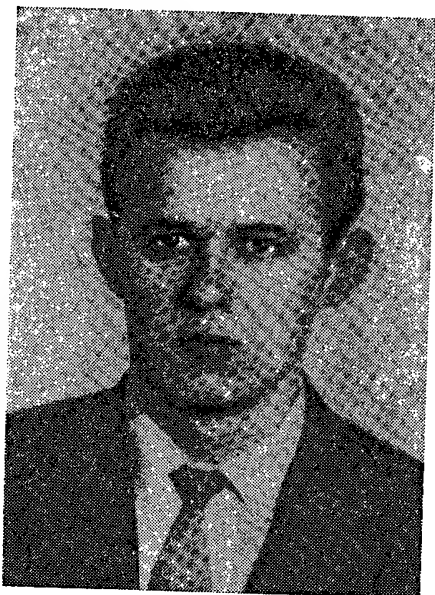
Пространство проекционного спектра всегда является  $T_1$ -пространством. Пономаревым выделено некоторое условие равномерности, при выполнении которого предельное пространство автоматически является паракомпактным; обратно, всякое паракомпактное пространство является пределом проекционного спектра, удовлетворяющего этому условию. Проекционные спектры были применены им для исследования непрерывных отображений топологических пространств. Теория гомологий вызвала некоторое видоизменение понятия проекционного спектра (многозначные проекции подробно исследованы И. А. Шведовым и М. Р. Шурой-Бурой).

*Топологические группы и их фактор-пространства.* Пусть  $G$  — топологическая группа,  $H$  — ее замкнутая подгруппа и  $B = G/H$  — фактор-



В. И. Пономарев.





Е. Г. Скляренко.

пространство. Пространства  $G$  и  $B$  вполне регулярны. Это было впервые замечено Л. С. Понтрягиным и Вейлем. Пространство  $G$  может не быть нормальным: как показал А. А. Марков, всякое вполне регулярное пространство гомеоморфно замкнутому подмножеству некоторой топологической группы.

Многочисленные исследования посвящены изучению влияния алгебраической структуры на топологию пространства  $G$ . Пространства коммутативных групп Ли, а также коммутативных локально бикомпактных групп полностью исследованы Л. С. Понтрягиным. А. А. Марков изучил вопрос о том, какие топологии можно определить на множестве элементов одной и той же абстрактной группы; в частности, им получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы некоторое подмно-

жество в группе  $G$  было замкнуто во всех топологиях, которые можно задать на этой группе. Он же рассмотрел некоторые условия, при которых абстрактная группа  $G$  допускает связную топологию, и построил группы как угодно большой мощности, не допускающие связных топологий; с другой стороны, им указаны примеры связных групп любой мощности, большей или равной мощности континуума, каждый элемент в которых имеет порядок 2. Наконец, А. А. Марковым построена теория свободных топологических групп. Абелевым топологическим группам посвящены работы Н. Я. Виленкина.

Главное место в теории топологических групп долгое время (вплоть до решения 5-й проблемы Гильберта) занимали исследования локально бикомпактных групп. В наиболее общей постановке 5-я проблема Гильберта заключается в том, чтобы доказать, что всякая локально связная локально бикомпактная группа конечной размерности есть группа Ли. Создание теории локально бикомпактных групп в значительной степени связано с именем Л. С. Понтрягина. Им полностью выяснена структура бикомпактных и абелевых локально бикомпактных групп и, в частности, получено решение проблемы Гильберта для этих групп. Разработанный Понтрягиным метод аппроксимации таких групп группами Ли практически оказался пригодным для любых локально бикомпактных групп и играет существенную роль при их исследовании. Важное место в теории локально бикомпактных групп занимают работы А. И. Мальцева, в частности его теорема о том, что всякая группа Ли имеет компактную подгруппу, фактор-пространство по которой гомеоморфно евклидову пространству.

Исследования, начатые Понтрягиным еще в 30-е годы, были завершены лишь в начале 50-х годов в работах Ивасава, Глисона, Монтгомери и Циппина, а также Ямабе, которые привели

к полному решению 5-й проблемы Гильберта.

Однако и после этого интерес к локально бикompактным группам не утратился. В. М. Глушков полностью исследовал локальную структуру некоммутативных локально бикompактных групп. Л. Н. Ивановский и В. И. Кузьминов доказали, что пространство всякой бикompактной группы диадично, дав тем самым положительный ответ на вопрос, поставленный П. С. Александровым. В. И. Кузьминов показал также, что пространство всякой нульмерной бикompактной группы гомеоморфно обобщенному канторову дисконтинууму  $D^\tau$  (см. § 2). Е. Г. Скляренко обобщил этот результат, доказав, что всякое нульмерное фактор-пространство гомеоморфно дискретной сумме бикompактов  $D^\tau$ . Более того,



Б. А. Пасынков.

он показал, что если фактор-пространство конечномерно, то оно допускает локально тривиальное расслоение над многообразием со слоем, гомеоморфным  $D^\tau$ . Всякое фактор-пространство локально бикompактной группы гомеоморфно прямому произведению  $N \times D^\tau \times B_0$ , где  $N$  — дискретное множество, а  $B_0$  — некоторое связное фактор-пространство. Как известно (Вейль), пространство всякой связной конечномерной локально бикompактной группы имеет счетный вес. Скляренко привел пример связного конечномерного фактор-пространства локально бикompактной группы, вес которого равен мощности континуума, показав в то же время, что топологический вес всякого такого фактор-пространства не превосходит мощность континуума и является счетным, если оно бикompактно.

Из других классов групп значительный интерес представляют метризуемые группы. Недавно Б. А. Пасынков исследовал топологические группы, являющиеся обобщением как метризуемых, так и локально бикompактных групп (это группы, имеющие в любой окрестности единицы бикompактные нормальные делители, фактор-группы по которым метризуемы). Пространства таких групп автоматически паракомпактны; для них также совпадают размерности  $\dim$  и  $\text{Ind}$ .

## 2

### Непрерывные отображения топологических пространств

*Постановка задач.* Непрерывные функции (т. е. непрерывные отображения пространства в действительную прямую) представляют собой сильное средство для исследования топологических

пространств. Тем более это справедливо по отношению к отображениям исследуемого пространства в какое-нибудь другое, заранее выбранное («тестовое») пространство. Например, в теории размерности (см. § 3) важную роль играют отображения пространства в кубы  $D^n$  или сферы  $S^n$  любого числа измерений, а в алгебраической топологии широко используются отображения и в другие специальные полиэдры. Не меньшее значение имеет исследование отображений специальных пространств в рассматриваемое пространство (гомотопические группы).

Однако мы коснемся задач совсем иного типа. Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение пространства  $X$  на  $Y$ . Предположим, что нам известна некоторая информация о топологическом пространстве  $X$  и об отображении  $f$ . Что можно сказать при этих условиях о топологическом пространстве  $Y$ ? Аналогично, какую информацию можно получить о пространстве  $X$ , используя какие-нибудь данные об отображении  $f$  и о пространстве  $Y$ ? (С некоторыми такими задачами мы встретимся также в § 3 в связи с поведением размерности при непрерывных отображениях.) Наконец, возможна и такая постановка вопроса (особенно это интересно в некоторых задачах теории размерности): какие дополнительные данные можно получить об отображении  $f$ , зная некоторые исходные данные об этом отображении и о пространствах  $X$  и  $Y$ ?

*Непрерывные разбиения.* Всякое непрерывное отображение пространства  $X$  на  $Y$  порождает некоторое разбиение  $X$  на попарно непересекающиеся замкнутые множества — полные прообразы точек из  $Y$ . Разбиение топологического пространства на непересекающиеся замкнутые множества называется непрерывным, если оно определяет некоторое непрерывное отображение. Например, разбиение компакта, при котором топологический предел всякой сходящейся последовательности элементов разбиения содержится в некотором его элементе, является непрерывным. Аналогичные условия справедливы и для любых пространств. Теория непрерывных разбиений построена П. С. Александровым. С помощью непрерывных разбиений можно строить отображения, удовлетворяющие каким-либо наперед заданным условиям (например, отображения кубов в геометрической топологии).

*Основные типы отображений.* Перечислим несколько важных типов отображений, фигурирующих в указанных выше задачах.

**Замкнутые отображения:** образ всякого замкнутого в  $X$  множества замкнут в  $Y$ . Особенно большой интерес они представляют для метрических пространств.

**Открытые отображения:** образ всякого открытого в  $X$  множества открыт в  $Y$ .

**Бикомпактные отображения:** полный прообраз всякой точки бикомпактен.

**Совершенные отображения:** одновременно замкнутые и бикомпактные. Этот класс отображений является в настоящее время, по-видимому, одним из наиболее употребительных. Для локально бикомпактных пространств совершенные отображения совпадают с собственными отображениями в смысле Лерэ.

**Уплотнения:** взаимно однозначные непрерывные отображения. Пер-

вые общие результаты об уплотнениях были получены А. С. Пархоменко. В последнее время они рассматривались В. Произволовым.

Неприводимые отображения: из  $A \subset X$  и  $fA = Y$  следует, что  $A = X$  ( $A$  — замкнутое множество).

Нульмерные отображения: полный прообраз каждой точки имеет размерность нуль.

Монотонные отображения: полный прообраз всякой точки есть связное множество.

*Замкнутые отображения.* Систематическое исследование замкнутых отображений было начато И. А. Вайнштейном. Им выяснена и связь замкнутых отображений с другими классами отображений. Прежде всего он показал, что при всяком замкнутом отображении граница полного прообраза всякой точки компактна. Следовательно, после отбрасывания внутренних точек этих прообразов остается замкнутое в  $X$  подмножество  $X_0$ , на котором это отображение замкнуто и компактно, причем образ  $X_0$  равен  $X$ . Отсюда следует, во-первых, что для метрических пространств замкнутые отображения сводятся к совершенным и, во-вторых, что всякое неприводимое замкнутое отображение само является совершенным.

Дальнейшее развитие теории замкнутых отображений получила в работах Морита, Стоуна, Хенриксена, Избелла и других зарубежных математиков. В последнее время замкнутые отображения при минимальных ограничениях на отображаемые пространства рассматривались А. В. Архангельским. Им, в частности, исследован характер множества некомпактных элементов соответствующих этим отображениям непрерывных разбиений.

К работам И. А. Вайнштейна восходит постановка следующего вопроса: какие свойства топологических пространств сохраняются при отображениях данного класса. При этом имеется в виду сохранение свойств как от пространства к образу, так и в обратную сторону. Для замкнутых отображений Вайнштейн показал, что образ локально компактного пространства есть локально компактное пространство.

*Совершенные отображения.* Как отмечалось, класс совершенных отображений был выделен И. А. Вайнштейном. Продолжая свои исследования замкнутых отображений, Вайнштейн получил следующие результаты, относящиеся к сформулированному выше вопросу. Пусть  $f$  — совершенное отображение метризуемого пространства  $X$  на метризуемое пространство  $Y$ ; тогда: если  $Y$  — компакт (соответственно, локально компактное пространство), то  $X$  также компакт (соответственно, локально компактное пространство); если  $Y$  — полное метрическое пространство, то  $X$  также полно в некоторой метрике. Далее, пусть  $f$  — совершенное отображение метризуемого пространства  $X$  на  $T_1$ -пространство  $Y$ ; тогда  $Y$  метризуемо. Последний результат Вайнштейн получил для пространств счетного веса, а Стоун распространил на все метризуемые пространства.

Дальнейшие результаты в этом направлении получены В. И. Пonomаревым, показавшим, что при совершенных отображениях сохраняются такие свойства, как паракомпактность, счетная паракомпакт-

пость, локальная бикомпактность, полнота в смысле Чеха и другие, в то время как сильная паракомпактность сохраняется лишь при открытых совершенных отображениях. Эти результаты получены сразу для многозначных отображений (см. ниже).

Недавно А. В. Архангельский доказал, что тогда и только тогда существует совершенное отображение пространства  $X$  на метризуемое пространство, когда пространство  $X$  паракомпактное и перистое (см. § 1). Эта теорема (из нее вытекает решение задачи, поставленной П. С. Александровым) имеет несколько иную природу по сравнению с предыдущими результатами: посредством совершенных отображений устанавливается связь между двумя классами топологических пространств — метризуемыми и паракомпактными перистыми пространствами. Таким образом, этот результат является вкладом в осуществление программы исследований, намеченной П. С. Александровым в докладе на Пражской международной конференции по общей топологии в 1961 г. и включающей вопросы: 1) каковы те пространства, которые можно получить в качестве образов топологических пространств заданного класса с помощью некоторого типа отображений; 2) каковы те пространства, которые допускают отображения данного типа на пространства некоторого фиксированного класса.

*Открытые отображения.* Как и в случае замкнутых отображений, наибольший интерес представляют открытые отображения метризуемых пространств. Сформулируем некоторые результаты о сохранении метризуемости. В. И. Пономарев доказал, что паракомпактное пространство, являющееся образом метризуемого пространства при открытом бикомпактном отображении, само метризуемо (известно, что открытый образ метризуемого пространства не всегда метризуем). А. В. Архангельский усилил этот результат: пусть  $f$  — открытое (или замкнутое) отображение метризуемого пространства  $X$  на  $T_1$ -пространство  $Y$ ; тогда для метризуемости  $Y$  необходимо и достаточно, чтобы по отношению к некоторой метрике на пространстве  $X$  было выполнено условие: для произвольной точки  $y \in Y$  и любой ее окрестности  $O_y$  найдется окрестность  $O_{1y}$  этой точки такая, что расстояние между множествами  $f^{-1}O_{1y}$  и  $f^{-1}(Y \setminus O_y)$  положительно.

Следующие результаты, принадлежащие соответственно В. И. Пономареву и А. В. Архангельскому, характеризуют образы метризуемых пространств при открытых отображениях: образами метризуемых пространств в классе  $T_0$ -пространств при произвольных открытых отображениях являются в точности пространства с первой аксиомой счетности (т. е. пространства, каждая точка которых обладает счетной фундаментальной системой окрестностей); среди  $T_0$ -пространств пространства с равномерной базой и только они являются образами метризуемых пространств при открытых бикомпактных отображениях.

И, наконец, недавние результаты А. В. Архангельского: произвольное метрическое пространство веса  $\tau$  является открытым счетнократным образом некоторого нульмерного метрического пространства веса  $\tau$  (без требования счетнократности отображения этот результат был доказан Хаусдорфом в 1934 г.); все открытые счетнократные образы произволь-

ного пространства Бэра (например, пространства иррациональных чисел) ему гоомеоморфны.

Очень интересный результат в несколько ином направлении принадлежит Л. В. Келдыш. Она рассматривает повышающие размерность открытые отображения компактов и показывает, что если такое отображение повышает размерность на  $k$  единиц и нульмерно (см. § 3), то оно представляется в виде суперпозиции  $2k + 1$  отображений, в которой последовательно чередуются отображения, не повышающие размерность, и двукратные отображения, повышающие размерность ровно на единицу.

Геометрические вопросы теории см. в разделе «Геометрическая топология многообразий».



Л. В. Келдыш.

*Другие типы отображений.* Кроме перечисленных выше существует ряд других классов отображений. Несколько из них выделены в последнее время А. В. Архангельским. Это факторные, псевдооткрытые, индуктивно открытые и другие отображения. Архангельский применил эти отображения для изучения образов метрических пространств, а также для представления пространств (метризуемых, паракомпактных, бикompактных) в качестве образов соответствующих нульмерных пространств.

П. С. Александровым было введено следующее понятие  $\omega$ -отображения, которое, очевидно, является обобщением понятия  $\varepsilon$ -сдвига ( $\varepsilon$ -отображения). Пусть  $\omega$  — открытое покрытие пространства  $X$ . Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется  $\omega$ -отображением, если каждая точка  $y \in Y$  имеет окрестность, полный прообраз которой содержится хотя бы в одном элементе покрытия  $\omega$ .

С помощью  $\omega$ -отображений В. И. Пономарев дает характеристики хаусдорфовых паракомпактных и финально компактных пространств: для паракомпактности (соответственно, финальной компактности) хаусдорфова пространства необходимо и достаточно, чтобы для каждого открытого покрытия этого пространства существовало  $\omega$ -отображение этого пространства на некоторое метрическое (соответственно, метрическое со счетной базой) пространство.

*Многозначные отображения.* В. И. Пономарев построил теорию многозначных непрерывных отображений топологических пространств. При многозначном отображении точке пространства  $X$  ставится в соответствие не точка, а замкнутое множество пространства  $Y$ . Непрерывные многозначные отображения рассматривались Гуревичем еще в 1926 г. Однако работа Гуревича осталась незамеченной другими исследователями, в частности Стротером, который в качестве непрерывных многозначных отображений использует отображения более специального типа

по сравнению с отображениями Гуревича. Пономарев дает следующее определение непрерывности многозначного отображения: отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется непрерывным, если для всякой точки  $x \in X$  и для любой окрестности  $Ofx$  множества  $fx \subset Y$  существует такая окрестность  $Ox$  точки  $x$ , что  $fOx \subset Ofx$  ( $fOx$  — объединение образов всех точек из окрестности  $Ox$ ). Определение Пономарева совпадает с определением Гуревича. Отображения, непрерывные в смысле Стротера, выступают у Пономарева под названием сильно непрерывных. Примером многозначного отображения является всякое отображение, обратное однозначному. С помощью графика отображения можно получить следующую характеристику непрерывных отображений (по крайней мере, для бикомпактных пространств  $X$  и  $Y$ ): многозначное отображение непрерывно тогда и только тогда, когда его график замкнут в топологическом произведении пространств  $X$  и  $Y$ . Из графика вытекает также, что всякое непрерывное многозначное отображение  $f$  разлагается в суперпозицию  $\pi_y \pi_x^{-1}$ , где  $\pi_x$  и  $\pi_y$  — однозначные отображения, являющиеся проекциями графика отображения  $f$  соответственно на  $X$  и  $Y$ .

Многозначные отображения, в силу их симметрии, оказываются удобными для использования в различных задачах о сохранении свойств топологических пространств при тех или иных типах непрерывных отображений (см. выше). Для многозначных отображений В. И. Пономарев дает определения замкнутого, открытого, бикомпактного, совершенного и других типов отображений. Им получены результаты о связях между различными классами топологических пространств, осуществляемых с помощью этих отображений.

*Теория абсолютов.* Пусть  $X, Y$  — два топологических пространства. Рассмотрим вопрос о том, когда существует неприводимое совершенное многозначное отображение одного из этих пространств на другое. На языке однозначных отображений этот же вопрос можно сформулировать так: когда существует третье пространство  $Z$ , которое совершенно и неприводимо отображается на каждое из пространств  $X$  и  $Y$ . Этим, очевидно, определяется отношение эквивалентности в классе топологических пространств; спрашивается, когда два пространства в этом смысле эквивалентны.

Исходя из аппроксимации топологических пространств проекционными спектрами, В. И. Пономарев построил (сначала в классе паракомпактных пространств) для всякого хаусдорфова пространства  $X$  некоторое нульмерное пространство  $\check{X}$  вместе с совершенным неприводимым отображением  $\check{X} \rightarrow X$  такое, что оно является максимальным совершенным неприводимым прообразом пространства  $X$  в том смысле, что всякое совершенное неприводимое отображение  $\check{X}' \rightarrow \check{X}$  есть гомеоморфизм. Пространство  $\check{X}$ , являющееся инвариантом топологического пространства  $X$ , Пономарев называет абсолютom. Он показывает, что два пространства эквивалентны в указанном выше смысле тогда и только тогда, когда их абсолюты гомеоморфны.

В дальнейшем развитии теории абсолютов занимались С. Илиадис, В. И. Пономарев, П. С. Александров и др. В 1958 г. абсолюты бикомпакт-

ных и локально бикомпактных пространств под другим названием были построены Глисоном в связи с задачей об описании проективных объектов в категории локально бикомпактных пространств и их совершенных (собственных) отображений. Однако, хотя из работы Глисона некоторые результаты теории абсолютов и могут быть выведены, только после работ В. И. Пономарева, С. Илиадиса и П. С. Александрова стало ясно, что абсолюты являются чрезвычайно интересным и важным объектом исследования.

*Диадические пространства.* П. С. Александров еще в 20-х годах доказал, что всякий компакт является непрерывным образом канторова совершенного множества (с помощью отображений канторова множества можно характеризовать размерность компактов, см. § 3). Известно, что канторово множество гомеоморфно топологическому произведению счетного числа пространств, каждое из которых состоит лишь из двух точек. Естественно возник вопрос, нельзя ли произвольный бикомпакт представить в качестве образа топологического произведения  $D^{\tau}$  подходящего числа пространств-двоеточий  $D$  — так называемого обобщенного канторова дисконтинуума. Оказалось, что это можно сделать не для всех бикомпактов (Шпильрайн). Бикомпакты, которые допускают такое представление, Александров назвал диадическими.

Первые результаты о диадических бикомпактах были получены в работах Н. А. Шанина и П. С. Александрова. Шанин показал, в частности, что на диадические бикомпакты можно распространить некоторые результаты, справедливые для компактов. Александров доказал, что всякий бикомпакт  $X$  веса  $\tau$  есть непрерывный образ некоторого (зависящего от  $X$ ) замкнутого подмножества  $D^{\tau}$ . Опираясь на обобщенную гипотезу континуума, А. С. Есенин-Вольпин нашел в  $D^{\tau}$  замкнутое подмножество  $\Phi_{\tau}$ , образом которого является всякий бикомпакт веса  $\tau$ . Он исследовал также зависимость между локальным и интегральным весами в диадических бикомпактах.

Существенный сдвиг в этой области произошел за последние годы. Выше упоминался результат Л. Н. Ивановского и В. И. Кузьмина о диадичности пространств бикомпактных групп. П. С. Александров и В. И. Пономарев дали характеристику диадических бикомпактов в терминах покрытий. Б. Ефимов доказал, что всякий неметризуемый диадический бикомпакт имеет замкнутые подмножества, не являющиеся диадическими; в то же время всякое замкнутое каноническое подмножество (т. е. замыкание открытого) диадического бикомпакта, а также всякое замкнутое подмножество типа  $C_0$  (т. е. пересечение счетного числа открытых множеств) являются диадическими бикомпактами. Ефимов также обобщил результаты А. С. Есенина-Вольпина. Пономарев предложил называть диадическими те пространства, которые имеют диадические бикомпактные расширения. Он заметил, что если диадическое пространство метризуемо, то оно имеет счетную базу. Ефимов доказал, что всякое диадическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности в точках счетного всюду плотного множества, является метризуемым.



## Теория размерности

*Основные определения.* Уяснение топологической природы числа измерений евклидова пространства явилось одним из важнейших событий во всей математике начала нынешнего столетия. На протяжении долгого времени не удавалось доказать, что евклидовы пространства разной размерности не гомеоморфны между собой. Интерес к этой задаче значительно возрос в конце прошлого столетия, когда было установлено, во-первых, что точки любых двух евклидовых пространств находятся во взаимно однозначном соответствии между собой (Кантор) и что, во-вторых, существуют непрерывные отображения, повышающие размерность (отображение Пеано отрезка на квадрат). Однако решение задачи стало возможным лишь после того, как было дано топологически инвариантное определение числа измерений.

Две независимые идеи топологического определения размерности высказали почти одновременно Лебег в 1911 г. (заметивший связь между размерностью евклидова куба и кратностью достаточно мелких покрытий этого куба) и Пуанкаре в 1912 г. (отмечая связь между геометрической размерностью пространства и возможностью разбиения этого пространства множествами меньшего числа измерений, он указал на возможность индуктивного подхода к определению размерности<sup>6</sup>). В 1913 г. Брауэр, основываясь на идее Пуанкаре, дал строгое, топологически инвариантное определение размерности, а также доказал, что для евклидовых пространств эта размерность совпадает с обычной. В своей работе Брауэр ограничился рассмотрением локально связных метризуемых пространств со счетной базой.

Заслуга окончательного построения теории размерности принадлежит П. С. Урысону. Независимо от него теория размерности была разработана также Менгером. Однако Менгеру удалось получить далеко не все важные результаты, содержащиеся в работах Урысона. В 1921—1922 гг. Урысон дал усовершенствованное определение размерности Брауэра и доказал теоремы, которые, как теперь принято считать, составляют основное содержание теории размерности. В число этих теорем входят такие классические предложения, как теорема суммы, теорема о разложении конечномерного пространства на нульмерные множества, теорема о совпадении индуктивной размерности и размерности, определенной с помощью покрытий, а также целый ряд геометрических результатов (всякое  $n$ -мерное множество в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$  содержит  $n$ -мерный шар; граница всякого ограниченного открытого множества в  $R_n$  имеет размерность  $n - 1$ ;  $(n - 2)$ -мерные множества в  $R^n$  имеют связное дополнение и т. д.).

Первоначально теория размерности была построена главным образом для компактных пространств. Затем Л. А. Тумаркин и другие иссле-

---

<sup>6</sup> Почти совпадающий с идеями Пуанкаре подход к проблеме размерности еще за несколько десятилетий до него высказал Больцано.

дователи все основные результаты теории размерности распространили на произвольные метризуемые пространства счетного веса. Постепенно область построения теории размерности расширялась, включая в себя сначала бикомпакты, а затем и все нормальные пространства<sup>7</sup>. Вместе с тем приобретало самостоятельное значение восходящее к П. С. Урысону (и, собственно, даже к Брауэру) еще одно определение размерности — так называемая большая индуктивная размерность (для метризуемых пространств счетного веса все три определения эквивалентны). Напомним все три определения размерности.



Л. А. Тумаркин.

Размерность  $\text{ind}$  (малая индуктивная). Только пустое множество имеет размерность  $-1$ . Пространство  $X$  имеет размерность  $\text{ind } X \leq n$ , если всякая точка этого пространства имеет фундаментальную систему окрестностей, границы которых имеют размерность не больше  $n - 1$ .

Размерность  $\dim$  (определяемая с помощью покрытий). Пространство  $X$  имеет размерность  $\dim X \leq n$ , если во всякое конечное открытое покрытие этого пространства можно вписать конечное открытое покрытие кратности не большей  $n + 1$  (кратность покрытия — наибольшее число  $k$  такое, что это покрытие имеет  $k$  элементов с непустым пересечением).

Размерность  $\text{Ind}$  (большая индуктивная). Только пустое множество имеет размерность  $-1$ . Пространство  $X$  имеет размерность  $\text{Ind } X \leq n$ , если для всякого замкнутого в  $X$  множества  $A$  и любой его окрестности  $OA$  найдется окрестность этого множества  $O_1A$  такая, что ее замыкание содержится в  $OA$ , а ее граница имеет размерность не больше  $n - 1$ .

*Основные теоремы.* В целях простоты изложения не все результаты, формулируемые ниже, приведены в их наиболее общей форме.

1. Монотонность размерности: для пространств счетного веса всегда  $\dim A \leq \dim X$ , если  $A \subset X$ ; в общем случае нормальных пространств имеет место монотонность по замкнутым подмножествам.

2. Теорема суммы: если нормальное пространство  $X$  есть объединение счетного числа своих замкнутых подмножеств  $A_i$ , для которых  $\dim A_i \leq n$ , то и  $\dim X \leq n$ .

<sup>7</sup> Уже для вполне регулярных пространств безоговорочно можно применять лишь малую индуктивную размерность. Однако Ю. М. Смирнов нашел такое усовершенствование определения размерности, которое позволяет строить теорию размерности и для вполне регулярных пространств. Дальнейшее развитие этих идей привело Смирнова к построению теории размерности пространств близости.

3. Разложение на нульмерные множества: для пространства со счетной базой  $\dim X \leq n$  тогда и только тогда, когда это пространство есть объединение  $n + 1$  нульмерных множеств. Этот результат тесно связан с формулой Урысона<sup>8</sup>

$$\dim (A \cup B) \leq \dim A + \dim B + 1.$$

4. Размерность произведения: всегда

$$\dim (X \times Y) \leq \dim X + \dim Y.$$

Однако равенства может не быть. Л. С. Понтрягин построил компакты  $X$  и  $Y$  размерности два, для которых  $\dim (X \times Y) = 3$ . При построении этих компактов Понтрягин опирается на гомологические методы.

5. Теорема о канторовых многообразиях: всякий бикомпакт размерности  $n$  содержит  $n$ -мерное канторово многообразие (т. е. бикомпакт, не разбивающийся на два замкнутых слагаемых, пересечение которых имеет размерность не больше  $n - 2$ ; имеется в виду размерность  $\dim$ ). Задача о существовании канторовых многообразий в компактах была поставлена П. С. Урысоном и решена Л. А. Тумаркиным. Позднее П. С. Александров распространил этот результат на бикомпакты.

6. Л. А. Тумаркин доказал, что всякое  $k$ -мерное множество в  $n$ -мерном евклидовом пространстве содержится в  $k$ -мерном множестве типа  $G_\delta$ .

*Симплициальная аппроксимация и теорема о существенных отображениях.* Большая заслуга в развитии теории размерности принадлежит П. С. Александрову. Выше отмечалась его роль в развитии теории размерности для нормальных пространств. С именем П. С. Александрова связано также зарождение и развитие нового направления в теории размерности — гомологической теории размерности. Связующим звеном между обычной теорией размерности и гомологической является характеристика размерности пространств с помощью их отображений в полиэдры, в частности теорема о существенных отображениях.

Рассматривая компакты, лежащие в евклидовом пространстве, Александров доказывает следующую теорему: если компакт имеет размерность  $n$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\varepsilon$ -сдвиг этого компакта (см. § 1) на  $n$ -мерный полиэдр и существует такое  $\varepsilon > 0$ , для которого этот компакт не допускает  $\varepsilon$ -сдвигов на полиэдры размерности не больше  $n - 1$ . Аналогичная теорема с заменой  $\varepsilon$ -сдвигов на  $\varepsilon$ -отображения справедлива и для произвольных  $n$ -мерных компактов с любой фиксированной метрикой. Последнее утверждение было положено Л. С. Понтрягиным и Небелингом в основу доказательства следующего утверждения, дополняющего классический результат П. С. Урысона (см. § 1): всякий  $n$ -мерный компакт гомеоморфен замкнутому ограниченному подмножеству  $(2n + 1)$ -мерного евклидова пространства. Как показали позднее Гуревич и К. Куратовский, это утверждение справедливо для любого метризуемого пространства счетного веса.

<sup>8</sup> А. В. Зарелуа доказал эту формулу для множеств, лежащих в нормальных пространствах.

Теорема об  $\varepsilon$ -сдвигах допускает также следующее обобщение (К. Куратовский, П. С. Александров): для всякого конечного открытого покрытия  $\omega$   $n$ -мерного (в смысле  $\dim$ ) нормального пространства  $X$  существует  $\omega$ -отображение (см. § 2) этого пространства на  $n$ -мерный полиэдр и существует такое конечное открытое покрытие  $\omega$ , для которого нельзя построить  $\omega$ -отображение ни в какой полиэдр меньшей размерности.

В 1930—1932 гг. П. С. Александров разработал основы гомологического подхода к теории размерности. В частности, им дана гомологическая характеристика  $k$ -мерных компактов, лежащих в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, которая показывает, что в своей основе эти компакты ведут себя так же, как и  $k$ -мерные полиэдры. В это же время он опубликовал первый вариант (для бикомпактов) теоремы о существенных отображениях: пусть  $X$  — нормальное пространство и  $\dim X = n$ , тогда имеется существенное отображение этого пространства на  $n$ -мерный куб  $D^n$ , в то время как всякое его отображение на куб большей размерности несущественно<sup>9</sup>.

Из теоремы о существенных отображениях вытекает следующая интересная характеристика размерности нормальных пространств. Назовем перегородкой между непересекающимися замкнутыми множествами  $C$  и  $C'$  такое замкнутое множество  $B$ , дополнение к которому несвязно и содержит  $C$  и  $C'$  в своих различных открытых слагаемых. Оказывается, что  $\dim X \leq n$  тогда и только тогда, когда для любых  $n + 1$  пар непересекающихся замкнутых множеств  $C_i, C'_i$  можно найти перегородки  $B_i$  с пустым пересечением  $\bigcap_{i=1}^{n+1} B_i$ .

*Теория размерности нормальных пространств.* Результаты П. С. Александрова показывают, что при расширении класса рассматриваемых пространств наиболее естественно в качестве основного определения размерности рассматривать размерность  $\dim$ . Вопрос о том, для каких еще кроме метризуемых со счетной базой пространств справедливо равенство размерностей, был поставлен П. С. Александровым в 1936 г. и долгое время оставался открытым даже для метрических пространств и бикомпактов. Вскоре для бикомпактов П. С. Александров получил неравенство  $\dim X \leq \text{ind } X$ , которое затем Ю. М. Смирнов распространил на финально компактные пространства. А. А. Лунц построил пример бикомпакта  $X$ , для которого  $\dim X = 1$ , а  $\text{ind } X = 2$ . Результат Лунца усовершенствовал О. В. Локуциевский. Для нормальных пространств Н. Б. Веденисов доказал неравенство  $\dim X \leq \text{Ind } X$ ; Ю. М. Смирнов дал пример нормального пространства, для которого  $\text{ind } X = 0$ , но  $\dim X = \infty$ . До сих пор остается невыясненным, справедливо ли равенство  $\text{ind } X = \text{Ind } X$  для бикомпактов. Однако, как показал Б. А. Пасынков, для локально бикомпактных групп и их фактор-пространств все основные размерности совпадают. Для метрических пространств справедливо лишь равенство  $\dim X = \text{Ind } X$ , полученное Кате-

<sup>9</sup> Существенным называется такое отображение  $X \rightarrow D^n$ , которое невозможно изменить с помощью любых деформаций, постоянных в точках  $f^{-1}S^{n-1}$ , так, чтобы образ пространства  $X$  содержался целиком в  $S^{n-1}$  — границе  $D^n$ .

товым; недавно Рой построил пример метрического пространства  $X$ , для которого  $\text{ind } X = 0$ , но  $\text{Ind } X = 1$ .

В последние годы выделены некоторые новые классы топологических пространств, для которых все три основные размерности (или хотя бы размерности  $\text{dim}$  и  $\text{Ind}$ ) совпадают. Во многих случаях вводимые новые классы пространств в определенном смысле «мало» отличаются от уже известных (т. е. метрических или нульмерных).

В. И. Пономарев выделил класс пространств, которые он назвал совершенно  $n$ -мерными. Пространство  $X$ , для которого  $\text{dim } X = n$ , называется совершенно  $n$ -мерным, если оно является замкнутым  $(n + 1)$ -кратным образом нульмерного паракомпакта. Все три размерности совпадают у всякого такого пространства.

Б. А. Пасынков показал, что размерности  $\text{dim}$  и  $\text{Ind}$  совпадают для нормального пространства, обладающего замкнутым нульмерным отображением на метрическое пространство. В частности, они совпадают для перистых паракомпактов (см. § 2), обладающих нульмерными отображениями на метрические пространства.

К вопросам совпадения размерностей оказались хорошо применимыми так называемые факторизационные теоремы. Они содержат утверждение, что в некоторых случаях для отображения  $n$ -мерного пространства  $X$  в пространство  $Z$  веса  $\tau$  найдется такое пространство  $Y$  размерности  $n$  и веса  $\tau$  и такие отображения  $g: X \rightarrow Y$  и  $h: Y \rightarrow Z$ , что  $f = gh$ . Первая факторизационная теорема ( $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — бикомпакты) была получена С. Мардешичем. Для случая, когда  $X$  — нормальное, а  $Y$  и  $Z$  — метрические пространства, аналогичную теорему доказал Б. А. Пасынков. Факторизационные теоремы весьма эффективно действуют также в доказательствах существования универсальных пространств данного веса и размерности (см. ниже) и при отыскании бикомпактных расширений, обладающих определенными размерностными свойствами. Пасынков показал, далее, что для  $n$ -мерного в смысле  $\text{dim}$  бикомпакта, являющегося пределом спектра из  $n$ -мерных полиэдров с кусочно-линейными проекциями, все размерности совпадают (откуда, в частности, вытекает, что не всякий бикомпакт разлагается в такой спектр); при этом он нашел, однако, такой одномерный (в любом смысле) бикомпакт, который нельзя разложить в спектр из одномерных полиэдров.

Наконец, следующий класс пространств нашел А. В. Зарелуа. Это сильно паракомпактные пространства, допускающие разбивающие отображения на метрические пространства со счетной базой. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется разбивающим, если для всякой точки  $x \in X$  и любой ее окрестности  $Ox$  найдется такая окрестность  $Ofx$  точки  $fx$  в  $Y$ , что ее полный прообраз  $f^{-1}Ofx$  распадается на сумму двух непересекающихся открытых слагаемых, одно из которых содержит точку  $x$  и содержится в  $Ox$ .

*Отображения, изменяющие размерность.* В. Гуревичем доказана следующая теорема об отображениях, повышающих размерность.

Если при замкнутом отображении  $f$  регулярного со счетной базой пространства  $X$  на регулярное со счетной базой пространство  $Y$  размер-

ность  $Y$  на  $k$  единиц больше размерности  $X$ , то пространство  $Y$  имеет точки, полный прообраз каждой из которых содержит не менее  $k + 1$  точек (кроме того, на всякий  $k$ -мерный компакт  $Y$  можно отобразить канторово совершенное множество так, что прообраз всякой точки состоит не более чем из  $k + 1$  точек).

Дальнейшие интересные результаты, связанные с локальной структурой таких отображений, получены И. А. Вайнштейном и Я. М. Каждном. При переходе к нормальным пространствам теорема Гуревича остается справедливой, в предположении, однако, что  $\dim Y - \text{Ind } X = k$  (Морита).

Хорошо известна также теорема об отображениях, понижающих размерность. Пусть  $f$  — замкнутое отображение пространства  $X$  на пространство  $Y$ ,  $m = \max \dim f^{-1}y$  и  $M_k$  — совокупность всех точек  $y \in Y$  таких, что  $\dim f^{-1}y \geq k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ). Гуревич доказал, что при этих условиях

$$\dim X \leq \dim Y + m.$$

Более тонкая формула получена Вайнштейном:

$$\dim X \leq \max_{0 \leq k \leq m} (\dim M_k + k).$$

Как показал А. В. Зарелуа, при переходе к нормальным пространствам формула Гуревича остается справедливой, но при условии, что  $Y$  слабо паракомпактно и  $\dim Y$  заменено на  $\text{Ind } Y$ . Используя гомологические методы, Е. Г. Скляренко распространил формулу Вайнштейна на произвольные паракомпактные пространства  $X$  и  $Y$ .

Особый интерес вызвал вопрос о возможности повышения размерности при открытых отображениях. После многолетних попыток доказать невозможность такого повышения А. Н. Колмогоров построил пример открытого отображения одномерного континуума на двумерный (дальнейшие очень интересные исследования освещены в разделе «Геометрическая топология многообразий»). С другой стороны, П. С. Александров доказал невозможность повышающих размерность счетнократных открытых отображений компактов (и даже несколько более общих пространств), а А. Н. Колмогоров доказал, что при всяком счетнократном открытом отображении компакта  $X$  существует всюду плотное в  $X$  открытое множество, состоящее из точек локальной топологичности.

Эти результаты П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова обобщены Б. А. Пасынковым на случай любых бикомпактов. Кроме того, Пасынков доказал следующую теорему, интересную и неожиданную даже для случая метризуемых пространств (компактов): всякий бикомпакт положительной (конечной или бесконечной) размерности является образом некоторого одномерного бикомпакта при некотором открытом нульмерном отображении.

*Универсальные пространства.* Универсальным пространством в некотором классе топологических пространств называется такое пространство этого класса, в котором содержатся в качестве подмножеств гомеоморфные образы всех пространств рассматриваемого класса. Для

класса метризуемых пространств со счетной базой универсальные пространства любой размерности были построены Небелингом, Менгером (для  $n = 1$ ), Лефшецем. Нагата нашел универсальное  $n$ -мерное пространство для метризуемых пространств произвольного веса  $\tau$  (размерность  $\dim$ ). П. С. Александров поставил задачу об отыскании универсального бикompакта в классе  $n$ -мерных (в смысле  $\dim$ ) нормальных пространств данного произвольного веса  $\tau$ . Эта задача недавно была решена почти одновременно А. В. Зарелуа и Б. А. Пасынковым. В основе построений Зарелуа лежит связь размерности с кольцом непрерывных функций на пространстве. Конструкция Пасынкова отличается краткостью и основана на факторизационной теореме Мардешича.

В последних работах (1963—1964 гг.) Пасынков нашел также некоторый общий способ построения универсальных пространств тех или иных классов. Этот способ основан на введенном им понятии частичного топологического произведения.

Взятие частичного произведения пространства  $X$  и пространства  $Y$  относительно открытого множества  $U \subset X$  заключается в надлежащем приклеивании к множеству  $X \setminus U$  произведения  $U \times Y$ . Более общий прием позволяет брать частичные произведения над системой открытых множеств. Примерами частичных произведений являются двумерная сфера (как произведение круга и двоеочия относительно внутренности круга) и менгеровская универсальная кривая. Метод Пасынкова позволяет получать простые конструкции универсальных пространств в уже известных случаях (в частности, для метризуемых пространств данной размерности и веса), а также новые. Например, Пасынков строит универсальный бикompакт в классе  $n$ -мерных бикompактов данного веса, допускающих нульмерные отображения на компакты (этот бикompакт является также универсальным для всех  $n$ -мерных метризуемых пространств данного веса). Все размерности его совпадают; более того, он совершенно  $n$ -мерен в смысле В. И. Пономарева. При  $n = 0$  он совпадает с  $D^\tau$ , а в случае счетного веса становится универсальным  $n$ -мерным компактом.

При помощи частичных произведений Пасынков получил следующее обобщение теоремы Небелинга — Понтрягина об универсальности  $(2n + 1)$ -мерного куба в классе  $n$ -мерных компактов: если метрическое пространство допускает нульмерное и совершенное отображение в  $n$ -мерное метрическое пространство  $X$ , то его можно вложить в произведение  $X$  и  $(n + 1)$ -мерного куба. Весьма далеким обобщением классической теоремы об универсальных  $n$ -мерных компактах является также результат Пасынкова о том, что почти для произвольной счетной системы компактов  $\Phi_i$  в классе всех компактов, разлагающихся в спектр из  $\Phi_i$ , существует универсальный компакт (в частности, существует универсальный компакт в классе всех компактов, допускающих для любого  $\varepsilon > 0$   $\varepsilon$ -отображения в  $n$ -мерный куб).

*Бесконечномерные пространства.* Еще П. С. Урысон заметил, что размерность  $\text{ind}$ , являющаяся, по существу, порядковым числом, может быть определена не только для конечномерных пространств. Например, если каждая точка бесконечномерного пространства обладает сколь угодно

но малыми окрестностями с конечномерными границами, то можно считать, что индуктивная размерность равна первому бесконечному порядковому (трансфинитному) числу  $\omega$ . Аналогично определяется трансфинитная размерность для любых порядковых чисел. В то же время Урысон высказал предположение, подтвержденное позднее результатами Гуревича, что некоторые пространства (например, гильбертов параллелепипед) вообще не имеют трансфинитной размерности. Гуревич показал, что для пространств со счетной базой трансфинитная размерность (в тех случаях, когда она определена) есть обязательно счетное порядковое число. Он впервые выделил класс бесконечномерных пространств, которые можно представить в виде суммы счетного числа нульмерных множеств (позже Нагата назвал такие пространства счетномерными), и доказал, что полное метрическое пространство тогда и только тогда имеет трансфинитную размерность, когда оно счетномерно.

Другой класс пространств бесконечной размерности был выделен П. С. Александровым, предложившим называть пространство слабо бесконечномерным, если для любой счетной системы пар замкнутых множеств  $C_i, C'_i, C_i \cap C'_i = \emptyset$ , можно найти перегородки  $B_i$  с пустым пересечением  $\bigcap_i B_i$ . Пространство, которое не является слабо бесконечно-

мерным, называется сильно бесконечномерным. Нетрудно показать, что всякое счетномерное пространство слабо бесконечномерно. До сих пор не известно, совпадают ли эти два класса пространств хотя бы в случае компактов. Этот вопрос уже давно был поставлен П. С. Александровым.

Кроме счетномерных и слабо бесконечномерных пространств в последние годы выделены еще некоторые классы. П. С. Александров указал на пространства, которые можно разложить в счетную сумму их замкнутых конечномерных подмножеств. Ю. М. Смирнов назвал такие пространства слабо счетномерными. Он построил пример счетномерного, но не слабо счетномерного компакта и заметил, что можно сузить класс слабо бесконечномерных (некомпактных) пространств, несколько видоизменив определение Александрова, а именно: можно потребовать, чтобы для любой счетной системы пар  $C_i, C'_i$  существовал конечный набор перегородок  $B_1, \dots, B_N$  с пустым пересечением (число  $N$  зависит от системы пар). Е. Г. Склиренко показал, что метризуемые слабо бесконечномерные в смысле Смирнова пространства редуцируются к слабо бесконечномерным компактам, для которых определения Смирнова и Александрова эквивалентны.

Б. Т. Левшенко и Е. Г. Склиренко дали характеристику сильно бесконечномерных бикомпактов с помощью существенных отображений. В окончательной форме получено следующее условие, эквивалентное сильной бесконечномерности (Е. Г. Склиренко): существует такое отображение  $f$  бикомпакта в гильбертов параллелепипед  $I^\infty$ , что для всякой конечномерной грани  $I^n$  параллелепипеда отображение  $f$  существенно на множестве  $f^{-1}I^n$ . Склиренко доказал также существование бесконечномерного канторова многообразия во всяком сильно бесконечномерном



бикомпакте <sup>10</sup>. Несколько ранее аналогичный результат получил Левшенко, который, однако, канторово многообразие понимал в некотором более слабом смысле.

Для бесконечномерных пространств справедливы аналоги теорем Гуревича об отображениях, повышающих размерность (Е. Г. Склиаренко): 1. При всяком отображении счетномерного компакта на несчетномерный в образе всегда найдутся точки, полный прообраз каждой из которых имеет мощность континуума. (Недавно А. В. Архангельский доказал эту теорему для любых полных метрических пространств, показав также, что множество всех точек, прообразы которых несчетны, несчетномерно.) 2. При всяком отображении слабо бесконечномерного бикомпакта на сильно бесконечномерный в образе найдутся точки, полный прообраз каждой из которых имеет мощность не меньше мощности континуума.

В связи с последним утверждением представляет интерес вопрос о том, справедливы ли для этих классов бесконечномерных пространств (хотя бы для компактов) аналоги теоремы Гуревича об отображениях, понижающих размерность (см. выше). Например, если  $f : X \rightarrow Y$  — отображение несчетномерного компакта на счетномерный, обязательно ли в  $Y$  существуют точки, полные прообразы которых несчетномерны. Б. Т. Левшенко доказал, что при отображении сильно бесконечномерного компакта на счетномерный найдется точка, полный прообраз которой сильно бесконечномерен.

Ю. М. Смирнов исследовал также размерность  $\text{Ind}$  для бесконечномерных пространств и показал, что каждое счетное трансфинитное число  $\alpha$  имеет компакт, для которого  $\text{Ind } X = \alpha$  (для размерности  $\text{ind}$  такие примеры построены Гуревичем). Неизвестно, справедливо ли равенство  $\text{Ind } X = \text{ind } X$  для бесконечномерных компактов (очевидно, что  $\text{ind } X \leq \text{Ind } X$ ) <sup>11</sup>.

Значительный интерес в теории бесконечномерных пространств представляет задача об отыскании универсального пространства в классе слабо бесконечномерных компактов, поскольку такой компакт, если он существует, был бы примером слабо бесконечномерного, но не счетномерного пространства (он содержал бы компакты любой трансфинитной размерности).

Наконец, только в самое последнее время (1965 г.) молодым американским математиком Хендерсоном решена задача, известная под названием проблемы Тумаркина: построен бесконечномерный компакт, не содержащий никакого замкнутого подмножества конечной положительной размерности.

<sup>10</sup> Канторовым многообразием называется бесконечномерный бикомпакт, который нельзя разбить никаким слабо бесконечномерным замкнутым подмножеством.

<sup>11</sup> Выяснению связи между этими размерностями посвящена работа Б. Т. Левшенко «Пространства трансфинитной размерности» (1965 г.).

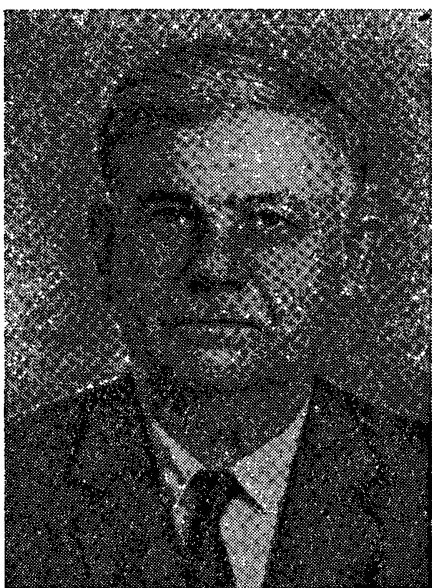
## Равномерные пространства и бикомпактные расширения

*Бикомпактные расширения.* Выше отмечалось (см. § 1), что наиболее естественным классом пространств, для которых можно строить бикомпактные расширения, является класс вполне регулярных пространств, введенных А. Н. Тихоновым<sup>12</sup>. Тихонов не только показал, что всякое вполне регулярное пространство обладает бикомпактными расширениями, но и предложил один из способов построения таких расширений. Метод Тихонова показывает, в частности, что одно и то же фиксированное пространство обладает, вообще говоря, большим запасом бикомпактных расширений. Чтобы продемонстрировать это, предположим, что  $Y$  — некоторое фиксированное бикомпактное расширение пространства  $X$ , т. е. бикомпакт, в котором  $X$  — всюду плотное подмножество. Тогда для всякого непрерывного отображения  $f$  пространства  $X$  в произвольный бикомпакт  $B$  (например, для всякой непрерывной ограниченной функции) можно построить новое бикомпактное расширение  $X$ , а именно, взять замыкание образа  $X$  в топологическом произведении  $Y \times B$  при вложении  $i \times f$  ( $i$  — вложение  $X$  в  $Y$ ).

Если в конструкции Тихонова, отвлекаясь от топологического веса пространства, взять все непрерывные на  $X$  ограниченные функции, то получится расширение, широко известное под названием чеховского. Оно было построено Чехом и Стоуном. Чеховское расширение  $\beta X$  обладает целым рядом примечательных свойств, многие из которых его вполне характеризуют. Важнейшим из них является следующее: любое бикомпактное расширение  $Y$  пространства  $X$  имеет естественное отображение  $\beta X \rightarrow Y$ , тождественное в точках пространства  $X$  (при этом, как нетрудно показать, точки нароста  $\beta X \setminus X$  переходят в точки из  $Y \setminus X$ ). Этот факт сразу свидетельствует о том, что множество всех бикомпактных расширений пространства можно рассматривать как частично упорядоченное, определив следующее отношение порядка: бикомпактное расширение  $Y$  пространства  $X$  предшествует бикомпактному расширению  $Z$  (или  $Z$  следует за  $Y$ ,  $Y \leq Z$ ), если есть отображение  $Z$  на  $Y$ , тождественное в точках пространства  $X$  (автоматически нарост  $Z \setminus X$  отображается в нарост  $Y \setminus X$ ). Расширение  $\beta X$  является единственным максимальным бикомпактным расширением пространства  $X$ .

Другой способ построения бикомпактных расширений предложил в 1939 г. П. С. Александров. В его конструкции точки расширения — это некоторые центрированные системы открытых множеств исходного пространства, которые он называет «концами». И хотя своим методом Александров строит только расширение  $\beta X$ , его подход оказывается в

<sup>12</sup> В случае хаусдорфовых пространств представляет интерес теория  $H$ -замкнутых расширений (см. § 1).  $H$ -замкнутым расширениям посвящены работы А. Н. Тихонова, А. Д. Александрова, С. В. Фомина, Н. А. Шанина. Специфические трудности возникают в теории бикомпактных расширений  $T_1$ -пространств; в последнее время этими расширениями занимались А. А. Иванов, В. М. Иванова, П. К. Осматеску.



В. А. Ефремович.

известном смысле универсальным. С. В. Фомин и Фрейденталь применили метод концов для построения других бикомпактных расширений. В 50-х годах Ю. М. Смирнов, опираясь на понятие пространства близости, показал, что метод концов применим для построения всех бикомпактных расширений вполне регулярных пространств.

*Пространства близости.* Как отмечалось выше, одним из преимуществ общего определения топологического пространства является то, что оно позволяет в инвариантной (не зависящей от метрики) форме изучать топологические (т. е. сохраняющиеся при гомеоморфных преобразованиях) свойства метрических пространств. Естественно возникает задача выделения и такой структуры, которая позволила бы в инвариантной форме изучать свойства

метрических пространств, сохраняющиеся при взаимно однозначных и в обе стороны равномерно непрерывных отображениях. Эта задача была решена В. А. Ефремовичем. Он ввел (1935 г.) понятие пространства близости (или «инфинитезимального пространства»).

Пространством близости называется любое множество  $E$ , в котором выделены некоторые пары подмножеств, считающихся близкими по отношению друг к другу, так, чтобы были выполнены следующие условия: 1) если  $A\delta B$ , то  $B\delta A$  ( $A\delta B$  означает, что  $A$  и  $B$  близки); 2)  $(A_1 \cup A_2)\delta B$  тогда и только тогда, когда либо  $A_1\delta B$ , либо  $A_2\delta B$ ; 3)  $x\delta y$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ; 4)  $E\delta \emptyset$  (т. е.  $E$  и пустое множество не являются близкими; будем говорить также, что множества далеки, если они не близки); 5) два любых далеких множества  $A\bar{\delta} B$  имеют непересекающиеся  $\delta$ -окрестности:

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad A\bar{\delta}(E \setminus U), \quad B\bar{\delta}(E \setminus V).$$

На всяком пространстве близости может быть определена топология: точка  $x \in E$  тогда и только тогда принадлежит замыканию множества  $A$ , когда  $x\delta A$ . Топологическое пространство  $E$  оказывается вполне регулярным. С другой стороны, всякое вполне регулярное пространство можно превратить в пространство близости (вообще говоря, бесконечным множеством способов), полагая, например,  $A\bar{\delta} B$  для всяких двух функционально отделимых множеств.

Отображение  $f: E \rightarrow E'$  пространств близости называется равномерно непрерывным, если оно переводит близкие множества в близкие (для метрических пространств, как показал В. А. Ефремович, это определение равномерной непрерывности совпадает с обычным); взаимно однозначное и в обе стороны равномерно непрерывное отображение называется эквиморфизмом. Два далеких множества в пространстве бли-

зости всегда можно разделить ограниченной равномерно непрерывной функцией<sup>13</sup>.

В работах В. А. Ефремовича, А. С. Шварца и других математиков отыскиваются различные инварианты, с помощью которых можно отличать друг от друга неэквивалентные пространства.



А. С. Шварц.

*Пространства близости и бикомпактные расширения.* В. А. Ефремович заметил, что бикомпакт имеет лишь одно совместное с его топологией отношение близости: два множества близки тогда и только тогда, когда их замыкания пересекаются. Таким образом, всякое бикомпактное расширение вполне регулярного пространства  $X$  определяет на этом пространстве некоторое отношение близости. Ю. М. Смирнов полностью выяснил связь между пространствами близости, определенными на заданном вполне регулярном пространстве, и его бикомпактными расширениями. Прежде всего он показал, что каждому отношению близости, определенному на пространстве  $X$ , можно поставить в соответствие некоторое естественно определяемое этой близостью бикомпактное расширение  $\delta X$ . Точками расширения  $\delta X$  служат так называемые  $\delta$ -концы, т. е. максимальные централизованные системы множеств в  $X$ , таких, что для всякого множества  $A$  в этой же системе найдется такое множество  $B$ , для которого  $B\bar{\delta}(X \setminus A)$ .

Далее Смирнов доказал, что соответствие между всеми отношениями близости, определенными на данном топологическом пространстве, и его бикомпактными расширениями является взаимно однозначным. Более того, если учесть частичную упорядоченность множества бикомпактных расширений, это соответствие превращается в изоморфизм<sup>14</sup>. Для метрических пространств получается интересный результат: пополнение метрического пространства совпадает с подмножеством всех тех точек соответствующего метрике бикомпактного расширения, в которых выполнена первая аксиома счетности.

Продолжая развивать теорию пространств близости, Ю. М. Смирнов указывает на возможность исследования этих пространств с помощью псевдометрик. Псевдометрика  $\rho(x, y)$  — это функция двух переменных, удовлетворяющая, как и обычная метрика, аксиомам симметрии и треугольника и равная нулю при  $x = y$ ; требуется также, чтобы  $\rho(A, B) = 0$  для любых близких множеств  $A$  и  $B$ . С помощью псевдометрик можно, например, определить пополнение пространства близости как

<sup>13</sup> А. А. Ивановым получено обобщение понятия пространства близости — пространство смежности.

<sup>14</sup> Расширение  $\delta_2 X$  тогда и только тогда следует за расширением  $\delta_1 X$ , когда тождественное отображение пространства  $X$ , рассматриваемое как отображение пространства близости  $\delta_2$  в пространство близости  $\delta_1$ , равномерно непрерывно.

наибольшее подмножество в бикompактном расширении  $\delta X$ , на которое продолжаются все псевдометрики данной близости.

Другой интересный подход к теории пространств близости недавно предложен М. Я. Антоновским, В. Г. Болтянским и Т. А. Сарымсаковым. Ими построена теория топологических полуполей и метризации над полуполями. С точки зрения этой теории всякое вполне регулярное пространство можно (вообще говоря, многими способами) метризовать со значениями в полуполях, причем всякое такое метрическое пространство порождает естественную близость. Для пространств, метризованных над полуполями, естественным образом строится теория пополнений.

*Равномерные пространства и теория пополнений.* Ю. М. Смирнов выясняет также связь между пространствами близости и равномерными пространствами по Вейлю. Равномерное пространство — это любое множество  $E$ , на котором выделена некоторая система  $\Sigma$  покрытий, называемая равномерной структурой; должны быть выполнены следующие условия: 1) если покрытие  $\alpha \in \Sigma$  вписано в покрытие  $\beta$ , то  $\beta \in \Sigma$ ; 2) пересечение  $\alpha \cap \beta$  двух покрытий из  $\Sigma$  также принадлежит  $\Sigma$  ( $\alpha \cap \beta$  — это покрытие множества  $E$ , элементами которого являются всевозможные пересечения  $A \cap B$ ,  $A \in \alpha$ ,  $B \in \beta$ ); 3) для каждого  $\alpha \in \Sigma$  в  $\Sigma$  найдется покрытие  $\beta$ , вписанное в  $\alpha$  звездно (это означает, что для каждого  $B \in \beta$  в покрытии  $\alpha$  найдется элемент  $A$ , который содержит не только  $B$ , но и всякий элемент покрытия  $\beta$ , имеющий с  $B$  непустое пересечение). Кроме того, требуется также, чтобы для любых двух точек  $x \neq y$  множества  $E$  в структуре  $\Sigma$  существовало покрытие  $\alpha$ , ни один элемент которого не содержит в себе одновременно  $x$  и  $y$ .

Всякая равномерная структура превращает  $E$  в пространство близости: множества  $A$  и  $B$  считаются близкими, если в любом покрытии структуры обязательно найдется хотя бы один элемент, пересекающийся с  $A$  и  $B$  одновременно. Верно и обратное, т. е. каждое пространство близости  $E$  является пространством некоторой равномерной структуры (для этого достаточно рассмотреть структуру  $\Sigma_\delta$ , порожденную всеми конечными открытыми покрытиями соответствующего данной близости бикompактного расширения пространства  $E$ ). Однако на одном и том же пространстве близости может быть, вообще говоря, не одна равномерная структура (Н. С. Рамм). Оказывается, что структура  $\Sigma_\delta$  является минимальной (по включению) из всех равномерных структур, определенных на данном пространстве близости<sup>15</sup>.

Ю. М. Смирнов строит пополнения пространств близости и устанавливает их связь с пополнениями равномерных пространств по Вейлю. Пополнение по Вейлю совпадает с максимальным множеством в  $\delta X$ , на которое можно продолжить все покрытия из равномерной структуры  $\Sigma$  ( $\delta X$ , как обычно, — бикompактное расширение, соответствующее определяемой  $\Sigma$  близости  $\delta$ ). В то же время пополнение пространства близости совпадает с максимальным в  $\delta X$  подмножеством, на которое

<sup>15</sup> Условия существования максимальной равномерной структуры рассмотрены учеником Ю. М. Смирнова В. Поляковым; он исследовал также произведения и обратные спектры пространств близости.

могут быть продолжены покрытия всех равномерных структур, определенных на этом пространстве близости. Для метрических пространств пополнение пространства близости совпадает с обычным. В частности, отсюда вытекает близостная инвариантность пополнения метрического пространства.

*Некоторые специальные бикомпактные расширения.* Как отмечалось выше, всякое (небикомпактное) вполне регулярное пространство обладает, вообще говоря, бесчисленным множеством бикомпактных расширений. Большой интерес представляет выделение из всех бикомпактных расширений тех, которые обладают какими-либо специальными свойствами. Отысканию или построению таких расширений посвящена значительная часть работ, относящихся к теории бикомпактных расширений. Приведем несколько примеров.

В. Гуревич показал, что всякое метризуемое пространство со счетной базой имеет компактное расширение, размерность которого равна размерности пространства. Е. Г. Скляренко распространил этот результат на пространства произвольного веса, показав, что всякое нормальное пространство веса  $\tau$  и размерности  $n$  имеет бикомпактное расширение веса  $\tau$  и размерности  $n$  (размерность  $\dim$ ). Более того, за всяким расширением  $Y$  нормального пространства  $X$  следует расширение  $Z$ , вес которого равен весу  $Y$ , а размерность — размерности пространства. Ю. М. Смирнов нашел пример одномерного (в смысле  $\text{ind}$ ) нормального пространства, не содержащегося ни в каком одномерном бикомпакте.

Для любого набора отображений пространства  $X$  в бикомпакты можно построить такое расширение  $Y$ , на которое можно продолжить все эти отображения (вес расширения  $Y$  не превосходит максимума из двух кардинальных чисел, первое из которых равно весу пространства  $X$ , а второе — мощности заданного набора отображений). А. В. Зарелуа, Р. Энгелькинг и Е. Г. Скляренко предложили способы построения бикомпактных расширений, на которые продолжаются заданные непрерывные отображения пространства в себя (в частности, гомеоморфизмы пространства).

Циппин и Фрейденталь показали, что всякое периферически бикомпактное пространство обладает бикомпактными расширениями с нульмерными (в смысле  $\text{ind}$ ) наростами (пространство называется периферически бикомпактным, если оно имеет базу, состоящую из открытых множеств с бикомпактными границами). Среди всех таких расширений существует единственное максимальное расширение  $\mu X$ . Для метризуемых пространств со счетной базой справедливо и обратное утверждение: из существования компактного расширения с нульмерным наростом вытекает периферическая компактность пространства. Ю. М. Смирнов построил пример пространства, которое, обладая бикомпактным расширением с нульмерным наростом, не является периферически бикомпактным. В то же время, как показал Е. Г. Скляренко, периферическая бикомпактность пространства эквивалентна существованию у пространства бикомпактных расширений с нульмерными наростами, если это пространство удовлетворяет следующему условию: всякое бикомпактное подмножество пространства  $X$  содержится в таком бикомпактном под-

множестве, которое обладает в  $X$  счетной фундаментальной системой окрестностей<sup>16</sup>.

Пример периферически бикомпактных пространств показывает, что некоторые свойства пространства можно характеризовать свойствами наростов в бикомпактных расширениях. Построено еще несколько таких примеров. Так, локальная бикомпактность пространства эквивалентна бикомпактности нароста в любом бикомпактном расширении этого пространства (П. С. Александров). Для того чтобы метризуемое пространство допускало топологически полную метрику, необходимо и достаточно, чтобы нарост в любом бикомпактном расширении этого пространства был суммой счетного числа бикомпактных подмножеств. Ю. П. Оревков нашел другие условия, эквивалентные полноте метрического пространства; при этом он рассматривал лишь бикомпактное расширение, соответствующее данной метрике. Оревков показал также, что наследственная нормальность нароста в соответствующем метрике бикомпактном расширении эквивалентна полной ограниченности пространства.

Е. Г. Скляренко выделил и исследовал класс бикомпактных расширений, названных им совершенными. Пусть  $Y$  — бикомпактное расширение пространства  $X$ ,  $U$  — открытое в  $X$  множество. Множество, которое является дополнением в  $Y$  к замыканию  $X \setminus U$ , обозначим через  $O(U)$ . Бикомпактное расширение  $Y$  пространства  $X$  называется совершенным, если для всякого открытого в  $X$  множества  $U$  замыкание в  $Y$  границы  $U$  является границей множества  $O(U)$ .

В частично упорядоченном множестве всех бикомпактных расширений пространства  $X$  совершенные расширения характеризуются тем, что они являются монотонными образами чеховского расширения, которое само всегда совершенно. При этом пространство  $X$  тогда и только тогда имеет минимальное совершенное расширение, когда оно имеет хотя бы одно расширение с пунктиформным наростом (пространство называется пунктиформным, если всякое его связное бикомпактное подмножество состоит из одной точки); в этом случае минимальное совершенное расширение единственно, имеет пунктиформный нарост и является максимальным из всех бикомпактных расширений с пунктиформным наростом. Минимальное совершенное расширение обозначается через  $\mu X$  (для периферически бикомпактных пространств оно совпадает с максимальным фрейденталевским расширением).

Совершенные расширения обладают интересными свойствами, выделяющими их среди других бикомпактных расширений, и используются для решения некоторых задач теории бикомпактных расширений. В частности, они характеризуются некоторыми гомологическими условиями. Количество совершенных расширений сильно зависит от связности рассматриваемого пространства. Например, чеховское расширение метризуемого пространства  $X$  тогда и только тогда является его единственным совершенным расширением, когда  $X = \Phi \cup U$ , где  $\Phi$  — компакт, а  $\dim U = 0$ .

<sup>16</sup> В последнее время Ю. М. Смирнов нашел необходимые и достаточные условия для  $n$ -мерности нароста.

Наиболее интересным из совершенных расширений является расширение  $\mu X$ . Как известно, всякое отображение  $X \rightarrow Y$  может быть продолжено до отображения чеховских расширений  $\beta X \rightarrow \beta Y$ . Если пространства  $X$  и  $Y$  локально бикомпактны, то этим же свойством обладают одноточечные бикомпактные расширения при ограничении классом совершенных отображений (см. § 2). Оказывается, если пространства  $X$  и  $Y$  имеют расширения  $\mu X$ ,  $\mu Y$ , то всякое совершенное отображение  $X \rightarrow Y$  продолжается до отображения  $\mu X \rightarrow \mu Y$ , а всякий гомеоморфизм  $X$  на себя продолжается до гомеоморфного отображения на себя расширения  $\mu X$ .

## Геометрическая топология многообразий

### 1

#### Проблемы вложения

Термин «геометрическая топология», принадлежащий М. Ньюмену, употребляют, когда хотят подчеркнуть, что алгебраический аппарат играет второстепенную роль или что речь идет о топологическом типе многообразия и т. п. При максимально широком понимании к нему следовало бы отнести, с одной стороны, конкретную теоретико-множественную топологию, например теорию континуумов, а с другой — основы дифференциальной топологии, скажем, теоремы аппроксимации Хефлигера. Милнор в число важнейших проблем геометрической топологии включает гипотезу Пуанкаре в размерности три и четыре, триангулируемость многообразий и основную гипотезу для комбинаторных многообразий, топологическую инвариантность рациональных классов Понтрягина, которая была недавно доказана С. П. Новиковым, и простого гомотопического типа, гипотезу кольца. Мы рассмотрим значительно более скромный круг вопросов: проблему топологических вложений в евклидовы пространства компактов, полиэдров и многообразий, проблемы, связанные с изучением группы гомеоморфизмов евклидова пространства (и с гипотезой кольца), и вопросы, касающиеся непрерывных отображений многообразий. Над этим кругом вопросов работает семинар при Математическом институте им. В. А. Стеклова, которым руководит Л. В. Келдыш. В основном речь будет идти лишь о работах последних десяти лет.

Вложением пространства  $X$  в евклидово пространство  $E^k$  называется гомеоморфное отображение  $X$  в  $E^k$ . Известен классический результат, согласно которому подпространство вложений в  $E^k$   $p$ -мерного пространства  $X$  имеет при  $2p + 1 \leq k$  вторую категорию в пространстве всех отображений  $X$  в  $E^k$ . При этом, если  $X$  — полиэдр, то кусочно-линейные вложения образуют всюду плотное множество. Напомним результат А. А. Маркова (1934 г.): если  $k > 2p + 1$ , то два всяких вложения  $p$ -мерного компакта  $X$  в  $E^k$  соединимы «слабой изотопией», т. е. такой гомотопией, которая в каждый момент есть вложение.



Основная проблема вложения в ее топологическом аспекте состоит в выяснении топологической эквивалентности двух вложений  $f_i: X \rightarrow E^k$ ,  $i = 0, 1$ , т. е. существования такого гомеоморфизма  $h: E^k \rightarrow E^k$ , что  $f_1 = hf_0$ . Более сильным требованием является условие изотопности вложений, что означает существование однопараметрического семейства гомеоморфизмов  $g_t: E^k \rightarrow E^k$ , непрерывного по совокупности переменных и такого, что  $g_0 = 1$  (тождество),  $f_1 = g_1 f_0$ . Группа топологических преобразований  $E^k$  обозначается  $H(E^k)$  и рассматривается в компактно открытой топологии. Основная проблема состоит в изучении связности этой группы, прежде всего линейной связности. Линейная связность означает, что два любых гомеоморфизма, одновременно сохраняющие или обращающие ориентацию, изотопны. Еще Александер выделил класс гомеоморфизмов, изотопных тождественному, — это гомеоморфизмы  $E^k$ , оставляющие на месте точки некоторого открытого множества. Позднее, уже в 60-х годах, стало ясно, что подгруппа  $SH(E^k)$ , порожденная в  $H(E^k)$  этими гомеоморфизмами, особенно важна. Ее называют подгруппой стабильных гомеоморфизмов. Легко доказывается, что она является наименьшим нормальным делителем в  $H(E^k)$ . Из рассуждения Александера вытекает линейная связность и локальная линейная связность этой группы и, как недавно было показано, при  $k \neq 4$  стабильные гомеоморфизмы аппроксимируются кусочно-линейными.

Вопрос о совпадении  $SH(E^k)$  и положительной компоненты  $H(E^k)$  — гомеоморфизмов, сохраняющих ориентацию  $E^k$ , является важной проблемой о стабильности гомеоморфизмов  $E^k$  (эквивалентной проблеме кольца). Назовем гомеоморфизм  $E^k$  стабильным, если он есть суперпозиция стабильного гомеоморфизма и гомеоморфизма, тождественного на  $p$ -мерной гиперплоскости ( $k$ - и  $(k-1)$ -стабильные степени 1 совпадают со стабильными). С помощью индуктивного рассуждения А. В. Чернавскому удалось доказать, что каждый гомеоморфизм  $E^k$   $p$ -стабилен, если  $p \leq k-3$ , а также что из  $(k-2)$ -стабильности вытекает  $(k-1)$ -стабильность.

О вложениях в двумерную плоскость все давно хорошо известно. Вложения в  $E^3$  уже представляют значительные трудности, так как существуют так называемые дикие вложения, т. е. вложения, не эквивалентные топологически стандартным вложениям. Первые примеры диких нульмерных компактов были построены одновременно Антуаном и П. С. Урысоном. В дальнейшем число примеров таких вложений возросло, особенно после работы Артина и Фокса (1948 г.). Все они касались вложений в  $E^3$ . Впервые А. Ивановым и несколько позднее Бланкеншипом были построены примеры диких нульмерных компактов в произвольном  $E^k$ ; при  $k > 2$  Иванов показал, что если компакт может быть вложен в  $E^k$ , то два топологически неэквивалентных вложения существуют тогда и только тогда, когда он несчетен.

В 50-х годах в работах американской школы, главным образом Бинга и Мойса, было подробно изучено вложение в  $E^3$  полиэдров и многообразий (а также нуль-компактов). Это привело к решению Hauptvermutung<sup>17</sup> в трехмерном случае и доказательству триангулируемости

<sup>17</sup> Hauptvermutung утверждает, что если между двумя полиэдрами (конечными или локально конечными объединениями выпуклых многогранников разных

3-многообразий. Начиная с 1959 г. происходит поворот к изучению вложений в многомерные пространства. Первой была работа Б. Мазура. При некотором ограничении, оказавшемся позднее несущественным, он доказал так называемую обобщенную теорему Шенфлиса (см. ниже). Почти сразу же эта теорема другим методом и без ограничений была доказана М. Брауном. Работы Мазура и Брауна привели к постановке ряда проблем и вызвали большое количество исследований. На эту проблематику обратила внимание своего семинара Л. В. Келдыш.

Первая задача заключается в установлении критериев «правильности» вложения. Вложение симплекса  $f: \Delta^p \rightarrow E^k$  называется правильным, если оно топологически эквивалентно стандартному вложению  $\Delta^p$  в  $E^k$ . Более строгим является требование стабильной эквивалентности  $f: \Delta^p \rightarrow E^k$  стандартному вложению, что влечет за собой изотопность стандартному вложению. В 50-х годах было дано много разных критериев правильности вложения дуги и диска в  $E^3$ . Первый общий критерий доказал А. Б. Сосинский. В несколько усиленном виде он может быть сформулирован так: вложение  $f: \Delta^p \rightarrow E^k$  топологически правильно тогда и только тогда, когда оно может быть продолжено на окрестность каждой точки  $x \in \Delta^p$  в  $E^k$ . В силу упоминавшейся выше теоремы о  $p$ -стабильности гомеоморфизмов можно сказать, что при  $p \leq k - 3$  топологически правильное вложение  $p$ -симплекса в  $E^k$  стабильно-эквивалентно стандартному. Для вложения сфер в  $E^k$ , кроме «узловой» размерности  $p = k - 2$ , результаты аналогичны. Однако здесь доказательства принципиально труднее. Вопрос этот был решен в основном Столлингсом (при  $p = k - 1$  — это упоминавшийся выше результат Мазура и Брауна).

Для вложения многообразий интересны в первую очередь две задачи. Назовем вложение многообразия локально плоским в точке, если эта точка обладает в многообразии окрестностью, гомеоморфной симплексу, который правильно вложен в  $E^k$ . Первая задача состоит в выяснении вопроса, обладают ли локально плоско вложенные в  $E^k$  многообразия окрестностью, гомеоморфной косому, вообще говоря, произведению многообразия и евклидова пространства дополнительной размерности. Эта задача, кроме упомянутых выше случаев симплексов и сфер, не рассматривалась и в общем случае очень сложна<sup>18</sup>.

Другая задача касается отсутствия особенностей, т. е. изолированных точек, в которых вложение не локально плоско. Некоторые частные результаты получены американскими исследователями. В общем виде задача была почти полностью решена А. В. Чернавским. Оказалось, что при  $k > 4$  и при  $p \neq k - 2$   $p$ -мерное многообразие не может иметь в  $E^k$  особых точек, причем при  $k \geq 3$  и любом  $p$  многообразие не может

---

размерностей в  $E^k$ ) существует гомеоморфизм, то между ними существует и кусочно-линейный гомеоморфизм, т. е. симплициальный в некоторых их прямолинейных триангуляциях. В настоящее время известно, что это неверно, вообще говоря, для полиэдров размерности больше четырех.

<sup>18</sup> Из работы Столлингса вытекает, что этот факт верен для сфер при  $p \neq k - 2$ . Недавно С. П. Новиков доказал его и для случая  $p = k - 2$ ,  $k \geq 7$ .

иметь особых точек на своем крае. Единственным нерешенным случаем для внутренних точек многообразия остался случай  $p = 3$ ,  $k = 4$ . (Случай  $k = 3$  особый, здесь особые точки могут быть как внутри, так и на крае при  $p = 1$  и  $p = 2$ .) Если  $p = k - 2$ ,  $k \neq 4$ , то существует довольно простой критерий локальной плоскостности.

Случай  $p = k - 2$  наиболее трудный при изучении вложения  $p$ -сфер в  $E^k$ . Он рассмотрен А. Б. Сосинским. Сосинский изучил топологические узлы, задавая отношение эквивалентности посредством группы стабильных гомеоморфизмов. Узлом называется локально плоское вложение  $S^{k-2}$  в  $E^k$  (с точностью до топологического преобразования  $E^k$ ). Аналогично тому, как это делается в случае  $E^3$ , вводится сумма узлов. Доказывается разложимость узлов на простые узлы относительно этой суммы, отсутствие обратных элементов.

Сосинский изучает также особые точки вложения, которые, как сказано выше, возможны<sup>19</sup> лишь при  $p = k - 2$ . Он строит особенности бесконечного типа так, что локальная фундаментальная группа дополнения в особой точке имеет бесконечное число образующих, а также пример таких двух  $(k - 2)$ -мерных клеток, локально плоско вложенных в  $E^k$ , что их пересечение вложено локально плоско в  $E^k$  и в край каждой из них, а их объединение есть клетка, которая имеет ровно одну особую точку. Как показал А. В. Чернавский, такое объединение невозможно, если размерность клеток отлична от  $k - 2$  и  $k \geq 4$ .

Вложение полиэдра в  $E^k$  естественно считать правильным, если оно топологически эквивалентно кусочно-линейному вложению. Предложены различные критерии правильности вложения, но наиболее удобен следующий. Требуется, чтобы вложение было локально плоским на каждом открытом симплексе некоторого подразделения данной триангуляции полиэдра. Этот критерий заведомо негоден при  $p = k - 2$ , например в силу рассмотренного выше примера А. Б. Сосинского. Однако, как показал А. В. Чернавский, при  $p < \frac{2}{3}k - 1$  вложение полиэдра, локально плоское на каждом открытом симплексе некоторой триангуляции,  $\varepsilon$ -изотопно кусочно-линейному вложению при изотопии, тождественной вне  $\varepsilon$ -окрестности образа вложения.

Л. В. Келдыш рассмотрела вложение нульмерных компактов в  $E^k$  и предложила критерии ручного вложения. (Вложение нуль-компакта в  $E^k$  называется ручным, если оно изотопно в  $E^k$  вложению в прямую в  $E^k$ .) Критерий состоит в том, что вложение должно быть клеточно разделенным. (Компакт называется клеточно разделенным в  $E^k$ , если его можно представить в виде пересечения строго убывающей последовательности окрестностей, каждая из которых есть дизъюнктное объединение конечного числа открытых клеток; замыкания которых содержатся в предыдущих окрестностях.) Ученик Л. В. Келдыш М. Штанько показал, что для клеточной разделенности компакта в  $E^3$  необходимо и достаточ-

<sup>19</sup> Такую особенность можно получить проще всего так: взять в  $E^3$  нетривиальный узел и построить в  $E^4$  над ним конус. Получившийся диск в  $E^4$  будет вложен с одной особенностью. Однако особенность эта существенно конечного, полиэдрального характера.

но, чтобы он был отделим сферой от всякого непересекающегося с ним конечного одномерного полиэдра (недавно Штанько распространил этот результат на многомерный случай). В случае одномерных компактов клеточно разделенно в  $E^k$  могут быть вложены древовидные компакты и только они. Для вложений нульмерных компактов в  $E^k$ , двумерных сфер в  $E^3$  и  $p$ -мерного полиэдра в  $E^k$ ,  $p < \frac{2}{3}k - 1$ , Л. В. Келдыш доказала, что произвольное вложение  $g$  может быть получено из ручного вложения посредством псевдоизотопии, т. е. такой гомотопии  $h_t: E^k \rightarrow E^k$ , что  $h_t$  является гомеоморфизмом при всех  $t < 1$  и  $g = h_1 t$ . Иначе говоря, данное вложение получается из ручного «сморщиванием» пространства.

## 2

### Открытые отображения многообразий

Традиционная тематика «конкретных теоретико-множественных топологов» — открытые отображения многообразий. Долгое время казалось, что открытые отображения должны быть достаточно тесно связаны с топологическими свойствами, чтобы, например, сохранять размерность<sup>20</sup>. Заслуга опровержения этой иллюзии принадлежит советским топологам. Первый неожиданный пример построен А. Н. Колмогоровым: на кривой Менгера действует 2-адическая группа и ее пространство орбит есть поверхность Понтрягина. Размерностная неполноценность этого континуума оставляла некоторые сомнения. Однако затем были построены новые примеры открытого отображения одномерного континуума: Кажданом — на квадрат и Локуциевским — на гильбертов параллелепипед. Кульминацией явилось построение Л. В. Келдыш нульмерно открытого отображения кривой Менгера на квадрат. Таким способом можно построить также отображение менгеровой кривой на любой куб. Недавно Б. А. Пасынков разработал изящную технику, с помощью которой оказалось возможным, используя пример Л. В. Келдыш в качестве «затравки», строить нульмерно открытые отображения кривой Менгера даже на гильбертов параллелепипед. Важно отметить, что кривая Менгера во всех примерах, где она участвует, появляется лишь как предел обратного спектра и узнается с помощью критерия Андерсона. До сих пор не удалось построить такого отображения непосредственно на стандартно заданной кривой Менгера, что было бы очень желательным для решения проблемы Хопфа (см. ниже).

<sup>20</sup> Отображение называется открытым, если оно переводит открытые множества в открытые. Отображение называется монотонным, если прообразы точек связны. Отображение называется нульмерным, если прообразы точек нульмерны, изолированным, — если прообразы точек дискретны. Отображение неприводимо, если никакое собственное замкнутое множество не отображается на весь образ. Отображение ациклично до размерности  $p$ , если все прообразы точек ацикличны до размерности  $p$ .

Итак, нульмерно открытые отображения в общем случае оказываются совершенно несвязанными с размерностью. Что касается монотонно открытых отображений, то Андерсон показал, что существуют монотонно открытые отображения кривой Менгера на гильбертов параллелепипед. Известно, что монотонные отображения не повышают размерности двумерных многообразий. Большой неожиданностью было построение Л. В. Келдыш примера монотонно открытого отображения  $n$ -мерного куба ( $n \geq 3$ ) на кубы большей размерности. В этом примере сначала происходит монотонное (неприводимое) отображение, повышающее размерность, затем — открытое отображение образа на себя и суперпозиция также оказывается открытой и монотонной. Следующее замечание, сделанное Л. В. Келдыш, вскрывает геометрическую суть ее построения. Оказывается, что монотонная часть отображения может быть получена как предел  $\varepsilon$ -плотных вложений 3-куба в 4-куб, обладающих тем свойством, что любые две точки образа вложения, отстоящие друг от друга на расстоянии меньшем  $2\varepsilon$ , могут быть соединены в образе дугой, диаметр которой меньше  $4\varepsilon$ . Основываясь на этом замечании, А. В. Чернавский построил отображения кубов на кубы большей размерности, обобщающие пример Л. В. Келдыш в следующем смысле: для каждого  $k$  и для  $p$  такого, что  $2p + 3 \leq k$ , существует отображение  $k$ -мерного куба на любой куб большей размерности, включая гильбертов параллелепипед, которое ациклично до размерности  $p$ . Это отображение строится как предел вложений  $k$ -куба, удовлетворяющих условиям, которые соответственно обобщают условия Л. В. Келдыш. Более того, деформацией образа это отображение может быть превращено по методу Л. В. Келдыш в монотонно открытое. Условие на границу ацикличности нельзя улучшить, как следует из работы Р. Фрум-Кеткова, в которой доказана также необходимость зацепления прообразов точек. Предложенный Л. В. Келдыш прием превращения монотонных отображений в монотонно открытые использовал А. Б. Сосинский. Он показал, что монотонные образы 2-сферы, так называемые кактоиды, можно получить также при монотонно открытом отображении 2-сферы.

Наиболее интересными нерешенными проблемами в рассматриваемом круге вопросов являются классические проблемы Хопфа и Александрова о нульмерно открытых отображениях многообразий: существует ли неконечнократное открытое отображение замкнутого многообразия (Хопф) и существует ли нульмерно открытое отображение многообразия, повышающее размерность (Александров). Обе проблемы давно решены в отрицательном смысле для 2-многообразий и не решены для 3-куба. Не решена также ограниченная проблема Хопфа: существует ли неконечнократное открытое отображение 3-куба на себя.

А. В. Чернавский разобрал структуру конечнократных открытых отображений многообразий. Оказалось, что к ним может быть до некоторой степени применена гомологическая техника Смита, разработанная для периодических преобразований. Это дало возможность переизвести на конечнократные открытые отображения теоремы Монтгомери, Ньюмена и Смита, касающиеся периодических преобразований многообразий. Прежде всего, конечнократное открыто-замкнутое отображение

связного многообразия имеет ограниченную кратность; множество точек в образе, прообразы которых имеют максимально возможную кратность, образует открытое всюду плотное множество. В последнее время появились работы о конечнократных открытых отображениях многообразия на многообразие. Высказана гипотеза, что если образ и прообраз не имеют края, то либо множество ветвления (точек, где нет локального гомеоморфизма) пусто, либо его размерность равна  $k - 2$ . А. В. Чернавский доказал, что она не больше  $k - 2$ , а Ю. Ю. Трохимчук, — что при  $k = 3$  ветвление не может быть нульмерным, т. е. при  $k = 3$  конечнократное открытое отображение многообразия на многообразие либо имеет одномерное ветвление, либо является накрытием.

В последнее время некоторыми исследователями рассматривалась локальная степень нульмерных отображений. Если дано отображение многообразия  $M$  в многообразие  $M_1$  такой же размерности, то степенью отображения в точке  $x$  из  $M$  называется предел чисел, равных коэффициенту зацепления образа границы окрестности с образом точки  $x$  при стремлении к нулю диаметра окрестности. Окрестность берется так, чтобы образ границы не содержал образа точки. Ясно, что это определение приложимо только к нульмерным отображениям и легко построить примеры, когда локальная степень не определена даже для нульмерного отображения. Однако она всегда определена для изолированных отображений. Отображение называется ориентированным в точке, если для достаточно малых окрестностей все указанные коэффициенты зацепления одного знака или нули. Легко показать, что если отображение строго ориентированно в некоторой точке, то оно открыто в этой точке, т. е. образ этой точки является внутренним для образа любой окрестности точки.

Ю. Ю. Трохимчук показал, что если отображение области пространства  $E^k$  в  $E^k$  нульмерно и локальная степень определена и положительна в каждой точке области, кроме, возможно, точек некоторого множества, такого, что дополнение к его образу всюду плотно в образе области, то отображение изолированно и открыто во всей области и локальная степень всюду положительна. Это предложение (близкое утверждение почти одновременно доказали Титус и Юнг) он применил к изучению условия моногенности отображений. Теоремы о конечнократных открытых отображениях, доказанные Чернавским, позволили решить задачи, касающиеся изолированных отображений. Например, при таком отображении локальная степень не изменяет знака, так как размерность ветвления меньше  $k - 1$ , что, в частности (см. выше), верно для отображений, у которых локальная степень всюду определена и всюду не равна нулю. Это «свойство Дарбу» было доказано ранее А. М. Роднянским для дифференцируемых отображений.

Рассмотрим еще один класс отображений  $E^k$ . Если клеточно разделенный компакт в  $E^k$  есть континуум, то он называется клеточно вложенным, или клеточным. Если дополнение к компакт гомеоморфно дополнению к точке, то компакт называется точечным. Браун заметил, что оба эти свойства компакта в  $E^k$  эквивалентны. Они эквивалентны еще такому свойству: существует отображение  $E^k$  на себя, гомеоморфное вне

компакта и переводящее компакт в точку. Около 20 лет существовала гипотеза, что при отображениях  $E^h$ , для которых прообразы всех точек точечны, образ гомеоморфен  $E^h$  (будем называть такие отображения точечными). Эта гипотеза была опровергнута примером Бинга, после чего появились работы, в которых изучались точечные отображения сначала только  $E^3$ . Л. В. Келдыш получила результаты, касающиеся точечных отображений произвольного  $E^h$ . Например, если  $X$  есть образ  $E^h$  при точечном отображении, при котором лишь счетное число точек имеет неодноточечные полные прообразы, то  $X$  вложим в  $E^{h+1}$ .

В связи с точечными отображениями возникает ряд интересных вопросов. Без труда показывается, что если отображение  $E^h$  на себя приближается гомеоморфизмами, то оно точечно и даже более — прообраз клеточного множества клеточен. Назовем отображение с таким свойством клеточным. Будут ли точечные отображения клеточными? Является ли условие клеточности достаточным, чтобы отображение можно было приблизить гомеоморфизмами? Ответ на первый вопрос положителен, как показали для случая отображения сферы В. П. Компаниец и А. В. Чернавский. В. П. Компаниец доказал также, что отображения сферы на себя, при которых только счетное число прообразов точек невырождено, необходимо клеточны. Недавно В. П. Компаниец доказал общий гомотопический критерий клеточности отображения многообразия на многообразие ( $n \geq 5$ ). Он состоит, грубо говоря, в том, что прообраз каждого открытого множества должен иметь те же гомотопические группы, что и само множество. Из этого следует, что клеточные отображения сохраняют гомотопический тип, а также что они совпадают с точечными отображениями ( $n \geq 5$ ).

## Гомологическая топология

С самого начала возникновения топологии как отдельной математической науки — в трудах Пуанкаре в конце XIX в. — стало очевидным, что для решения важнейших ее задач и широкого и глубокого ее применения в других областях математики целесообразно и даже необходимо использование алгебраических методов. Топологическое строение фигуры, особенности ее расположения в пространстве, признаки, указывающие на топологическое различие (негомеоморфность) двух фигур, проблема возможности распространения данного отображения некоторого подмножества пространства на все пространство, к которой сводится большое число других важных проблем, представляют собой основные области топологического исследования, прогресс в которых был достигнут именно благодаря применению алгебры. С другой стороны, понятия и методы, выработанные при алгебраическом исследовании указанных задач, оказались важнейшим средством при разработке принципиальных вопросов в других областях математики (а также многих важных вопросов естествознания): теории уравнений (как дифференциальных, так и интегральных), теории функций (действительного и, особенно, комплексного переменных), вариационного ис-

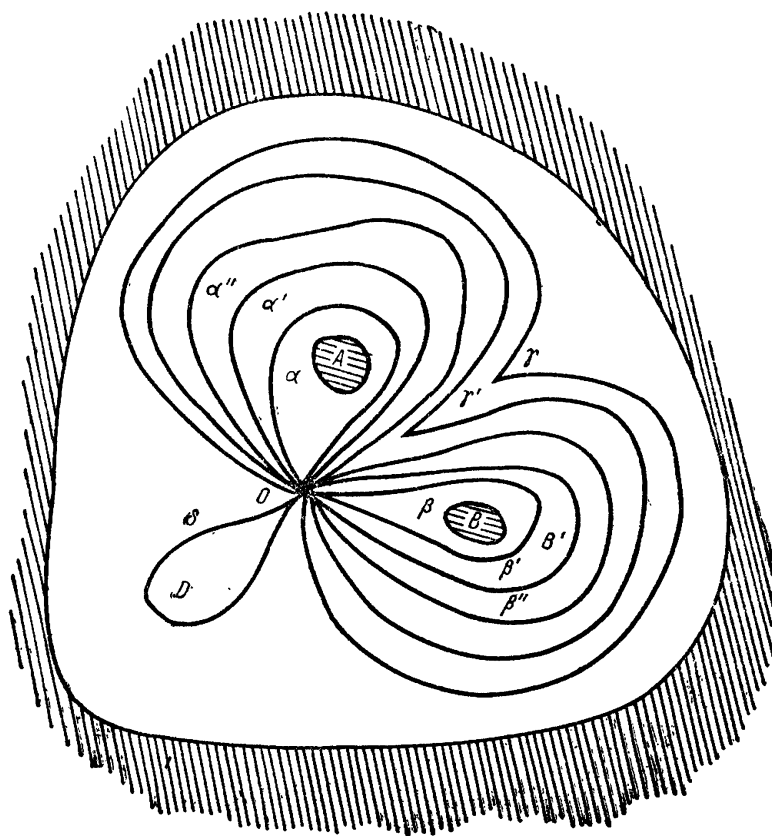


Рис. 1.

числения, функционального анализа, геометрии, в частности алгебраической, и даже самой алгебры.

Одной из главных особенностей алгебраического подхода к топологическим вопросам является сопоставление пространству определенной алгебраической системы — группы, кольца и т. п. — топологически инвариантным способом, т. е. так, чтобы гомеоморфным пространствам соответствовали изоморфные системы. Одно из важнейших свойств фигуры, которое эти группы должны выразить, — это свойство связности: из скольких кусков состоит фигура, сколько у нее отверстий, сколько в ней пустот и т. п. Эти признаки, очевидно, выражают более грубые, но вместе с тем более стойкие и существенные свойства фигуры, чем свойства, выражаемые инвариантами классических геометрий — метрическими, аффинными и проективными, которые не меняются, соответственно, при ортогональных, любых, линейных (с отличным от нуля определителем) и дробно-линейных преобразованиях, т. е. движениях и отражениях, равномерных сжатиях и проектированиях. Топологические же инварианты выдерживают не только простые преобразования, выражаемые элементарными функциями координат точки, но и любые взаимно однозначные и взаимно непрерывные (т. е. гомеоморфные) преобразования.



Существуют два способа выражения интересующих нас свойств фигуры. Первый основывается на возможности деформации: о наличии отверстия  $A$  у фигуры  $\Omega$  (см. рис. 1) мы судим по тому, что замкнутую кривую  $\alpha$ , начинающуюся и кончающуюся в точке  $O$ , нельзя стянуть в точку  $O$  непрерывной деформацией кривой  $\alpha$ , протекающей полностью в фигуре  $\Omega$  (этому будет мешать отверстие  $A$ ), в то время как, например, кривую  $\delta$  можно стянуть в точку  $O$  деформацией, которая все время протекает внутри  $\Omega$ . Чтобы придать этим наглядным представлениям точный смысл, надо дать определение деформации. Не существенно, что мы в данном случае деформировали кривую (отображение сегмента  $I = [0, 1]$  в точку (постоянное отображение)). Можно говорить о деформируемости одного в другое двух произвольных отображений  $f$  и  $g$  пространства  $R$  в пространство  $S$ . В случае кривых (не непременно замкнутых) при деформации описывается криволинейный четырехугольник, который можно представить как результат отображения квадрата — произведения сегмента на сегмент. Следовательно, в общем случае  $f$  и  $g$  деформируемы одно в другое, если существует непрерывное отображение  $\varphi$  произведения  $R \times I$  в  $S$ , при котором  $\varphi$  на  $R \times 0$  совпадает с  $f$ , а на  $R \times 1$  — с  $g$ . В нашем исходном примере важно было, что во время всей деформации точка  $O$  оставалась неподвижной. В соответствии с этим в общем случае мы должны потребовать, чтобы не только  $f$  и  $g$ , но и  $\varphi$  переводило данное подмножество  $R_0 \times t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) пространства  $R \times I$  в данное подмножество  $S_0$  пространства  $S$ . Такие отображения  $f$  и  $g$  называются гомотопными относительно  $R_0$ . Это есть соотношение эквивалентности, и поэтому все отображения  $R$  в  $S$  разбиваются на классы гомотопных между собой отображений. Очевидно, что нас интересуют именно эти классы, а не их отдельные представители: на наличие отверстия  $A$  указывает не только кривая  $\alpha$ , но в такой же мере и кривая  $\alpha'$  и вообще все гомотопные им кривые. Кривые  $\beta, \beta', \dots$ , гомотопные между собой, но не гомотопные кривым  $\alpha, \alpha', \dots$ , указывают на наличие отверстия  $B$ .

Кривые  $\gamma, \gamma', \dots$ , гомотопные между собой, но не гомотопные ни  $\alpha, \alpha', \dots$ , ни  $\beta, \beta', \dots$ , указывают на наличие обоих отверстий  $A$  и  $B$ ; с точностью до гомотопии они представляют собой сумму кривых  $\alpha, \alpha', \dots$  и  $\beta, \beta', \dots$ . Чтобы убедиться в этом, сегмент  $I$  надо разделить пополам, первую половину отобразить в соответствии с  $\alpha$ , а вторую — в соответствии с  $\beta$ ; тогда полученная кривая  $\alpha + \beta$  будет гомотопна кривой  $\gamma$ . Произведенная выше факторизация — разбиение отображений на классы гомотопных между собой отображений — согласуется с введенным сложением: замена слагаемых другими представителями из этих же классов оставляет сумму в том же классе. Поэтому сложение можно распространить на классы. Класс  $[\delta]$  кривых  $\delta, \delta', \dots$  будет нулевым элементом при таком сложении; выбор ориентации сегмента дает возможность рассматривать обратные элементы; класс кривой  $\beta + \beta$  будет удвоенным классом  $2[\beta]$  класса  $[\beta]$  и т. п. Таким образом множество рассматриваемых классов приобретает алгебраическую структуру. Придав точность этим наглядным представлениям, можно показать, что эта алгебраическая система есть группа, так называемая фундаментальная группа

пространства относительно точки  $O$ , введенная Пуанкаре. Беря вместо сегмента  $n$ -мерный куб и рассматривая алгебраическую систему гомотопических классов таких его отображений в  $R$ , которые переводят все грани в данную точку из  $R$ , мы приходим к понятию  $n$ -мерной гомотопической группы  $\pi_n(R, O)$  пространства  $R$  относительно  $O$ , впервые систематически изученному В. Гуревичем в середине 30-х годов. Ясно, что вместо кубов можно рассматривать сферы и такие отображения, которые переводят данную точку сферы в точку  $O$ . В отличие от  $\pi_1(R, O)$  группы  $\pi_n(R, O)$ , при  $n \geq 2$ , являются коммутативными.

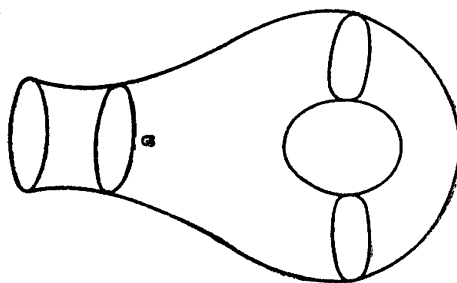


Рис 2.

В основе другого способа определения связности лежат понятие границы и сводящиеся к нему понятия цикла и гомологии. Фигура  $\Omega$  (см. рис. 1) имеет кусок  $D$  поверхности, границей которого является кривая  $\delta$ , но в ней нет никакого куска, границей которого была бы кривая  $\alpha$ ; его отсутствие вызвано наличием отверстия  $A$ . Точно так же в  $\Omega$  нет пленок, которые были бы натянуты на  $\alpha', \beta, \beta', \dots, \gamma, \gamma'$ . Итак, среди замкнутых кривых, наглядных прообразов основных объектов теории гомологии — циклов, есть такие кривые, которые являются границами, т. е. ограничивают кусок поверхности (так называемую цепь), или, как говорят, гомологичны нулю в рассматриваемой фигуре, и такие, которые не являются границами, т. е. не ограничивают куска поверхности, или негомологичны нулю. Сами циклы, будучи замкнутыми, «не имеют границы», т. е. «имеют границу нуль». И в данном случае нас интересуют не сами кривые, а классы эквивалентных между собой кривых (эквивалентными кривыми мы считаем две такие кривые, которые являются общей границей какого-либо куска поверхности; они называются гомологичными между собой; таковы кривые  $\beta$  и  $\beta'$ , ограничивающие кольцо  $B'$ ). Сумма циклов есть их объединение, и, в силу согласованности такого сложения с факторизацией, сложение распространяется на классы. Рассматривая кривые с направлением обхода, кратные кривые (т. е. кривые, пройденные некоторое число раз) и т. п., мы приходим к мысли, что система изучаемых классов должна иметь групповую структуру. Максимальное число гомологически независимых циклов и будет характеризовать связность. Отличие этого способа (гомологического) от первого (гомотопического) видно на рис. 2, где кривая  $\alpha$  ограничивает кусок поверхности, но не стягивается на ней в точку.

Чтобы придать предыдущим наглядным представлениям точный смысл и доказать высказанное предположение о групповой структуре, прибегают к методу триангуляции пространства, если, конечно, данное пространство можно триангулировать, т. е. представить его в виде такого объединения конечного или бесконечного числа кусков, что каждый кусок гомеоморфен симплексу некоторой размерности, а пересечение двух кусков, если оно не пусто, есть кусок рассматриваемого объединения, являющийся общей гранью указанных двух кусков. При этом  $r$ -мер-

ный симплекс есть наименьшее выпуклое множество евклидова пространства, содержащее данные  $r + 1$  точек, не лежащих в какой-либо гиперплоскости размерности  $r - 1$ . Таким образом, сегмент, треугольник, тетраэдр суть симплексы размерностей 1, 2, 3, соответственно. Всевозможные подмножества данных  $r + 1$  точек аналогично определяют грани различных размерностей этого симплекса (сами точки являются нульмерными гранями или вершинами), и система этих граней переносится посредством гомеоморфизма с данного симплекса на указанный выше кусок фигуры, который также называется (кривым) симплексом. Все эти симплексы ориентируются и каждой паре симплексов соседних размерностей  $t^r$  и  $t^{r-1}$  приводится в соответствие число  $[t^r : t^{r-1}]$  (называемое коэффициентом инцидентности пары), равное нулю, если  $t^{r-1}$  не есть грань  $t^r$ , и равное  $+1$  или  $-1$ , в зависимости от того, совпадает или не совпадает собственная ориентация  $t^{r-1}$  с той ориентацией, которую  $t^{r-1}$  получает, как грань, от  $t^r$ .

Сформулируем одно из основных определений:  $r$ -мерной цепью  $c_r$  называется функция, определенная на  $r$ -мерных (кривых) симплексах рассматриваемой триангуляции  $K$  пространства  $R$  и принимающая значения (называемые коэффициентами в этой цепи) из данной абелевой группы  $X$ . Заметим, что вначале рассматривались конкретные группы коэффициентов: аддитивная группа целых чисел (А. Пуанкаре), группа целых чисел, приведенных по модулю  $m$ , чаще при  $m = 2$  (О. Веблен и Дж. Александер), группа рациональных чисел (С. Лефшец) и т. п. В полной общности понятие группы коэффициентов было введено П. С. Александровым. Заметим также, что в случае бесконечной триангуляции рассматриваются лишь функции, почти все значения которых равны нулю, — так называемые конечные цепи. Совокупность всех  $r$ -мерных цепей, если определить в ней сложение как обычное сложение функций, превращается в группу  $C_r(K, X)$ . Граничный гомоморфизм  $\partial$  группы  $C_r(K, X)$  в  $C_{r-1}(K, X)$  определяется по формуле

$$\partial c_r(t^{r-1}) = \sum_{t^r \in K} c_r(t^r) [t^r : t^{r-1}].$$

Ядро  $Z_r(K, X)$  этого гомоморфизма есть группа  $r$ -мерных циклов, а образ  $B_r(K, X)$  — группа  $r$ -мерных границ или ограничивающих циклов. Легко вычислить, что  $\partial^2 = 0$ , т. е., что  $B_r(K, X)$  есть подгруппа группы  $Z_r(K, X)$ . Фактор-группа  $Z_r(K, X)$  по  $B_r(K, X)$  и есть  $r$ -мерная группа гомологии  $H_r(K, X)$  триангуляции  $K$  над группой коэффициентов  $X$ . Доказана теорема инвариантности о том, что группы гомологии двух триангуляций одного и того же или двух гомеоморфных пространств изоморфны. Поэтому можно говорить о группе гомологии  $H_r(R, X)$  пространства  $R$ .

В случае конечного комплекса  $K$  группа гомологии является (абелевой) группой с конечным числом образующих. Ранг и коэффициенты кручения этой группы называются числом Бетти и коэффициентами кручения комплекса  $K$  (и того пространства, триангуляцией которого является  $K$ ). Один из способов вычисления этих чисел основан на рассмот-

рении матрицы, состоящей из коэффициентов инцидентности данного комплекса.

Важны два обобщения. С одной стороны, вместо симплексов, указанных выше, можно брать любые выпуклые многогранники; с другой — вместо комплекса, являющегося триангуляцией какого-то пространства, можно взять абстрактный комплекс, вершинами которого являются элементы любой природы, некоторые подмножества которых (или некоторые соответствующие им предметы) объявлены симплексами, с соблюдением условия, что подмножества симплексов являются симплексами. Комплексом можно было бы назвать еще упорядоченную совокупность некоторых элементов, называемых симплексами, с двумя целочисленными функциями элементов и пар элементов, называемых размерностью и коэффициентом инцидентности, которые удовлетворяют определенным аксиомам. Ниже показано, насколько важен такой абстрактный подход к понятию комплекса.

Однако класс тех пространств, которые можно триангулировать (такие пространства называются полиэдрами), представляет лишь небольшую, правда очень важную, часть класса всех топологических пространств, и как сама математика, так и многие другие науки приводят к задачам, в которых надо исследовать гомологические свойства пространств, не являющихся полиэдрами. Поэтому не только с теоретической точки зрения, но и с точки зрения применений важно определить гомологическую группу произвольного пространства и изучить ее свойства. Когда советские математики заинтересовались алгебраической топологией — именно теорией гомологии, в работах Пуанкаре, Брауэра, Веблена, Александера и других ученых уже были разработаны основы комбинаторной топологии полиэдров и одним из наиболее актуальных и трудных вопросов был вопрос о перенесении этих результатов на более широкий класс пространств. Московские топологи, вышедшие из школы Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина и уже получившие фундаментальные результаты по теоретико-множественной топологии, и по широте интересов к абстрактным вопросам, и по опыту работы в теории топологических пространств как нельзя лучше были подготовлены для исследования этой проблемы. Естественно, что за ее решение взялся глава московской и вообще советской топологической школы П. С. Александров.

Метод, предложенный П. С. Александровым для решения этой проблемы, стал одним из самых фундаментальных методов всей алгебраической топологии и ее применений. Он состоит в исследовании гомологических свойств пространства с помощью его покрытий: представления пространства в виде объединения конечного числа достаточно малых кусков (покрытия), приведения в соответствие каждому покрытию определенного комплекса, так называемого нерва этого покрытия, и организации совокупности всех нервов, соответствующих рассматриваемым покрытиям, в единую упорядоченную систему — так называемый проекционный спектр данного пространства — путем отображения каждого комплекса в предыдущий. Именно, каждому покрытию  $\alpha = \{U_i\}$  пространства  $R$  его подмножествами  $U_i$  П. С. Александров приводит в соответствие комплекс  $N_\alpha$  — нерв покрытия  $\alpha$ , — вершинами которого

являются элементы  $U_i$  покрытия  $\alpha$ , причем вершины  $U_{i_0}, \dots, U_{i_r}$  образуют симплекс тогда и только тогда, когда  $\bigcap_{s=0}^r U_{i_s} \neq \emptyset$ . Если покрытие  $\beta = \{V_j\}$  вписано в  $\alpha$ , т. е. каждое  $V_j$  из  $\beta$  содержится в некотором  $U_i$  из  $\alpha$ , то, приводя каждому  $V_j$  в соответствие одно из  $U_i$ , его содержащее, получим отображение вершин комплекса  $N_\beta$  в вершины комплекса  $N_\alpha$ . Полученное отображение  $\pi_{\beta\alpha}$  есть симплициальное отображение комплекса  $N_\beta$  в комплекс  $N_\alpha$ , т. е. оно отображает вершины, образующие симплекс в  $N_\beta$ , в вершины, образующие симплекс в  $N_\alpha$ .

Таким образом, получаем упорядоченную по вписанности систему  $\{N_\alpha, \pi_{\beta\alpha}\}$  комплексов  $N_\alpha$  с симплициальными отображениями  $\pi_{\beta\alpha}$ , определенными при  $\beta > \alpha$ . Посредством этой системы, называемой проекционным спектром пространства, можно исследовать пространство  $R$  — это комбинаторный путь его исследования, предложенный П. С. Александровым. В случае, когда  $R$  — полиэдр, вообще можно ограничиться одним покрытием  $\alpha$ . В случае произвольного пространства приходится брать всю систему  $\{\alpha\}$ ; при этом результаты исследования будут, вообще говоря, зависеть от того, из какой именно системы покрытий  $\{\alpha\}$  исходят. Некоторые результаты теоретико-множественного характера, полученные с помощью этого метода П. С. Александровым и многими другими исследователями, изложены в первом разделе главы. Мы рассмотрим главные результаты по теории гомологии. Описанная конструкция позволяет распространить в той или иной степени результаты теории комплексов (и, следовательно, полиэдров) на любые топологические пространства или ставить вопрос о нахождении условий такого распространения. Кроме того, она имеет свою проблематику.

В первых работах этого направления, опубликованных в 1925—1928 гг., П. С. Александров рассматривает счетную последовательность покрытий, состоящих из замкнутых подмножеств компакта. В 1935 г. А. Г. Курош обобщил эту теорию на бикомпактные пространства, заменив последовательности частично упорядоченными направленными системами. Так же как П. С. Александров в случае компактов, А. Г. Курош в общем случае рассматривает замкнутые канонические покрытия, т. е. покрытия, элементами которых являются замыкания непересекающихся открытых множеств, совпадающих с внутренностями своих замыканий (аналогичные построения дал Дж. Александер). Каждый элемент такого покрытия содержится в единственном элементе любого предыдущего покрытия, что дает возможность рассматривать цепи всего спектра. Э. Чех вместо замкнутых покрытий рассмотрел открытые покрытия произвольных топологических пространств; в случае нормальных пространств оба подхода дают одну и ту же гомологическую теорию. Понятие проекционного спектра пространства привело к другим аналогичным образованиям. П. С. Александров рассмотрел абстрактные проекционные спектры, элементами которых являются не непременно нервы покрытий пространства, а произвольные комплексы, связанные симплициальными отображениями указанного выше вида. В 1931 г., а затем снова в 1938 г., в известной монографии «Непрерывные

группы», Л. С. Понтрягин изучил последовательность компактных групп счетного веса, связанных непрерывными гомоморфизмами, отображающими каждую группу в предыдущие (обратный спектр групп), и последовательность счетных дискретных групп, каждая из которых гомоморфно отображается в следующие (прямой спектр групп). Н. Стинрод в 1936 г. рассмотрел общий случай, сняв условия счетности.

Своим методом проекционных спектров П. С. Александров вначале исследовал свойства некоторых числовых инвариантов для компактов. Этим же методом вскоре было выработано основное понятие гомологической группы пространства и именно оно стало главным объектом исследования. Поэтому мы подробнее опишем, как строится это понятие и примыкающие к нему другие важные понятия, пользуясь современной терминологией и тем изложением, которое впоследствии дал П. С. Александров.

П. С. Александров берет систему конечных открытых покрытий пространства  $R$ . Симплициальное отображение  $\pi_{\beta\alpha}: N_\beta \rightarrow N_\alpha$  нерва  $N_\beta$  покрытия  $\beta$  в нерв  $N_\alpha$  покрытия  $\alpha$ , где  $\alpha < \beta$ , индуцирует гомоморфизм групп цепей

$$\pi_{\beta\alpha*}: C_r(N_\beta, X) \rightarrow C_r(N_\alpha, X)$$

по формуле

$$\pi_{\beta\alpha*} c_r(t_\alpha^r) = \sum \pm c_r(t_\beta^r),$$

где сумма распространяется на все такие симплексы  $t_\beta^r \in N_\beta$ , которые отображаются на данный симплекс  $t_\alpha^r$  из  $N_\alpha$ :  $\pi_{\beta\alpha}(t_\beta^r) = t_\alpha^r$ , а знак «+» или «-» берется в зависимости от того, совпадают или не совпадают ориентации  $t_\alpha^r$  и  $\pi_{\beta\alpha}(t_\beta^r)$ . Этот гомоморфизм, коммутирующий с граничным гомоморфизмом  $\partial$  и в силу этого индуцирующий гомоморфизм групп гомологии  $\pi_{\beta\alpha*}: H_r(N_\beta, X) \rightarrow H_r(N_\alpha, X)$ , не зависит от того, в какой именно элемент  $u$  покрытия  $\alpha$  отобразить данный элемент  $v$  покрытия  $\beta$ , лишь бы  $u$  содержало  $v$ . Поэтому гомоморфизмы  $\pi_{\beta\alpha*}$  обладают свойством транзитивности  $\pi_{\gamma\beta*}\pi_{\beta\alpha*} = \pi_{\gamma\alpha*}$  и порождают систему  $\{H_r(N_\alpha, X), \pi_{\beta\alpha*}\}$  групп  $H_r(N_\alpha, X)$ , т. е. обратный спектр групп. Здесь и используется теория таких систем групп, указанная выше. По этой теории для произвольного обратного спектра  $\{A_\alpha, \rho_{\beta\alpha}\}$ , состоящего из любых групп  $A_\beta$  (а не непременно из групп гомологии) и гомоморфизмов  $\rho_{\beta\alpha}: A_\beta \rightarrow A_\alpha$ ,  $\beta > \alpha$ , с условием  $\rho_{\gamma\beta}\rho_{\beta\alpha} = \rho_{\gamma\alpha}$ , предельная группа  $A = \varprojlim \{A_\alpha, \rho_{\beta\alpha}\}$  определяется как множество элементов  $a = \{a_\alpha\}$ , получающееся выбором по одному элементу  $a_\alpha$  из каждой группы  $A_\alpha$  так, что  $\rho_{\beta\alpha} a_\beta = a_\alpha$ , со сложением, определенным координатно:  $\{a_\alpha\} + \{b_\alpha\} = \{a_\alpha + b_\alpha\}$ . Возвращаясь теперь к рассмотренному выше обратному спектру  $\{H_r(N_\alpha, X), \pi_{\beta\alpha*}\}$  групп гомологии нервов  $H_r(N_\alpha, X)$  и беря его предельную группу, получаем, по определению,  $r$ -мерную группу гомологии  $H_r(R, X)$  пространства  $R$  над группой коэффициентов  $X$ . Если  $X$  — топологическая группа, а комплекс  $K$  конечен, то обычным способом определенная топология произведения вводится и в группе цепей  $C_r(K, X)$ , ибо последняя, очевидно, есть произведение группы  $X$  самой на себя столько раз, сколько  $r$ -мерных симплексов имеет  $K$ ; отсюда топология индуциру-

ется и на группу гомологии  $H_r(K, X)$  как на фактор-группу, образованную из определенных подгрупп группы  $C_r(K, X)$ . Топология вносится и в группу  $H_r(R, X)$ . Это есть релятивная топология, которую  $H_r(R, X)$  получает от произведения топологических групп  $H_r(N_\alpha, X)$ , составляющих спектр группы  $H_r(R, X)$ , ибо предельная группа обратного спектра групп, очевидно, есть подгруппа произведения этих групп. Если  $X$  — бикompактная группа, то бикompактными оказываются и  $H_r(K, X)$  и  $H_r(R, X)$ .

В 1935 г. А. Н. Колмогоров (и одновременно Дж. Александер) ввел понятие когомологии, ставшее важнейшим понятием топологии и ее многочисленных приложений. При определении когомологической группы комплекса  $K$  исходят опять-таки из группы цепей, называемой в данном случае группой коцепей и обозначаемой через  $C^r(K, X)$ . Однако коцепи не предполагаются непременно конечными, как в случае цепей, а группа коэффициентов  $X$  здесь предполагается дискретной и когомологическая группа не топологизируется. Вопрос сводится к определению граничного оператора, так называемой кограницы. Кограница  $\delta$  коцепи  $c^r$  определяется по формуле

$$\delta c^r(t^{r+1}) = \sum c^r(t^r)[t^r : t^{r+1}].$$

По аналогии с теорией гомологии, коциклами называются коцепи  $c^r$ , кограница которых есть нуль:  $\delta c^r = 0$ , а когомологическими нулю называются коцепи  $c^r$ , являющиеся кограницами, т. е. коцепи, для которых существует  $c^{r-1}$  с  $\delta c^{r-1} = c^r$ . Группа  $B^r(K, X)$  кограниц, в силу  $\delta^2 = 0$ , есть подгруппа группы  $Z^r(K, X)$  коциклов, а фактор-группа

$$H^r(K, X) = Z^r(K, X) / B^r(K, X)$$

и есть группа когомологии комплекса  $K$  над группой коэффициентов  $X$ . Определение когомологической группы пространства основывается также на нервах и их симплициальных отображениях, но здесь используются прямые спектры групп. Симплициальное отображение  $\pi : K \rightarrow L$  комплекса  $K$  в комплекс  $L$  индуцирует гомоморфизм

$$\pi^* : C^r(L, X) \rightarrow C^r(K, X)$$

групп коцепей по формуле

$$\pi^* c^r(t^r) = c^r(\pi(t^r)),$$

где  $t^r \in K$ , а  $c^r \in C^r(L, X)$ . Отсюда, в силу переместительности  $\pi^* \delta = \delta \pi^*$ , получаем и гомоморфизм

$$\pi^* : H^r(L, X) \rightarrow H^r(K, X)$$

групп когомологии. Следовательно, совокупность нервов  $N_\alpha$  конечных открытых покрытий  $\alpha$  с симплициальными отображениями  $\pi_{\beta\alpha}$ , определенными указанным выше способом при  $\beta > \alpha$ , порождает прямой спектр  $\{H^r(N_\alpha, X), \pi_{\beta\alpha}^*\}$  групп когомологии нервов с индуцированными гомоморфизмами  $\pi_{\beta\alpha}^*$ .

Теперь вопрос сводится к определению предельной группы прямого спектра. Пусть имеем прямой спектр  $\{B_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\}$  произвольных абстрактных

(т. е. не топологических) групп, обозначенных направленной системой индексов  $\{\alpha\}$ , и гомоморфизмы  $\pi_{\alpha\beta}$ , определенные при  $\alpha < \beta$  и обладающие свойством транзитивности:

$$\pi_{\alpha\beta}\pi_{\beta\gamma} = \pi_{\alpha\gamma}.$$

Элементами предельной группы  $B = \varinjlim \{B_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\}$  этого спектра являются классы эквивалентности объединения  $\bigcup_\alpha B_\alpha$ , когда эквивалентными считаются элементы  $b_\alpha$  и  $b_\beta$ , для которых существует такое  $\gamma$ , что

$$\pi_{\alpha\gamma}b_\alpha = \pi_{\beta\gamma}b_\beta.$$

Два любых класса  $b = \{b_\alpha\}$  и  $b' = \{b'_\beta\}$ , в силу направленности системы  $\{\alpha\}$ , имеют такие представители  $b_\gamma$  и  $b'_\gamma$ , которые принадлежат одной и той же группе  $B_\gamma$ . Класс, содержащий сумму  $b_\gamma + b'_\gamma$ , объявляется суммой  $b + b'$  классов  $b$  и  $b'$ . Эти определения превращают  $B$  в группу, которая не топологизируется. Применение к спектру  $\{H^r(N_\alpha, X), \pi_{\beta\alpha}^*\}$  даст, в виде его предельной группы,  $r$ -мерную когомологическую группу  $H^r(R, X)$  пространства  $R$  над группой коэффициентов  $X$ . Вскоре А. Н. Колмогоров (и независимо от него Дж. Александер) ввел понятие кольца когомологии, определив умножение элементов  $r$ - и  $s$ -мерных групп когомологии комплекса со значением в  $(r + s)$ -мерной группе. Произведение классов гомотопии в частном случае получил И. И. Гордон.

Связь между группами гомотопии и когомологии одного и того же пространства устанавливается теорией характеров (создана Л. С. Понтрягиным в 1932 г.), имеющей кроме теории гомотопии много других важных применений. Характером топологической группы  $X$  Л. С. Понтрягин называет ее непрерывный гомоморфизм в группу  $\mathbb{k}$  действительных чисел, приведенных по модулю 1. Обычное сложение гомоморфизмов превращает множество характеров группы  $X$  в группу  $Y$ , которая топологизируется так: окрестностью нуля в  $Y$  считается множество всех таких характеров группы  $X$ , которые переводят данное бикompактное множество из  $X$  в данную окрестность нуля в  $\mathbb{k}$ . Оказывается, что группа характеров локально бикompактной группы есть локально бикompактная группа, группа характеров которой совпадает с исходной группой. При этом группа характеров бикompактной группы есть дискретная группа и наоборот. Если бикompактная группа  $X$  и дискретная группа  $Y$  являются группами характеров одна другой или, как говорят, двойственны:  $X \mid Y$ , то группа  $r$ -мерных цепей  $C_r(K, X)$  и группа  $r$ -мерных коцепей  $C^r(K, Y)$  комплекса  $K$  над группами коэффициентов  $X$  и  $Y$ , соответственно, также двойственны, ибо произведение дискретных групп двойственно произведению двойственных групп. Отсюда, в силу основных теорем теории характеров, следует и двойственность  $H_r(K, X) \mid H^r(K, Y)$  групп гомотопии и когомологии комплекса  $K$  при  $X \mid Y$ . Таким образом, группа когомологии относительно данной группы коэффициентов есть группа характеров гомотогической группы той же размерности относительно группы коэффициентов, являющейся группой характеров данной группы.



Чтобы получить такую же связь для групп пространства, надо двойственность распространить с групп на их спектры. Это возможно в силу того, что если есть гомоморфизм  $\rho_{\beta\alpha} : A_\beta \rightarrow A_\alpha$  и если  $B_\beta \mid A_\beta$  и  $B_\alpha \mid A_\alpha$ , то так называемый сопряженный с  $\rho_{\beta\alpha}$  гомоморфизм  $\pi_{\alpha\beta} : B_\alpha \rightarrow B_\beta$  определяется следующим образом: элементу  $b_\alpha$  из  $B_\alpha$  приводится в соответствие тот элемент  $b_\beta = \pi_{\alpha\beta}(b_\alpha)$  из  $B_\beta$ , который, как характер группы  $A_\beta$ , совпадает с гомоморфизмом  $\rho_{\beta\alpha} b_\alpha$ . Наоборот, задание гомоморфизма  $\pi_{\alpha\beta}$  определяет, аналогично, сопряженный с ним гомоморфизм  $\rho_{\beta\alpha}$ . Следовательно, если есть обратный спектр  $\{A_\alpha, \rho_{\beta\alpha}\}$  компактных групп  $A_\alpha$ , то переходом к группам характеров и сопряженным гомоморфизмам получаем однозначно определенный двойственный прямой спектр  $\{B_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\}$  дискретных групп  $B_\alpha$  и наоборот. Если  $A$  и  $B$  — предельные группы двойственных спектров, то, определяя  $a(b)$  (или  $b(a)$ ), где  $a = \{a_\alpha\} \in A$ ,  $b = \{b_\alpha\} \in B$ , как  $a_\alpha(b_\alpha)$  (соответственно,  $b_\alpha(a_\alpha)$ ), получаем гомоморфизм  $a : B \rightarrow \kappa$  (соответственно,  $b : A \rightarrow \kappa$ ). Отсюда можно вывести двойственность предельных групп двойственных спектров:  $A \mid B$ . Применяя этот вывод к спектрам  $\{H_r(N_\alpha, X), \rho_{\beta\alpha}\}$  и  $\{H_r(N_\alpha, Y), \pi_{\alpha\beta}\}$ , состоящим из гомологических и когомологических групп нервов, находим, что группы гомологии и когомологии пространства  $R$  над двойственными группами коэффициентов  $X$  и  $Y$  двойственны:  $H_r(R, X) \mid H_r(R, Y)$ . Таким образом, задание группы гомологии пространства над некоторой группой коэффициентов вполне определяет группу когомологии той же размерности рассматриваемого пространства над двойственной группой коэффициентов и наоборот.

Как мы видели, указанные понятия и конструкции, которые, безусловно, принадлежат к самым лучшим и основополагающим достижениям топологии первой половины нашего века и которые созданы трудами в первую очередь П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова и Л. С. Понтрягина, не только алгебраизировали теоретико-множественную топологию, открыв путь для распространения на любые пространства алгебраической теории полиэдра, но и геометризировали ее, представив пространство как систему полиэдров.

Топологическая проблема, на решение которой ведущие советские топологи с самого начала направили свои усилия, — это законы двойственности. Теоремы двойственности привлекают своей исключительной геометрической наглядностью, и этой проблемой занимались с самого начала создания топологии ее представители. Кроме того, общепризнано, что именно при исследовании вопросов двойственности проверяется, насколько целесообразно и удачно созданы те или иные гомологические понятия и методы, например те же группы гомологии. Проблема двойственности состоит в том, чтобы, исходя из гомологических свойств данного множества  $M$  пространства  $R$  и из расположения  $M$  в  $R$ , выраженного также в гомологических терминах, исследовать гомологические свойства дополнения  $R \setminus M$  множества  $M$  в  $R$ . Так, в первоначальной теореме Жордана  $R$  есть плоскость,  $M$  — простая замкнутая непрерывная кривая (т. е. множество, гомеоморфное окружности), а утверждение заключается в том, что  $R \setminus M$  состоит

из двух областей: из этих областей можно выбрать по одной точке, которые нельзя соединить кривой, целиком лежащей в  $R \setminus M$ . Иначе говоря, свойство окружности разбивать плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю — и быть их общей границей есть топологическое свойство в классе плоских множеств.

Однако в пространстве окружность не обладает этим свойством. В пространстве могут быть кривые, гомеоморфные окружности, или, скажем, паре окружностей, но различно расположенные, например заузленная и незаузленная окружность или две пары окружностей, такие, что окружности одной пары зацеплены, а другой пары не зацеплены. В этом случае пространство невозможно гомеоморфно отобразить само на себя так, чтобы эти кривые перешли одна в другую. Зацепление и обобщает свойство разбиения. Совокупность указанных выше двух точек, одна из которых была взята во внешней, а другая во внутренней области, также может быть рассмотрена как 0-мерная окружность (граница 1-мерного шара, т. е. отрезка), зацепленная с данной 1-мерной окружностью в том смысле, что на эти две точки нельзя натянуть кривую, не пересекающую данную окружность. В пространстве 0-мерная окружность заменяется обычной, т. е. 1-мерной окружностью, на которую невозможно натянуть кусок поверхности (пленку), не пересекающийся с данной окружностью. При этом пересечение может быть в нескольких точках и каждой такой точке можно приписать знак «+» или «—», придавая кривым, пленке и всему пространству определенные ориентации. Таким образом получается алгебраическое число пересечения кривой с поверхностью или зацепления кривых. Важно, что это число не зависит от того, какая именно пленка натягивается на кривую, т. е. оно характеризует расположение самих кривых в пространстве. Обобщая и придавая точность этим представлениям, приходим к понятию о зацеплении  $r$ -мерного и  $(n - r - 1)$ -мерного циклов в  $n$ -мерном многообразии.

Идея рассмотреть зацепление как обобщение разбиения восходит к А. Лебегу (1911 г.), который показал, что  $n$ -мерное многообразие разбивает  $(n + 1)$ -мерное пространство по крайней мере на две области и что это есть частный случай свойства  $r$ -мерного многообразия, лежащего в  $n$ -мерном пространстве, быть зацепленным с  $(n - r - 1)$ -мерным многообразием. Л. Брауэр в 1911—1913 гг. построил теорию зацеплений и, с одной стороны, доказал теорему Жордана для случая  $n$ -мерного сферического многообразия, лежащего в  $(n + 1)$ -мерном евклидовом пространстве, а с другой — показал, что число областей, на которое произвольное плоское замкнутое множество (в частности, несколько раз самопересекающаяся кривая) разбивает плоскость, зависит лишь от топологических свойств этого самого множества. В 1922 г. Дж. Александер получил дальнейшее обобщение и первую теорему собственно двойственности. Он доказал, что в  $n$ -мерном сферическом многообразии  $S^n$  (евклидовом пространстве, дополненном бесконечно удаленной точкой)  $r$ -мерное число Бетти по модулю 2 дополнения  $S^n \setminus P$  данного полиэдра  $P$ , лежащего в  $S^n$ , равно  $(n - r - 1)$ -мерному числу Бетти по модулю 2 самого  $P$ .

В 1927 г. появляются первые советские работы (П. С. Александрова и Л. С. Понтрягина), относящиеся к проблеме двойственности. В них дается усиление теоремы Александера, аналогичное усилению теоремы двойственности Пуанкаре, полученному О. Вебленом в 1923 г. Теорема Пуанкаре (1895 г.) содержит утверждение, что  $r$ -мерное число Бетти  $n$ -мерного замкнутого ориентируемого многообразия совпадает с его  $(n - r)$ -мерным числом Бетти, а  $r$ -мерные кручения — с  $(n - r - 1)$ -мерными кручениями. Усиление Веблена основывается на условиях негомологичности нулю цикла в многообразии, выраженного в терминах индексов пересечения. Оно содержит утверждение о существовании для  $r$ -мерного базиса гомологии (максимальной системы гомологически независимых циклов)  $(n - r)$ -мерного базиса, такого, что матрица из индексов пересечений циклов этих базисов имеет детерминант, равный  $\pm 1$ . В указанном выше усилении теоремы Александера роль индексов пересечений играют коэффициенты зацепления, которые включаются в общую теорию пересечений, развитую С. Лефшецем в 1926 г.

Обобщение теоремы Александера, данное Л. С. Понтрягиным, содержит утверждение, что если циклы  $z_i^r$ ,  $i = 1, \dots, p$ , составляют  $r$ -мерный базис гомологии  $\text{mod } 2$  пространства  $R^n - K$ , где  $R^n$  есть  $n$ -мерное евклидово пространство, а циклы  $\zeta_j^{n-r-1}$  составляют  $(n - r - 1)$ -мерный базис  $\text{mod } 2$  полиэдра  $K$ , то матрица из коэффициентов зацепления циклов  $z_i^r$  и  $\zeta_j^{n-r-1}$  имеет детерминант, равный единице. Результат П. С. Александрова, полученный им в 1927 г., позволил распространить указанное утверждение с полиэдров даже на любые компакты. Это обобщение приблизило решение очередного вопроса: можно ли в теореме Александера заменить числа Бетти их естественным обобщением — группами гомологии, взятыми над произвольной группой коэффициентов. Сложность заключается в том, что при прямом, непосредственном понимании ответ на этот вопрос оказывается отрицательным: даже для полиэдров и даже при целых числах в качестве группы коэффициентов группа гомологии полиэдра не изоморфна группе гомологии дополнения. Фундаментальным достижением Л. С. Понтрягина (1932 г.), поднявшим всю теорию двойственности и вообще теорию гомологии на качественно новый уровень, явилось привлечение для решения рассматриваемой задачи различных групп коэффициентов, в том числе топологических. Это произошло в рамках созданной Понтрягиным общей теории характеров.

В 1931 г. Л. С. Понтрягин все еще исследует чисто алгебраические (нетопологические) группы, значения для произведений элементов пары таких групп он берет из циклической группы — конечной или бесконечной (а не из группы действительных чисел  $\text{mod } 1$ ) — и вместо двойственностей в смысле теории характеров оперирует изоморфизмами, рассматривая лишь некоторые конкретные группы коэффициентов. Затем, создав теорию характеров (начало 30-х годов), он придает своей теории двойственности законченный вид. В этом виде теорема Александера формулируется так:  $r$ -мерная группа гомологии  $H_r(K, X)$

полиэдра  $K$   $n$ -мерного сферического многообразия  $S^n$  над компактной группой коэффициентов  $X$  двойственна с  $(n - r - 1)$ -мерной группой гомологии  $H_{n-r-1}(S^n \setminus K, Y)$  дополнения  $S^n \setminus K$  над дискретной группой коэффициентов  $Y$ , двойственной с  $X$ , причем произведением элементов (классов гомологии) этих групп является коэффициент зацепления циклов, произвольно взятых из перемножаемых классов. В силу указанной выше двойственности групп гомологии и когомологии, эту теорему можно сформулировать и в терминах изоморфизмов, и пользуясь лишь одной (нетопологизированной) группой коэффициентов.

Аналогично формулируется и теорема Пуанкаре, чем развивается та связь между этими теоремами, которая видна уже при сравнении теоремы Пуанкаре с александеровским обобщением теоремы Жордана — Лебега — Брауэра:  $r$ - и  $(n - r)$ -мерные группы гомологий  $n$ -мерного ориентированного многообразия, взятые над двойственными группами коэффициентов, двойственны, причем в качестве произведения элементов этих групп можно брать индексы пересечения циклов, взятых из перемножаемых классов.

Л. С. Понтрягин, кроме того, обобщил теорему Александра в двух других направлениях: одно — заменяет сферическое многообразие любым многообразием, другое — полиэдр любым замкнутым множеством. В одном направлении он рассматривает циклы взаимно дополнительных множеств многообразия с точки зрения их гомологий во всем этом многообразии и различные группы классов таких гомологий связывает соотношениями теории характеров. Для многообразий, группы гомологии которых исчезают во всех или некоторых определенных размерностях, получаются утверждения первоначальной теоремы Александра — Понтрягина.

В направлении обобщения закона Александра с полиэдров на более общие множества исследования проводились давно. Еще в 1927—1928 гг. П. С. Александров, а также С. Лефшец и Ф. И. Франкль добились распространения этого закона на класс замкнутых множеств. В 1932 г. Л. С. Понтрягин доказал теорему двойственности для замкнутых множеств в той общности, в которой она была выше сформулирована для полиэдров; в этой формулировке просто требуется под  $K$  понимать любое замкнутое подмножество. При этом важно, что Понтрягин добился такого обобщения благодаря подходящему определению группы гомологии для компакта. Он исходил из определения группы гомологии (отличного от указанного выше определения посредством спектров), которое ведет свое начало от П. С. Александрова и Е. Виеториса.

$r$ -мерным симплексом компакта  $F$  называется любое множество его  $r + 1$  точек. Если это множество имеет диаметр меньше  $\varepsilon$ , то симплекс называется  $\varepsilon$ -симплексом.  $r$ -мерная цепь есть конечная линейная форма ориентированных  $r$ -мерных симплексов  $F$  с коэффициентами из группы  $X$ . Она называется  $\varepsilon$ -цепью, если все ее симплексы (т. е. симплексы, коэффициент которых не равен нулю) суть  $\varepsilon$ -симплексы. Обычным способом определяется граница, цикл и т. п.  $\varepsilon$ -цикл  $z^\varepsilon$   $\varepsilon$ -гомологичен нулю,  $z^\varepsilon \sim_\varepsilon 0$ , если он ограничивает некоторую  $\varepsilon$ -цепь, и два  $\varepsilon$ -цикла

$\varepsilon$ -гомологичны друг другу, если их разность  $\sim 0$ .  $r$ -мерным истинным циклом  $z^r$  называется такая последовательность  $z^r = (z_1^r, z_2^r, \dots, z_m^r, \dots)$ , что  $z_m^r$  есть  $\varepsilon_m$ -цикл на  $F$  над группой коэффициентов  $X$  и  $z_m^r \sim_{\varepsilon_m} z_{m+1}^r$ , причем  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Истинный цикл гомологичен нулю, если  $z_m^r \sim_{\delta_m} 0$  для некоторых  $\delta_m \rightarrow 0$ . Истинные циклы складываются почленно. Сложение переносится на классы гомологичных друг другу  $r$ -мерных истинных циклов и превращает множество классов в группу. Это и есть группа гомологии  $H_r(F, X)$  компакта  $F$  над  $X$ . В нее, при компактной группе коэффициентов  $X$ , Понтрягин вносит довольно сложным способом определенную топологию, которая, превращая  $H_r(F, X)$  в компактную группу и влияя на ее строение, делает  $H_r(F, X)$  объектом закона двойственности. Другим его объектом является группа  $H_{n-r-1}(S^n \setminus F, Y)$  открытого множества  $S^n \setminus F$ , определенная триангуляцией последнего (или рассмотрением в качестве цепей конечных форм из симплексов, принадлежащих  $S^n \setminus F$ ). Коэффициент зацепления истинного цикла  $z^r$  с циклом  $\zeta^{n-r-1}$  из  $S^n \setminus F$  определяется как коэффициент зацепления  $\zeta^{n-r-1}$  с определенной геометрической реализацией цикла  $z_m^r$ , причем показывается, что при достаточно больших  $m$  он не зависит от  $m$ .

Законы двойственности Понтрягина, несомненно, принадлежат к числу открытий, составивших эпоху в своей области математики и на ряд лет определивших тематику основных ее исследований.

Истинные циклы оказались хорошим средством и для исследования другого важнейшего топологического инварианта — размерности. В 1930 — 1931 гг. П. С. Александров создал новую ветвь алгебраической топологии — гомологическую теорию размерности, в которой оказалось включенным теоретико-множественное понятие размерности Брауэра — Менгера — Урысона. Истинные циклы при этом удобнее брать в смысле, несколько отличном от приведенного выше (приспособленного к проблеме двойственности). Для исследования других вопросов также берутся другие модификации этого понятия. В данном случае под истинным циклом П. С. Александров понимает указанный выше истинный цикл  $z^r = (z_1^r, z_2^r, \dots, z_m^r, \dots)$ , без дополнительного требования, чтобы  $z_m^r \sim_{\varepsilon_m} z_{m+1}^r$ . Вместе с тем предполагается, что каждый  $z_m^r$  есть цикл над своей группой коэффициентов  $G_m$ ; такой цикл  $z^r$  называется истинным циклом компакта  $F$  по переменной группе коэффициентов. Если  $G_m$  есть кольцо целочисленных вычетов по модулю  $k_m$ , то  $z^r$  называется циклом по переменному модулю, а если все  $G_m$  совпадают,  $G_m = G$ , то  $z^r$  есть просто цикл над  $G$ . Цикл  $z^r$  гомологичен нулю в  $F$ ,  $z^r \sim 0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существуют такие  $m_\varepsilon$ , что при  $m > m_\varepsilon$   $z_m^r \sim_\varepsilon 0$ . Цикл  $z^r$  над  $G$  называется сходящимся, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $m_\varepsilon$ , что при всех  $m > m_\varepsilon$   $z_m^r - z_{m_\varepsilon}^r \sim_\varepsilon 0$  в  $F$  над  $G$ . Цикл  $z^r$  называется существенным, если существует такой его носитель  $F_0$  (т. е. такое замкнутое подмножество компакта  $F$ , что  $z^r$  есть истинный цикл и для  $F_0$ ), на котором  $z^r$  не гомологичен нулю.

Гомологической размерностью  $d_G F$  компакта  $F$  по группе коэффициентов  $G$  или по переменному модулю  $\Pi$ . С. Александров называет наибольшее из таких натуральных чисел  $n$ , что  $F$  имеет существенный  $(n - 1)$ -мерный истинный цикл по  $G$  или по переменному модулю, гомологичный нулю в  $F$  по  $G$  или по переменному модулю, соответственно. При отсутствии таких циклов при всех  $n$  считается, что  $d_G F = 0$ , а при наличии циклов любой размерности, — что  $d_G F = \infty$ .

Оказывается, и это есть одна из основных теорем гомологической теории размерности, что если размерность  $\dim F$  в смысле Урысона — Менгера компакта  $F$  конечна, то она совпадает с гомологической размерностью  $dF$  множества  $F$  по переменному модулю:  $\dim F = dF$ . Следовательно, урысоновская размерность является одной из гомологических размерностей. Впоследствии было доказано, что  $\dim F$  совпадает также с гомологической размерностью по группе  $\mathbb{X}$  всех действительных чисел  $\bmod 1$  или по группе  $R_1$  всех рациональных чисел  $\bmod 1$ , т. е.

$$\dim F = dF = d_{\mathbb{X}} F = d_{R_1} F.$$

Для любой группы коэффициентов  $G$  оказывается справедливым неравенство  $\dim F \geq d_G F$ . Следовательно, урысоновская размерность характеризуется тем, что является наибольшей из всех гомологических размерностей. Если при определении гомологической размерности вместо истинных циклов пользоваться сходящимися циклами, получится инвариант, который совпадает с начальным, т. е. с гомологической размерностью (основанной на истинных циклах), когда группа коэффициентов есть  $\mathbb{X}$ ,  $R_1$ , конечная группа или аддитивная группа всех рациональных чисел. Далее, размерность можно определить и с помощью когомологических понятий; при этом гомологическая размерность компакта  $F$  над компактной группой  $X$  совпадает с когомологической размерностью  $F$  над группой  $Y$ , двойственной с  $X$ .

Л. С. Понтрягин построил компакты и бесконечное множество групп коэффициентов такие, что соответствующие им гомологические размерности отличны друг от друга; существует бесконечное множество компактов, для которых гомологические размерности, соответствующие различным группам коэффициентов, отличны от размерности  $\dim$ . Заметим, что для компактов трехмерного евклидова пространства все гомологические размерности совпадают между собой. То же самое справедливо и для всех полиэдров.

Примеры Понтрягина и результаты гомологической теории размерности дали возможность решить вопрос об аддитивности размерности (в смысле Брауэра — Менгера — Урысона) произведения, т. е. вопрос о том, равняется ли размерность произведения двух компактов сумме размерностей множителей. Ответ оказался отрицательным. Понтрягинские примеры показали, в частности, существование таких двумерных компактов, произведение которых трехмерно. Впоследствии (1949 г.) В. Г. Болтянский построил пример даже такого двумерного компакта, размерность квадрата которого меньше его удвоенной размерности, а именно равна трем. После этого возникла задача оценки



М. Ф. Бокштейн.

класса размерно-полноценных компактов, т. е. таких компактов  $F$ , для которых удовлетворяется равенство

$$\dim (F \times \Phi) = \dim F + \dim \Phi$$

при любом компакте  $\Phi$ . Болтянский нашел несколько необходимых и достаточных условий для того, чтобы компакт был размерно-полноценным.

Существование отличных друг от друга гомологических размерностей одного и того же компакта  $F$ , соответствующих различным группам коэффициентов, ставит вопрос о нахождении связей между ними. Эти связи детально были исследованы М. Ф. Бокштейном в 40-х годах. Не касаясь многих интересных, но частных результатов, вроде теоремы о том, что размерность по модулю  $m$  равняется максимуму размерностей относительно всех простых делителей  $m$ , укажем на основной

результат. Для вычисления когомологической размерности компакта по некоторой группе коэффициентов  $G$  достаточно знать его когомологическую размерность по следующей счетной системе групп: 1) аддитивной группы  $R$  рациональных чисел; 2) аддитивных групп  $R_p$  рациональных чисел, знаменатели которых не содержат в виде множителя простого числа  $p$ ; 3) циклических групп  $C_p$  простого порядка  $p$ ; 4) групп  $Q_p$  рациональных чисел, знаменатели которых являются степенями простого числа  $p$ , приведенных mod 1. Каждой группе  $G$  приводится в соответствие некоторая такая подсистема указанной системы, что когомологическая размерность  $d^G F$  компакта  $F$  по  $G$  оказывается верхней гранью когомологических размерностей этого компакта по группам, принадлежащим указанной подсистеме. Применение этого результата дало возможность Бокштейну найти способ вычисления размерности произведений посредством когомологических размерностей множителей. Для этого он исследует задачу аддитивности для четырех типов групп упомянутой выше системы. Когомологическая размерность по группам  $R$  и  $C_p$  оказывается аддитивной. По остальным двум группам когомологическая размерность не аддитивна, но вычисляется посредством когомологических размерностей множителей по формулам

$$\begin{aligned} d^{R_p}(F \times F') &= \min \{ \max (d^R F + d^R F', d^{C_p} F + d^{C_p} F', d^{Q_p} F + d^{Q_p} F' + 1), \\ &\quad \max (d^R F + d^R F', d^{C_p} F + d^{C_p} F', d^{R_p} F + d^{Q_p} F', d^{Q_p} F + d^{R_p} F') \}; \\ d^{Q_p}(F \times F') &= \max (d^{Q_p} F + d^{Q_p} F', d^{C_p} F + d^{C_p} F' - 1). \end{aligned}$$

Таким образом, зная когомологические размерности сомножителей по четырем указанным типам групп, по этим формулам можно вычислить

когомологическую размерность произведения по этим же группам и, следовательно, в силу предыдущего результата, его когомологическую размерность по любой группе коэффициентов, в частности целочисленную когомологическую размерность (когомологическую размерность по группе целых чисел), т. е. размерность Брауэра — Менгера — Урысона.

Из многих других результатов по гомологической размерности рассмотрим, наконец, теорему о препятствиях П. С. Александрова, имеющую глубокие связи с различными вопросами топологии. Она верна для различных групп коэффициентов, но мы рассмотрим ее для классической размерности относительно  $G = \kappa$ , поскольку она больше всего применима в этом случае. Для любого  $r$ -мерного компакта  $F$  из  $R^n$  и любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\gamma > 0$ , что  $R^n \setminus F$  имеет  $(n - r - 1)$ -мерный целочисленный цикл, диаметр которого (т. е. диаметр его наименьшего замкнутого носителя) меньше  $\varepsilon$  и который в  $R^n \setminus F$  не ограничивает никакую цепь диаметра не большего  $\gamma$ ; всякий же цикл из  $R^n \setminus F$  размерности меньше  $n - r - 1$  и диаметра меньше  $\varepsilon$  ограничивает в  $R^n \setminus F$  цепь диаметра меньшего  $\varepsilon$ .

В 1936 г. А. Н. Колмогоров предложил новый метод исследования гомологической структуры пространства (независимо от него рассмотренный также Дж. Александером), основанный на понятии функции множеств и точек пространства и связанный с основными понятиями анализа.

$r$ -мерной цепью Колмогоров называет аддитивную, кососимметрическую функцию  $r + 1$  подмножеств  $e_0, \dots, e_r$  с бикompактными замыканиями хаусдорфова локально бикompактного пространства  $R$ , значения которой принадлежат данной бикompактной группе  $X$ , причем значение есть нуль, если пересечение замыканий аргументов пусто. Обычным способом определенное сложение функции превращает множество всех таких цепей в группу  $C_r(R, X)$ . Граничный оператор  $\partial$  определяется по формуле

$$\partial \varphi_r(e_0, \dots, e_{r-1}) = \varphi_r(G, e_0, \dots, e_{r-1}),$$

где  $G$  — какое-либо открытое множество с бикompактным замыканием, содержащее  $\bigcup_{i=0}^{r-1} e_i$ . В силу  $\partial^2 = 0$ , можно образовать факторгруппу  $H_r(R, X)$  группы всех  $r$ -циклов (т. е.  $r$ -мерных цепей с нулевой границей), по подгруппе всех ограничивающих  $r$ -циклов, которую А. Н. Колмогоров и называет  $r$ -мерной группой гомологии  $R$  по  $X$ . Окрестностью  $\varphi_r$  объявляется множество всех таких  $\psi_r$ , что  $\psi_r(M_{i_0}, \dots, M_{i_r})$  принадлежит данной окрестности элемента  $\varphi_r(M_{i_0}, \dots, M_{i_r})$ , где  $M_1, \dots, M_p$  — данная система множеств из  $R$  с бикompактными замыканиями. Этим  $H_r(R, X)$  превращается в бикompактную группу. Для определения когомологических групп рассматриваются кососимметрические функции от  $r + 1$  точек  $x_0, \dots, x_r$  из  $R$  со значениями из дискретной группы  $Y$ , такие, что значения этих функций не изменяются, когда аргументы перемещаются внутри конечного числа данных множеств,



попарно непересекающихся и имеющих бикомпактные замыкания. Коцепью называется класс  $f^r$  эквивалентных между собой функций, причем функции называются эквивалентными, если они локально совпадают, т. е. каждая точка имеет такую окрестность, что для системы аргументов, взятых из этой окрестности, функции совпадают. Эта факторизация совместима с кограничным оператором  $\delta$ , определенным по формуле ( $\bar{f}^r$  — представитель класса  $f^r$ )

$$\delta \bar{f}^r(x_0, \dots, x_{r+1}) = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \bar{f}^r(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{r+1}).$$

Группа когомологии  $H^r(R, Y)$  есть фактор-группа группы коциклов по подгруппе кограниц. Указывается, что в случае компакта группа когомологии изоморфна группе Виеториса, а группа когомологии — группе Александера. Доказывается, что группы  $H_r(R, X)$  и  $H^r(R, Y)$  двойственны при двойственных группах  $X$  и  $Y$ . Далее, в случае, когда  $R$  есть  $n$ -мерное открытое многообразие, справедливы теоремы двойственности Пуанкаре:

$$H_r(R, X) \approx H^{n-r}(R, X), \quad H_r(R, Y) \approx H^{n-r}(R, Y).$$

Наконец, обобщается теорема двойственности Александера:

если  $H^r(R, Y) = H^{r-1}(R, Y) = 0$ , то  $H^{r-1}(A, Y) \approx H^r(R \setminus A, Y)$ , где  $A$  замкнуто в  $R$ .

В 1940 г. появилась работа П. С. Александрова «Общая теория гомологии», в которой был подытожен пройденный этап и намечены дальнейшие перспективы развития теории. Прежде всего в ней ведущее начало от его же ранних работ спектральное построение гомологических и когомологических групп пространства, данное в различных вариантах (приспособленных к различным целям), доведено до завершения (применения). Новым, в смысле построения одной из разновидностей этих групп, здесь является то, что группы гомологии нервов конечных открытых покрытий берутся по модулю особых подкомплексов. Особым подкомплексом  $K_0$  нерва  $K$  Александров называет совокупность всех таких симплексов из  $K$ , замыкания вершин которых не бикомпактны в пространстве  $R$ .

Брать группу гомологии по модулю  $K_0$  значит рассматривать относительные циклы  $\text{mod } K_0$ , т. е. цепи, границы которых лежат на  $K_0$ , а гомологическими нулю считать те из таких циклов, которые ограничивают с точностью до  $K_0$  (понятие относительных циклов и гомологии по модулю произвольного подкомплекса восходит к С. Лефшецу). В случае когомологии рассматриваются лишь те коцепи, которые на  $K_0$  равны нулю. При симпliciальных отображениях нервов особые подкомплексы отображаются в особые и это приводит к гомологической группе  $H_r(R, X)$  нормального пространства  $R$  над компактной группой коэффициентов  $X$  и к когомологической группе  $H^r(R, Y)$  над дискретной группой  $Y$ . Александров доказывает, что при двойственных группах  $X$  и  $Y$  группы  $H_r(R, X)$  и  $H^r(R, Y)$  также являются двойственными. Группы Алек-

сандрова оказываются далее объектами закона двойственности:  $r$ -мерная группа когомологии множества  $A$  пространства  $R$  изоморфна  $(r + 1)$ -мерной группе когомологии дополнения  $R \setminus A$ . При этом пространство  $R$  может быть любым нормальным локально бикompактным пространством, у которого  $r$ -и  $(r + 1)$ -мерные группы когомологии исчезают, а множество  $A$ , как и в предыдущих законах, замкнуто. Александров дает и другое определение своих групп, основанное на так называемых барицентрических подразделениях конечных открытых покрытий. Он применяет их для определения операции перемножения элементов групп когомологии, взятых над кольцом коэффициентов, что превращает прямую сумму групп когомологии разных размерностей в кольцо — кольцо когомологии пространства.



Г. С. Чогошвили.

Несмотря на такое отличие определений, группы Александрова и Колмогорова являются изоморфными, как это доказал Г. С. Чогошвили с помощью групп гомологии, основанных на разбиениях, которые обладают свойством однозначной вписанности. Последнее обстоятельство дает возможность рассматривать два типа групп гомологии: проекционные и спектрные. Совпадение этих групп при компактной группе коэффициентов, доказанное Александровым для компактных метрических пространств при помощи счетных спектров и обобщенное Чогошвили на произвольные пространства посредством любых (не-счетных) спектров, означает переместительность операций перехода к пределу и построения группы гомологии в обратном спектре групп цепей.

В 1942 г. вышла работа П. С. Александрова «О гомологических свойствах расположения комплексов и замкнутых множеств» (удостоена Государственной премии). В ней исследуются связи между гомологическими свойствами пространства  $K$ , его замкнутого множества  $A$  и открытого дополнения  $G = K \setminus A$ , в результате чего характеризуется с гомологической точки зрения расположение  $A$  в  $K$ .

Пусть  $K$  — конечный комплекс,  $A$  — замкнутый подкомплекс, а  $\Delta_K^r, \Delta_A^r, \Delta_G^r (\nabla_K^r, \nabla_A^r, \nabla_G^r)$  —  $r$ -мерные группы гомологии (когомологии) комплексов  $K, A$  и  $G$  соответственно. Включения  $A \subset K$  и  $G \subset K$ , дающие возможность приводить в соответствие цепям (коцепям) на  $K$  цепи (коцепи) на  $A$  и  $G$ , которые они высекают, и, наоборот, цепи (коцепи) комплексов  $A$  и  $G$  распространять (тривиально, т. е. так, чтобы на дополнительных симплексах значениями были нули) на  $K$ , индуцируют гомоморфизмы

$$E_K^A: \Delta_A^r \rightarrow \Delta_K^r, \quad E_K^G: \nabla_G^r \rightarrow \nabla_K^r, \quad I_A^K: \nabla_K^r \rightarrow \nabla_A^r, \quad I_G^K: \Delta_K^r \rightarrow \Delta_G^r.$$

Образы гомоморфизмов  $E_K^A$ ,  $E_K^G$ ,  $I_A^K$  и  $I_G^K$  обозначим  $\Delta_{KA}^r$ ,  $\nabla_{KG}^r$ ,  $\nabla_{AK}^r$  и  $\Delta_{KG}^r$ , а ядра гомоморфизмов  $E_K^A$  и  $E_K^G$  —  $\Delta_{A:K}^r$  и  $\nabla_{G:K}^r$ , соответственно. Обозначим, далее:  $\nabla_{A:K}^r$  и  $\Delta_{G:K}^r$  — фактор-группы  $\nabla_A^r$  по  $\nabla_{AK}^r$  и  $\Delta_G^r$  по  $\Delta_{GK}^r$ , соответственно. Группы  $\Delta_{KA}^r$ ,  $\nabla_{KG}^r$ ,  $\Delta_{A:K}^r$ ,  $\nabla_{G:K}^r$ ,  $\nabla_{AK}^r$ ,  $\Delta_{KG}^r$ ,  $\nabla_{A:K}^r$ ,  $\Delta_{G:K}^r$  называются группами тройки  $K, A, G$ . Геометрический смысл этих групп заключается в той информации, которую они несут о расположении множества в пространстве. Например,  $\Delta_{KA}^r$  состоит из тех классов гомологии комплекса  $K$ , которые содержат циклы, лежащие на  $A$ ,  $\Delta_{A:K}^r$  — из тех классов гомологии подкомплекса  $A$ , циклы которых ограничивают в  $K$ , и т. п. В работе устанавливаются многочисленные свойства этих групп и связи между ними, в том числе важная в применении теорема о снятии цикла, возможность выразить все группы тройки определенным минимальным числом групп (например, группами  $\Delta_K^r$ ,  $\Delta_A^r$ ,  $\Delta_{KA}^r$ ) и т. п.

Основным соотношением следует считать двойственность  $\Delta_{A:K}^r \mid \nabla_{G:K}^{r+1}$  и равносильные ей изоморфизмы  $\Delta_{A:K}^r \sim \Delta_{G:K}^{r+1}$  и  $\nabla_{A:K}^r \sim \nabla_{G:K}^{r+1}$ , которые, как увидим, являются началом самых общих соотношений двойственности. Именно, с помощью своего метода проекционных спектров П. С. Александров распространяет все эти результаты с указанного случая комплекса на случай, когда  $K$  — произвольное локально бикompактное нормальное пространство, а  $A$  — его замкнутое подмножество. В частности, в случае  $r$ - и  $(r+1)$ -мерной односвязности пространства  $K$  (т. е. когда  $\Delta_K^r = \Delta_K^{r+1} = 0$ ), в силу  $\Delta_{A:K}^r = \Delta_A^r$  и т. п., получаем изоморфизмы  $\Delta_A^r \sim \Delta_G^{r+1}$ ,  $\nabla_A^r \sim \nabla_G^{r+1}$ , т. е. теорему двойственности в том виде, в каком она была установлена в предыдущей работе Александрова. Переходя к случаю многообразия, Александров из своей основной теоремы выводит и теорему двойственности в том виде, в каком она была установлена Понтрягиным.

Значение этих результатов Александрова не исчерпывается той общностью, в которой здесь установлены теоремы двойственности и расположения. В развитых при установлении этих результатов методах можно видеть один из источников такого важного инструмента современных топологических и алгебраических исследований, как гомологические и кохомологические последовательности и теория точных последовательностей вообще.

В своих статьях, а также в докладе, прочитанном на Первой международной топологической конференции, состоявшейся в Москве в 1935 г., П. С. Александров ставил проблему построения теории гомологии некомпактных пространств, и доказательство теорем двойственности хотя бы для некоторого класса незамкнутых множеств евклидовых пространств он считал не только первоочередной задачей, но и испытанием плодотворности тех групп гомологии, которые будут построены для произвольных пространств. Для решения указанной задачи Г. С. Чогошвили предложил способ совместной аппроксимации взаимно дополняемых множеств: одного замкнутыми подмножествами (в частности, компактными), а другого — открытыми надмножествами (бесконечными полиэдрами). Такие аппроксимации приводят к спектрам — прямым

и обратным. Предельные группы спектров, состоящих из групп гомологии (когомологии) замкнутых в пространстве подмножеств данного множества, дают так называемые внутренние группы множества (в частности, и группы с компактными носителями), предельные же группы спектров, состоящих из групп гомологии (когомологии) открытых надмножеств, дают внешние группы множества. Однако (в силу того что в теоремах двойственности для компактов всегда берут компактную группу коэффициентов) эти спектры, в отличие от спектров, рассматривавшихся ранее, имеют новый вид. Это прямые спектры компактных групп. Поэтому пришлось исследовать такие спектры, в частности определить их предельные группы, что, в свою очередь, привело к необходимости вводить в произведение бесконечного числа пространств топологию не только посредством системы всех конечных подсистем данной системы индексов перемножаемых пространств (как это делается при применении классического метода А. Н. Тихонова), но и посредством произвольной направленной по включению системы подмножеств данной системы индексов. Указанные аппроксимации и спектры, в зависимости от того, какие берутся группы гомологии (когомологии) аппроксимирующих замкнутых и открытых множеств — относительные по модулю особых подкомплексов или абсолютные, приводят к внутренним группам гомологии (когомологии)

$${}_i\Delta^r(A, X) [{}_i\nabla^r(A, X)] \text{ или } {}_iH_r(A, X) [{}_iH^r(A, X)]$$

и к внешним

$${}_e\Delta^r(A, X) [{}_e\nabla^r(A, X)] \text{ или } {}_eH_r(A, X) [{}_eH^r(A, X)],$$

соответственно.

Кроме того, Чогошвили ввел группы пространства, основанные на бесконечных покрытиях (в частности, звездно конечных, что привело к понятию звездно паракомпактного пространства), как с конечными циклами и бесконечными коциклами  $H_r(R, X)$  и  $H^r(R, X)$ , соответственно, так и с бесконечными циклами и конечными коциклами (последние определяются для такой системы покрытий, в которой порядок устанавливается по конечной вписанности). Новые спектры позволили рассмотреть каждую из этих групп как над дискретной, так и над компактной группой коэффициентов, а также установить двойственность всех указанных групп гомологии соответствующим группам когомологии независимо от того, дискретны или компактны группы коэффициентов групп гомологии или когомологии

$${}_i\Delta^r(A, X) | {}_i\nabla^r(A, Y), \quad H_r(R, X) | H^r(R, Y)$$

и т. п., при  $X|Y$ . Группы гомологии произвольных (некомпактных) пространств, основанные на нервах покрытий, еще раньше, следуя построениям П. С. Александрова для компактов, рассматривались Э. Чехом. Но он брал конечные покрытия. Особенно полезными для гомологической теории некомпактных пространств оказались группы гомологии  $H_r(R, X)$  и когомологии  $H^r(R, X)$  конечных циклов и, соответственно, бесконечных коциклов, основанные именно на беско-

нечных покрытиях; в случае дискретной группы коэффициентов они были введены также Доукером (вообще, топологию раньше вводили лишь в группах гомологии конечного комплекса и группах гомологии пространства, основанных на конечных покрытиях).

Соотношения двойственности для указанных групп следующие. Для произвольного множества  $A$  нормального локально бикомпактного пространства  $R$  существует гомоморфизм, так называемый гомоморфизм двойственности, определенный операторами  $E, I$  и  $\partial$ , внутренней когомологической группы  $iV^r(A, X)$  во внешнюю когомологическую группу  $eV^{r+1}(R \setminus A, X)$ , а также аналогичные гомоморфизмы гомологических групп. Этот гомоморфизм был исследован, в частности оценены его ядро и образ с помощью ядер и образов гомоморфизмов когомологических групп, индуцированных включениями  $A$  и  $R \setminus A$  в  $R$ . В случае  $r$ - и  $(r+1)$ -односвязности  $R$  отсюда получаем изоморфизмы двойственности  $\Delta_A^r \sim \Delta_G^{r+1}$  и т. п., указанные выше (но уже для произвольного множества  $A$ ). Далее была доказана двойственность

$$eH_r(A, X) \mid iH_{n-r-1}(R \setminus A, Y),$$

когда  $R$  —  $n$ -мерное сферическое пространство, а  $X$  — дискретная группа, двойственная с  $Y$ , причем в качестве произведения элементов взяты коэффициенты зацепления перемножаемых классов. В силу этого соотношения, доказательство закона двойственности сводится к вопросу об инвариантности группы  $eH_r(A, X)$  (группа  $iH_r(R \setminus A, Y)$ , очевидно, инвариантна — она есть группа с компактными носителями). Г. С. Чо-гошвили доказал инвариантность этой группы в случае, когда  $A$  — окрестностный ретракт (и, следовательно, бесконечный полиэдр, который, как было показано в этой же работе, является окрестностным ретрактом); кроме того, в данном случае  $eH_r(A, X)$  изоморфна группе с компактными носителями и так называемой группе непрерывных классов гомологии.

В 1947 г. была опубликована статья П. С. Александрова «Основные теоремы двойственности для незамкнутых множеств  $n$ -мерного пространства», оказавшая большое влияние на все дальнейшее развитие этой области топологии. В ней проведено глубокое исследование гомологических свойств незамкнутых множеств, в частности до конца решена старая проблема двойственности: доказано, что для любого множества  $A$  из  $n$ -мерного сферического пространства  $R$  имеет место двой-

$$H_r(A, X) \mid iH_{n-r-1}(R \setminus A, Y).$$

Для этого установлен изоморфизм  $eH_r(A, X) \sim H_r(A, X)$  и, следовательно, доказана инвариантность внешней группы  $eH_r(A, X)$  в самых общих условиях. Александров специально рассматривает гомологические ретракты (объемлющие обычные), частными случаями которых являются так называемые ошкуренные полиэдры. Оказалось, что в случае таких множеств теорема двойственности имеет место и для групп с компактными носителями. В указанной выше теореме двойственности в одной из групп и циклы и гомологии имели компактные носи-

тели, в другой — и те и другие были общие. Могут быть смешанные образования — циклы на компактных носителях, а гомологии общие. Александров доказывает теорему двойственности и для таких групп: они оказываются двойственными одна другой, т. е. смешанная группа данного множества смешанной группе дополнения (как всегда, при двойственных между собой группах коэффициентов). Частный случай этого результата, касающийся лишь числовых инвариантов, получен С. Капланом (США).

Вслед за рассмотренной статьей Александрова появилось большое количество работ по гомологической теории некомпактных пространств. Л. Д. Кудрявцев изучил группы, основанные на различных важных системах покрытий (в частности, на звездно конечных покрытиях из открытых множеств с бикompактными замыканиями), установил связи этих групп в моно-, эпи- и изоморфизмах, дал соотношения двойственности в гомологических многообразиях, показал, когда существует компактное надмножество данного множества с теми же гомологическими группами, что и у данного множества. Е. Ф. Мищенко, построив соответствующие примеры, показал, что смешанные группы гомологии действительно отличны как от общих групп, так и от групп с компактными носителями. Ю. М. Смирнов доказал важную обобщенную лемму Чеха о существовании сколь угодно малых изоморфных внешних и внутренних покрытий любого множества метрического сепарабельного пространства и теоремы об изоморфизмах предельных групп спектров, состоящих из гомологических групп компактных или открытых надмножеств данного множества, с группами гомологии этого множества.

А. Н. Колмогоров заметил, что теореме двойственности для произвольных множеств  $A$  можно придать форму (так называемую вторую форму общей теоремы двойственности)

$${}_i H^r(A, X) \sim H_{n-r-1}(R \setminus A, X),$$

$X$  — дискретна, для установления которой не требуется привлечения прямого спектра компактных групп. К. А. Ситников доказал так называемую третью форму рассматриваемой теоремы:

$${}_i H_r(A, X) \sim H^{n-r-1}(R \setminus A, X).$$

К. А. Ситников и Н. А. Берикашвили (независимо один от другого) доказали теорему двойственности для произвольных множеств, в которой, в отличие от предыдущей теоремы, группы с компактными носителями берутся над дискретной группой коэффициентов, а общие группы — над компактной группой. К. А. Ситников доказал также новую общую теорему двойственности. Для этого он рассмотрел группы гомологии, которые получаются следующим видоизменением понятия истинных циклов.  $r$ -мерным циклом называются последовательности  $(z_k^r)$  и  $(x_k^{r+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots, e_k$ -циклов  $z_k^r$  и  $e_k$ -цепей  $x_k^{r+1}$ ,  $e_k \rightarrow 0$ , такие, что

$$\partial x_k^{r+1} = z_{k+1}^r - z_k^r.$$

Такой цикл гомологичен нулю, если существуют такие  $\varepsilon'_k$ -цепи  $x_k^{r+2}$  и  $y_k^{r+1}$ , что  $\varepsilon'_k \rightarrow 0$  и

$$\partial y_k^{r+1} = z_k^r, \quad \partial x_k^{r+2} = y_{k+1}^{r+1} - y_k^{r+1} - x_k^{r+1}.$$

Фактор-группа группы циклов по подгруппе ограничивающих циклов и есть упомянутая группа.

Теорема двойственности Ситникова состоит в том, что определенная таким образом  $r$ -мерная группа с компактными носителями любого множества  $n$ -мерного сферического (и даже любого замкнутого ориентируемого,  $r$ - и  $(r-1)$ -ациклического) многообразия изоморфна  $(n-r-1)$ -мерной группе когомологии дополнения, основанной на бесконечных покрытиях. Как частный случай этой теоремы Ситников выводит указанную выше теорему П. С. Александрова. Н. А. Берикашвили придал этой теореме чисто гомологическую форму, взяв вместо когомологической группы двойственную ей группу. Для этого на нервах (бесконечных) покрытий он рассматривает предельную группу прямого спектра бикompактных гомологических групп всех конечных подкомплексов, пользуясь указанной выше предельной группой такого спектра. Берикашвили дал новые определения этой предельной группы, а также аксиоматическую теорию прямых и обратных спектров, старых и новых. Н. Я. Виленкин обобщил различные теоремы двойственности с замкнутых подмножеств на произвольные, но, пользуясь способом указанных выше аппроксимаций извне и изнутри, он в получающихся таким образом спектрах нового типа применяет иной предельный переход, вследствие чего и теоремы двойственности у него получаются иные. А. А. Мальцев, пользуясь группой гомологии истинных циклов и группой так называемых слабых когомологий, доказал теорему двойственности для незамкнутых многообразий. Н. Т. Тынянский получил рассматриваемые теоремы как частные случаи определенных точных последовательностей.



М. Я. Антоновский.

М. Я. Антоновский в группах, которые применял К. А. Ситников, ввел умножение и для полученных колец установил соотношения, аналогичные соотношениям К. А. Ситникова. В. П. Николаишвили с помощью теоремы Хопфа доказал, что теорема двойственности Куратовского следует из нульмерного случая обобщенной теоремы двойственности Александера и наоборот, и некоторым образом перенес эти связи на случай бесконечномерного пространства.

Г. С. Чогошвили определил группы гомологии и когомологии пространства проекционного и спектрального типов, основанные на данной категории комплексов и их симплициальных отображений и данной системе покрытий пространства.

Эти группы связаны определенными моно- и эпиморфизмами. Проекционные группы гомологии, основанные на категории всех счетных комплексов и их вложениях и на всех конечных покрытиях, в случае метрического компактного пространства изоморфны группам Стинрода, а также группам Ситникова, Бореля—Мура и Милнора, а спектральные группы гомологии (когомологии) для любых пространств изоморфны группам гомологии (когомологии) Александрова — Чеха — Виеториса на единицу меньшей (большей) размерности. Для этих групп одинаковым образом доказываются теоремы двойственности. Это позволяет заключить, что все обобщения законов двойственности на произвольные множества, перечисленные выше, сводятся к двум теоремам. Одна из них касается спектральных групп и представляет собой обобщение теоремы Александера, другая касается проекционных групп и является обобщением теоремы двойственности Стинрода. Обе теоремы доказываются одним способом гомологической аппроксимации взаимно дополнительных множеств извне и изнутри замкнутыми и открытыми множествами, причем независимо от дискретности или компактности группы коэффициентов. При компактной группе коэффициентов (для групп гомологии компакта или для групп гомологии с компактными носителями) обе теоремы совпадают, и этот совпавший, наиболее богатый возможностями, легче поддающийся исследованию случай и был открыт впервые (даже в случае замкнутых множеств); при дискретной группе коэффициентов ни одна из этих теорем не является частным случаем другой.



К. А. Ситников.

Отметим попытки расширить класс пространств, в которых имеет место теорема двойственности Александрова—Колмогорова для относительных групп, взятых по модулю особых подкомплексов. М. Ф. Бокштейн показал, что от нормальных пространств можно перейти к хаусдорфовым (при этом сохраняется требование локальной бикompактности пространства и замкнутости множества). Г. С. Чогошвили снял требование локальной бикompактности, потребовав от множества выполнения условия так называемого бикompактного расположения в пространстве.

Успех в разработке теорем двойственности для произвольных множеств, естественно, вызвал прогресс и в гомологической теории размерности незамкнутых множеств. Основные результаты в этом направлении принадлежат К. А. Ситникову. Прежде всего укажем данное им обобщение на произвольные множества теоремы о препятствиях П. С. Александрова. Для такого обобщения оказалось необходимым пользоваться тем указанным выше видоизменением понятия истинных

Успех в разработке теорем двойственности для произвольных множеств, естественно, вызвал прогресс и в гомологической теории размерности незамкнутых множеств. Основные результаты в этом направлении принадлежат К. А. Ситникову. Прежде всего укажем данное им обобщение на произвольные множества теоремы о препятствиях П. С. Александрова. Для такого обобщения оказалось необходимым пользоваться тем указанным выше видоизменением понятия истинных



циклов, которое понадобилось Ситникову для доказательства теоремы двойственности, тесно связанной с теоремой о препятствиях. К этому кругу вопросов относятся также результаты Ситникова о гомологическом опоясывании компактов и о так называемых поперечниках, мешках, поясах. Под  $p$ -мерным поперечником (в смысле Александрова) компакта  $\Phi \subset R^n$  понимается нижняя грань  $d^p \Phi$  таких  $\varepsilon > 0$ , для которых существуют  $\varepsilon$ -сдвиги компакта  $\Phi$  в компакты (или полиэдры) размерности  $p$ . Если  $\dim \Phi = r$ , то

$$d^0 \Phi \geq d^1 \Phi \geq \dots \geq d^{r-1} \Phi > d^r \Phi = 0.$$

С помощью поперечников Ситников нашел следующее характеристическое свойство шара: для того чтобы  $n$ -мерный компакт  $\Phi \subset R^n$  был шаром, необходимо и достаточно, чтобы  $d^0 \Phi = \dots = d^{n-1} \Phi$ .

Цикл  $z^{n-1}$ , зацепленный со всеми точками компакта  $\Phi \subset R^n$ , называется мешком, содержащим компакт  $\Phi$ . К. А. Ситников доказал, что если  $\dim \Phi = r$ , то  $(r-1)$ -мерные поперечники всех мешков, содержащих компакт  $\Phi$ , больше некоторого положительного числа. Взятый мешок надлежащим образом делится пополам и берется граница этой половины, которая есть цикл  $z^{n-2}$  размерности  $n-2$ . Цикл  $z^{n-2}$  называется поясом вокруг компакта  $\Phi$ . Продолжая этот процесс дальше, т. е. деля пояс  $z^{n-2}$  пополам, получаем пояса меньших размерностей вплоть до размерности  $n-r-1$ . С помощью всех этих поясов можно также характеризовать размерность компакта  $\Phi$ , что составляет содержание теоремы о поясах К. А. Ситникова. Частный ее случай для размерности  $n-r-1$  совпадает с теоремой о препятствиях П. С. Александрова. В этом случае пояс-цикл  $z^{n-r-1}$  размерности  $n-r-1$  просто локально зацеплен с компактом  $\Phi$ ,  $\dim \Phi = r$ . Далее, К. А. Ситникову принадлежат деформационные теоремы, которые он успешно применил в различных вопросах. Наконец, Ситников дал гомологические характеристики размерности незамкнутых множеств посредством коциклов, основанных на бесконечных покрытиях.

Одним из основных вопросов теории гомологии является вопрос об универсальных группах коэффициентов, т. е. вопрос об определении групп и колец гомологий (когомологий) топологических пространств по любому полю коэффициентов их значениями по некоторым конкретным группам коэффициентов. Известны важные результаты, полученные Н. Стинродом, Э. Чехом, С. Маклейном, С. Эйленбергом и другими в этом направлении. М. Ф. Бокштейн показал, что целочисленные кольца когомологий даже в случае многообразия недостаточны для определения колец когомологий по другим полям коэффициентов. С другой стороны, он построил универсальную систему колец когомологий, знание которой дает возможность вычислить кольцо когомологий по любому полю коэффициентов. Такой системой оказывается так называемый модульный  $\vee$ -спектр (или когомологический спектр) данного пространства  $A$ . Он состоит из множества всех колец когомологий  $\text{mod } m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , пространства  $A$  и всех гомоморфизмов  $\pi_m^{m'}$  и  $\omega_m^{m'}$  ( $m$  является делителем  $m'$ ) между этими кольцами, определенных

так:  $\pi_m^{m'}$  каждому коциклу по модулю  $m'$  ставит в соответствие этот же коцикл, приведенный по модулю  $m$ , а  $\omega_m^m$  каждому коциклу по модулю  $m$  ставит в соответствие коцикл по модулю  $m'$ , полученный из данного умножением на  $\frac{m'}{m}$  и приведением по модулю  $m'$ . Одновременно получается и универсальная система для групп когомологий, если ограничиться однородными составляющими рассматриваемой размерности  $q$ , входящими в  $\nabla$ -спектр колец, и соответствующими гомоморфизмами. При этом Бокштейн доказывает, что эта универсальная система групп определяется целочисленными группами когомологий размерностей  $q$  и  $q + 1$  данного пространства  $A$ , что в силу ее универсальности впервые дает верное доказательство неточно доказанной Стинродом теоремы об универсальности целочисленных групп когомологий.

Применяя аналогичные методы, Бокштейн исследовал также поведение групп и колец когомологий при топологическом произведении двух пространств. Прежде всего им определяется новый инвариант топологического пространства — гомоморфизм  $q$ -мерной группы когомологий по модулю  $m$  в  $q + 1$ -мерную целочисленную группу когомологий, который получается так: в данном  $q$ -мерном классе когомологий берется какой-нибудь коцикл, его коэффициенты рассматриваются как целые числа; берется кограница полученной целочисленной коцепи, ее коэффициенты делятся на  $m$ , после чего берется содержащий ее целочисленный класс когомологий. Так построенные гомоморфизмы добавляются в модульный  $\nabla$ -спектр пространства, и показывается, что такой полный модульный спектр колец (групп) когомологий произведения двух хаусдорфовых локально бикомпактных пространств определяется через полные модульные спектры колец (групп) когомологий сомножителей. Это оказывается верным и для топологического (тихоновского) произведения любого множества сомножителей, если только последние являются бикомпактными хаусдорфовыми пространствами.

Гомологические свойства равномерных пространств исследовали В. И. Кузьминов и И. А. Шведов. С помощью групп конечнозначных когомологий ими были установлены предложения, аналогичные аксиомам Стинрода — Эйленберга, классификационная теорема Хопфа для равномерных отображений, основные предложения гомологической теории размерности, формула универсальных коэффициентов и т. п. Еще раньше теорема Хопфа в частном случае отображений метрических комплексов была получена В. И. Егоровым. Кузьминов распространил на случай любых бикомпактов теорему П. С. Александрова о препятствиях, которой он дает внутреннюю формулировку, не зависящую от окружающего пространства; дальнейшее обобщение на случай паракompактных пространств было получено им совместно с Шведовым. Далее Кузьминов исследует вопрос о том, образуют ли установленные Бокштейном соотношения между размерностями полную систему соотношений в смысле существования компакта, для которого любая совокупность натуральных чисел, удовлетворяющих этим соотношениям, является совокупностью значений соответствующих гомологических



В. Г. Болтянский.

размерностей для этого компакта, и дает несколько достаточных условий для этого. Опираясь на этот результат, Кузьминов указывает такую последовательность компактов, что кохомологические размерности любого конечномерного компакта по произвольным группам коэффициентов определяются размерностями произведений данного компакта с компактами последовательности. Из этого, в свою очередь, получаются обобщения известных теорем об отображениях компактов, понижающих, повышающих или сохраняющих размерность. Кузьминов нашел условия, при которых последовательность гомологий Александера — Чеха точна. Он доказал, что если  $X$  — конечномерный паракомпакт,  $Y$  — комплекс и кохомологическая размерность пространства  $X$  над группой коэффициентов, являющейся  $i$ -й группой гомо-

топии пространства  $Y$ , меньше  $i$ , то всякое непрерывное отображение любого замкнутого множества  $A \subset X$  в пространстве  $Y$  продолжается в непрерывное отображение всего  $X$  в  $Y$ . Этот результат позволяет ему доказать основные теоремы о кохомологических размерностях паракомпактных пространств с помощью теории пучков. И. А. Шведов дал способ вычислений кохомологической размерности всех замкнутых подмножеств пространства посредством определенной последовательности пучков над данным пространством. В обобщении К. А. Ситникова теоремы о препятствиях Александера, в отличие от замкнутого случая, местонахождение  $\varepsilon$ -цикла зависело от  $\varepsilon$ . Шведову удалось и в случае произвольного множества отыскать точку пространства, которая не зависит от  $\varepsilon$  и в окрестности которой расположены все  $\varepsilon$ -циклы.

А. В. Зарелуа рассмотрел спектральную последовательность для конечнократного замкнутого отображения. Оценивая размерность по пучкам, участвующим в конструкции резольвенты, из которой возникает эта спектральная последовательность, он получил обобщение и уточнение классической теоремы Гуревича об отображениях, повышающих размерность. Используя методы теории пучков, Зарелуа далее доказал ряд результатов о конечнократных отображениях кохомологических многообразий.

Специальному исследованию подверглись гомологии гильбертова пространства. Основы его заложил В. Г. Болтянский. Определяя подходящим образом понятия клетки гильбертова пространства, их границы, ориентации, коэффициенты инцидентности и т. п., для любого подкомплекса возникающего таким образом клеточного разбиения он определяет бесконечномерные группы гомологии и кохомологии и при двойственных областях коэффициентов доказывает их двойственность. С. С. Рышков доказал инвариантность при различных клеточных

разбиениях групп когомологии бесконечномерных множеств. Он же определил и исследовал внешние гомологические группы любого замкнутого множества гильбертова пространства. Соотношения двойственности для взаимно дополнительных подмножеств бесконечномерных гомологических многообразий установил Р. Л. Фрум-Кетков.

В. Г. Болтянский и М. М. Постников дали новое аксиоматическое определение групп когомологии. Их подход отличается от подхода Стинрода — Эйленберга тем, что они отказываются от рассмотрения относительных групп. (Аналогичный подход к этому вопросу имеется также у Пуппе, Ху, Келли и др.). Кроме того, группы когомологии они определяют для пространств с отмеченными точками.

Одной из классических теорем гомологической топологии является теорема Виеториса о непрерывных отображениях, которая при определенных условиях, в особенности при ацикличности прообразов точек в некоторых размерностях, утверждает изоморфизм индуцированных гомоморфизмов. Удачно применяя понятие относительной размерности множества, введенное П. С. Александровым в 1947 г., Е. Г. Складченко обобщил теорему Виеториса — Бегла, заменяя требование ацикличности более общим требованием. Далее, он дал обращение обобщенной таким образом теоремы и, наконец, обобщения обеих этих своих теорем — как прямой, так и обратной — в том направлении, в каком Бялыницкий-Бируля обобщил классическую теорему Виеториса — Бегла, рассмотрев тройку пространств с парой отображений. Все это выполнено для когомологических групп со значениями в пучках методом спектральных последовательностей Лерэ. Н. А. Берикашвили исследовал дифференциалы одного типа спектральной последовательности, частными случаями которой являются спектральная последовательность покрытия и спектральная последовательность расслоения. Х. Н. Инасаридзе ввел и исследовал алгебраические системы гомологии и когомологии со значениями из коммутативных инверсных полугрупп. Г. Д. Берипшвили определил по два варианта групп когомологии со значениями в предпучке и гомологии со значениями в копредпучке. Один из вариантов групп когомологии и гомологии для паракомпактных пространств изоморфен группам Чеха. Другой вариант групп когомологии, определенный способом, аналогичным способу Виеториса, для любых пространств совпадает с группами когомологии Гротендика относительно пучков.

Из предыдущего видно, что в одних вопросах теории гомологии требуется рассмотрение групп, основанных на конечных цепях, а в других — групп с бесконечными цепями. Д. О. Баладзе ввел груп-



М. М. Постников.



Н. Б. Веденисов.

пы гомологии и когомологии, взятые над группой коэффициентов с выделенной подгруппой; цепями здесь являются функции, почти все значения которых принадлежат подгруппе. При тривиальных подгруппах получаем указанные две классические группы, причем с помощью некоторой точной последовательности Баладзе доказал, что его группы при некоторых условиях являются расширением одной из этих классических групп посредством другой. Баладзе рассмотрел со своей точки зрения различные теории гомологии: Александрова—Чеха, Виеториса, сингулярную и т. п., получил, как частные случаи, классические группы этих теорий, сравнил и систематизировал соответствующие группы и в различных предположениях доказал для них теоремы двойственности. Д. О. Баладзе исследовал произведение групп с выделенными подгруппами, получая при тривиальных

подгруппах обычные произведения и сумму; Л. Д. Мдзинаришвили рассматривает прямые и обратные спектры групп с выделенными подгруппами; в случае тривиальных подгрупп его прямые спектры дают обычные суммы и прямые спектры, а обратные спектры — обычные произведения и обратные спектры. Обоих отличает от других авторов, занимавшихся аналогичными вопросами, своеобразный способ топологизации произведения и предельных пространств, что позволяет им доказывать теоремы двойственности в смысле классической теории характеров Понтрягина. Гомологические применения своих пределов дали Мдзинаришвили возможность ввести группы, частными случаями которых являются проекционные и спектрные группы пространства. Мдзинаришвили исследовал соотношения между этими группами. Оба автора развили свой подход для групп со значениями в пучках. Отметим еще, что Х. Н. Инасаридзе и Л. Д. Мдзинаришвили построили точные гомологии в смысле Александрова — Чеха над дискретной группой коэффициентов (когомологии над компактной группой), первый — на открытых покрытиях, упорядоченных некоторым специальным образом, другой — на разбиениях и решетках Куроша.

За последнее время во многих странах появились работы по исследованию локальных гомологических свойств пространств в направлении, начатом в середине 30-х годов П. С. Александровым. Александров определил локальные числа и группы гомологии различных видов замкнутого множества евклидова пространства и установил ряд соотношений между ними, в частности соотношения двойственности для чисел Бетти. Кроме того, Александров дал приложения локальных групп в теориях размерности, локальной связности, достижимости и т. п. В случае произвольного пространства локальные группы

гомологии и когомологии определила А. Р. Рухадзе. Из построенных групп выделяются группы с компактными носителями и группы относительно данной направленной системы открытых множеств пространства. Для них Рухадзе доказала теоремы двойственности в случае любых подмножеств многообразий. Теорию локальных групп с коэффициентами в пучках развил Е. Г. Складенко.

Главные из изложенных выше результатов, относящихся почти ко всем разделам классической алгебраической топологии, имели решающее влияние на развитие этой области математики и создали заслуженную славу и авторитет советской топологии. В исследования по теории гомологии, представленной ранее немногими, хотя и крупными именами, включается все большее и большее число ученых. Рассмотренные выше результаты не исчерпывают достижений советских топологов по теории гомологии. Другие направления по теории гомологии еще очень тесно связаны с породившими их проблемами гомотопической и дифференциальной топологии и излагаются в следующем разделе главы.

## **Гомотопическая и дифференциальная топология**

Развитие алгебраической топологии в последние 30—40 лет было весьма интенсивным. За этот период выработан целый ряд фундаментальных понятий современной математики, неожиданных новых схем математического рассуждения, создан единый и стройный чрезвычайно разветвленный аппарат, позволяющий с весьма общей единой точки зрения находить подходы и решать трудные проблемы самых различных областей математики, например дифференциальной геометрии и динамических систем, вариационного исчисления и теории уравнений в частных производных, групп Ли, алгебры и алгебраической геометрии, теории чисел и теории функций многих комплексных переменных.

Большая заслуга в этом принадлежит советской школе гомотопической и дифференциальной топологии. Достаточно назвать созданные Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом методы вариационного исчисления в целом, позволившие с неожиданной и новой тогда точки зрения решить известную проблему Пуанкаре о замкнутых геодезических на двумерной сфере, теорию характеров Понтрягина, теорию двойственности в топологии, крупный сдвиг в пятой проблеме Гильберта, общеизвестные (в определенном смысле дифференциально-геометрические, с новой точки зрения) работы Понтрягина об открытых им характеристических классах, о гомотопических группах сфер, косых произведениях и когомологических операциях.

## Советская школа вариационного исчисления в целом

В конце 20-х годов, т. е. когда появились первые работы Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана по вариационному исчислению в целом, гомотопическая топология находилась еще в зачаточном состоянии. Основные ее понятия, например гомотопические группы, были еще не выявлены. Содержательные задачи гомотопического характера в это время могли возникнуть лишь вне самой топологии. И, действительно, такие задачи возникли в анализе, стимулируя выделение гомотопической топологии в отдельную ветвь математики. Важной задачей такого рода была задача о числе критических точек достаточно гладкой функции, заданной на гладком многообразии. Тесно связан с этой задачей и вопрос о числе замкнутых экстремалей положительно определенной вариационной задачи. Один из наиболее интересных случаев рассматривал еще А. Пуанкаре. Он сформулировал следующую гипотезу: риманово многообразие, гомеоморфное двумерной сфере, имеет не менее трех геометрически различных замкнутых геодезических. Частные результаты в этом направлении кроме самого Пуанкаре были получены Дж. Биркгофом и др. Интересные факты незадолго до смерти установил П. С. Урысон. Однако наиболее общие исследования принадлежат Л. А. Люстернику и Л. Г. Шнирельману. Они были суммированы в известной брошюре «Топологические методы в вариационном исчислении» (1930 г.). Краткие публикации Люстерника и Шнирельмана, предшествовавшие их брошюре, были первыми советскими работами по гомотопической топологии.

Основные идеи названной работы Люстерника и Шнирельмана состоят в следующем. Вводится основное понятие — категория  $\text{cat}_X A$  замкнутого подмножества  $A$  произвольного компакта  $X$ . Если множество  $A$  можно продеформировать в  $X$  в точку, то  $\text{cat}_X A = 1$ . Если  $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ , где  $\text{cat}_X A_i = 1$ , то  $\text{cat}_X A \leq k$ . Далее, рассматривается класс  $L_i$  замкнутых множеств  $A \subset X$  категории не меньшей  $i$  и вводится число  $c_i$  — минимум максимумов исследуемой функции  $f$  на множествах из класса  $L_i$ . Ясно, что  $c_i \leq c_j$  при  $i < j$ . В предположении, что  $X$  — замкнутое многообразие, а  $f$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция на нем, доказывается следующая основная теорема:

если  $\text{cat}_X X = k$  и  $c_1 < c_2 < \dots < c_k$ , то на  $X$  имеется не менее  $k$  критических точек функции  $f$  (т. е. точек, где  $df = 0$ ); если же  $c_i = c_j$ ,  $i < j$ , то существует целое множество категории не меньшей  $j - i + 1$  критических точек функции  $f$  на  $X$ .

Для оценки числа  $\text{cat}_X X$  вводится понятие комбинаторной (гомологической) категории  $\text{kat}_X A$ ;  $\text{kat}_X A = 1$ , если гомоморфизм вложения  $H_i(A) \rightarrow H_i(X)$ ,  $i \geq 0$ , тривиален, и  $\text{kat}_X A \leq k$ , если  $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ ,

где  $\text{kat}_X A_i = 1$ . Оказывается, что  $\text{kat}_X A \leq \text{cat}_X A$ . Число  $\text{kat}_X X$  в относительно простых случаях может быть найдено при помощи теории делителей многообразия. Эта теория предвосхищает понятие длины, изученное позднее С. В. Фроловым и Л. Э. Эльсгольцем. Из нее, в частности, следует, что

$$\text{cat}_{P^n} P^n = \text{kat}_{P^n} P^n = n + 1,$$

где  $P^n$  —  $n$ -мерное проективное пространство.

Понятие категории можно, как показано в работе, применить и к решению некоторых вариационных задач, которые являются бесконечномерными аналогами рассмотренной выше ситуации. В этом направлении доказана следующая теорема, являющаяся решением упомянутой выше гипотезы Пуанкаре.

На всякой поверхности, гомеоморфной сфере, существует: а) либо три замкнутых несамопересекающихся геодезических разной длины; б) либо семейство таких геодезических равной длины, однократно покрывающее всю поверхность, и замкнутая геодезическая другой длины; в) либо семейство таких геодезических, дважды покрывающее поверхность.

При доказательстве этой теоремы для применимости теории категорий нужны соответствующие конечномерные аппроксимации бесконечномерной задачи. Поэтому авторам надо было найти, говоря современным языком, гомотопический тип пространства вложений окружности в 2-сферу. Поставленную задачу они решили полностью: оказалось, что это пространство гомотопически устроено так же, как и пространство окружностей постоянного радиуса на сфере.

Рассмотренной работой Люстерника и Шнирельмана было положено начало советской школе вариационного исчисления в целом.

В 1935 г. С. В. Фролов и Л. Э. Эльсгольц изучили предложенный Л. С. Понтрягиным гомологический инвариант цикла  $Z$ , лежащего в многообразии  $M$ , — длину (обозначение  $\text{long}_M Z$ );  $\text{long}_M Z \leq l$ , если существуют в  $M$  такие циклы  $Z_1, Z_2, \dots, Z_l$ , что пересечение  $Z \cdot Z_1 \cdot \dots \cdot Z_l$  негомологично нулю в  $M$ . Важность этого инварианта определяется их теоремой  $1 + \text{long}_M M \leq \text{kat}_M M \leq \text{cat}_M M$  и тем фактом, что он полностью определяется гомологической структурой многообразия  $M$ . Эльсгольц в 1939 г. исследовал также общую аксиоматику инвариантов, позволяющих оценить числа критических точек. Примерно тогда же Гордон заметил, что на  $n$ -мерном многообразии  $M^n$  можно построить функцию ровно с  $n + 1$  критическими точками. Это интересно в силу результата Люстерника — Шнирельмана о том, что  $\text{cat}_M M^n \leq n + 1$ .

В 1940—1943 гг. Л. А. Люстерник предпринял исследование гомологических свойств пространств петель на сфере (заметки, опубликованные в ДАН СССР). Числа Бетти этого пространства были ранее (1934 г.) найдены М. Морсом, однако для вычисления длин циклов в этом пространстве необходимо было найти кольцо когомологий (пересечений, по старой терминологии). Это частично и сделал Люстерник в упомянутых работах. В этих же работах основным идеям теории категорий и ее приложений придан гомологический характер, позво-



ливший преодолеть ряд технических трудностей. Результаты Люстерника подробно изложены в его монографии «Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом» (1947 г.).

Основной результат монографии состоит в следующем: если  $n$ -мерное многообразие гомеоморфно сфере и его метрика не очень сильно отличается от стандартной, то на нем существует либо не менее  $n + 1$  геометрически различных замкнутых геодезических разной длины, либо континуальное семейство. Если  $n = 2^k$ , то вместо  $n + 1$  можно взять  $2n - 1$ . Кроме того, в этой же книге, как иллюстрация применяемых методов, построена теория собственных значений одного класса нелинейных операторов. Теорию категорий к проблеме собственных значений применял также Э. С. Цитланадзе.

Несколько в стороне от основного направления исследований стоит работа Д. П. Гроссмана (1946 г.), где показано, что категория  $n$ -мерного  $k$ -связного комплекса не превосходит  $\left[ \frac{n}{k+1} \right] + 1$ .

В 1939—1948 гг. появляются первые советские исследования по другой тематике вариационного исчисления в целом — теории Морса. Это работы Г. С. Чогошвили и Л. Э. Эльсгольца. Они изучали изменение групп Бетти и некоторых других топологических инвариантов поверхностей уровня  $\{f(x) = c\}$  и областей меньших значений  $\{f(x) \leq c\}$  достаточно гладкой невырожденной функции  $f$ , заданной на гладком многообразии. Ими получено полное решение для замкнутых многообразий, а Г. С. Чогошвили — и для многообразий с границей (причем допускается расположение критических точек и на границе). Как следствие этого исследования Эльсгольц показал, например, что число критических точек невырожденной функции на  $n$ -мерном замкнутом многообразии не меньше

$$\sum_{i=1}^n (b_i + q_i + q_{i-1}),$$

где  $b_i$  —  $i$ -е число Бетти рассматриваемого многообразия, а  $q_i$  — коэффициент кручения его  $i$ -мерной группы гомологий. (Часть этих результатов была доказана или анонсирована ранее, в основном для замкнутых многообразий, самим М. Морсом.) Чогошвили введено (1939—1941 гг.) преобразование, называемое им «преобразованием Шнирельмана» (в современных терминах — «перестройка Морса», или «сферическая модификация»).

Л. А. Люстерник и А. И. Фет показали (1951 г.), что на замкнутом многообразии существует по крайней мере одна замкнутая геодезическая. Новый результат получил Фет в 1953 г., доказав, что алгебраическое число таких экстремалей не менее трех, при некоторых предположениях относительно первой группы гомологий рассматриваемого многообразия. Наконец, совсем недавно, в 1965 г., ему же удалось установить, что на любом замкнутом многообразии существует по меньшей мере две геометрически различные замкнутые геодезические.

В названных работах результаты получаются на основании более детального изучения гомологий и когомологий пространства замкнутых

кривых, на основании геометрических соображений, развитых Люстерником и Морсом. Техника современной алгебраической топологии в них не используется.

Ученик А. И. Фета С. И. Альбер довел гомологический метод Люстерника до его логического конца для многообразий, гомеоморфных сфере. В 1954 г. он вычислил кольцо когомологий пространства больших кругов на  $n$ -мерной сфере и показал, что «длина» этого пространства равна  $2n - s - 2$ , где  $n = 2^k + s$ ,  $s < 2^k$ . Альбер использовал для вычисления гомологий многообразий свой метод двойственных последовательностей. Этот метод представляет собой алгебраизацию известного приема Понтрягина. С помощью своего метода Альбер вычислил гомологии некоторых однородных пространств (эти вычисления были осуществлены ранее и другими исследователями). Недавно (1964 г.) он показал при помощи этого же метода, что на римановом многообразии, гомеоморфном  $n$ -мерной сфере, существует последовательность  $\{c_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , серий по  $n$  геодезических петель, причем, если  $p$ -я и  $q$ -я геодезические из одной серии имеют одинаковую длину, то существует  $(q - p)$ -мерное множество геодезических петель. Пример эллипсоида показывает, что это описание окончательное. Результат Альбера основан на вычислении кольца когомологий по mod 2 пространства неориентируемых петель, которое полностью им вычислено.

В 1951 г. французский математик Ж.-П. Серре решил по существу простейшую задачу вариационного исчисления. Он показал, что на полном неациклическом римановом многообразии существует всегда счетная последовательность геодезических, соединяющих любые две заданные точки. Результаты Серре и других математиков французской школы алгебраической топологии, опубликованные в начале 50-х годов, дали алгебраической топологии совершенно новые, весьма сильные и тонкие методы. Первым из советских математиков использовал эти методы для задач вариационного исчисления А. С. Шварц. В 1957—1960 гг. он исследовал гомологии с рациональными коэффициентами различных типов пространств замкнутых кривых и получил для них довольно полные результаты. Однако непосредственных приложений в вариационном исчислении эти результаты не получили. С другой стороны, Шварц сделал интересное добавление к упоминавшемуся фундаментальному результату Серре. Он показал, что среди геодезических, соединяющих две заданные точки риманова многообразия, существует бесконечная последовательность таких геодезических, длины которых бесконечно растут, но не быстрее, чем в арифметической прогрессии.

Совсем недавно (1964 г.) С. И. Альбер получил результаты по «многомерной задаче вариационного исчисления в целом», которая в простейшем частном случае сводится к отысканию числа минимальных замкнутых поверхностей заданного типа на римановом многообразии. Он предложил новый тип сокращающих деформаций в рассматриваемом пространстве поверхностей, основанный на теории дифференциальных уравнений параболического типа («параболический спуск»), и показал, например, единственность решения для многообразий отрицательной кривизны. Это одна из немногих брешей в многомерной задаче.

## Теория гомотопий и гладкие многообразия в 30—40-х годах

Примерно с середины 30-х и до конца 40-х годов одно из центральных мест в советской и мировой топологии заняли работы Л. С. Понтрягина и его школы. Основной чертой его творчества в области топологии является глубокое изучение алгебро-топологических свойств гладких многообразий, инвариантных относительно диффеоморфизмов, и применение их к решению чисто гомотопических задач. Поэтому можно с полной уверенностью утверждать, что этими работами (вместе с работами Уитни) был заложен фундамент нового направления в математике, называемого ныне дифференциальной топологией, хотя оно выделилось окончательно из собственно топологии лишь в 1956 г., после знаменитой работы Милнора, в которой было доказано существование гомотопических, но не диффеоморфных гладких многообразий.

Хотя работы рассматриваемого периода довольно трудно разделить на отдельные циклы, для удобства изложения все же попытаемся это сделать и отдельно остановимся на оснащенных многообразиях, их применениях к гомотопической классификации отображений, когомологических операциях, а также на теории косых произведений, характеристических классах и числах. Кроме этих двух циклов работ следует упомянуть о вычислении Л. С. Понтрягиным (1935 г.) гомотопических групп Ли, в частности ортогональной группы. Этот результат интересен еще и тем, что для его получения была применена теория Морса в таком случае, когда возникают не изолированные критические точки, а критические многообразия и требуется обобщение неравенств Морса на этот случай. Вскоре результат Понтрягина был доказан вновь на языке клеточных разбиений, сама работа забыта, а обобщенные неравенства Морса много позднее найдены Боттом и получили название неравенств Ботта.

Мы не имеем возможности подробно осветить работы ряда авторов 30-х годов, забытые или не нашедшие далеких продолжений, — такие, как многочисленные обобщения и обоснования теорий пересечений циклов в связи с геометрическим осмысливанием тех или иных алгебраически несложных операций в топологии (Понтрягин, Гордон, Глезерман), некоторых законов двойственности. Из законов двойственности, в свете их связи с теорией гомотопии, следует назвать найденную Понтрягиным (1941—1947 гг.) новую форму для них:

$$H_i(X, G) = \text{Char } H_{n-i-1}(Y, \text{Char } G);$$

$$H_i(M^n, G) = \text{Char } H_{n-i}(M^n, \text{Char } G),$$

где  $X \cup Y = S^n$  и  $M^n$  — многообразие,  $\text{Char}$  — группа характеров Понтрягина, введенная именно для законов двойственности и распространения их на компакты. Ученик Понтрягина Н. К. Брушлинский доказал, что для комплекса  $X$  множество гомотопических классов отоб-

ражений в окрестность естественно изоморфно группе  $\text{Char } H_1(X, S^1)$ , решив тем самым поставленный Понтрягиным вопрос.

А. Н. Колмогоров (и одновременно Дж. Александер) дал другое (прямое) определение групп Понтрягина  $\text{Char } H_i(X, \text{Char } G)$  и ввел затем для них умножение, дуальное пересечению циклов. Позднее эти группы стали называться группами когомологий. Их прямое определение удобно и полезно (очень важна также функториальная мультипликативная структура). В известных работах Понтрягина (1931 г.), а также Уитни, Эйленберга, Стиррода была выяснена роль этих понятий в теории гомотопий для построения препятствий к продолжению отображения, сечения расслоения и т. д., а после появления когомологических операций (Понтрягин, Стиррод), аппарата спектральных последовательностей, пучков, гомологической алгебры (Лерэ, Картан, Серре, Эйленберг, Маклейн) они получили много разнообразных применений.

*Оснащенные многообразия и их применения.* После знаменитых работ Х. Хопфа начала 30-х годов, в которых были обнаружены гомотопически нетривиальные отображения сфер на сферы низших размерностей (доказана бесконечность гомотопических групп  $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ ) и указаны связи этих вопросов с другими проблемами математики (например, проблемой о существовании алгебр с делением), одним из самых острых вопросов топологии стало вычисление гомотопических групп сфер —  $\pi_{n+i}(S^n)$  при  $i > 0$ . Кроме указанного результата Хопфа, здесь ничего не было известно, и проблема их вычисления во всех частных случаях представлялась трансцендентной. Как показал в дальнейшем более чем двадцатилетний опыт развития топологии, каждый существенно новый шаг в исследовании этого вопроса вносил в топологию кардинально новые методы и изменял ее лицо в целом.

Первым после Хопфа таким крупным шагом был созданный Понтрягиным метод оснащенных многообразий. Идея метода состоит в следующем: если существует отображение сферы на сферу  $S^{n+i} \rightarrow S^n$ , то его можно считать бесконечно дифференцируемым и «регулярным» в некоторой точке  $x \in S^n$ , т. е. в любой точке  $y \in S^{n+i}$ , переходящей в точку  $x$ ; ранг отображения равен  $n$ . Пусть  $\tau$  — какой-либо касательный  $n$ -репер в точке  $x$ . Тогда прообраз точки  $x$  есть гладкое подмногообразие  $M^i \subset S^{n+i}$  и «прообраз» репера  $\tau$  задает трансверсальное  $n$ -реперное поле  $\kappa M^i$  в  $S^{n+i}$ . Такая пара — подмногообразие  $M^i \subset S^{n+i}$  с трансверсальным  $n$ -реперным полем — называется «оснащенным многообразием». Гомотопия отображений сферы есть отображение  $F: S^{n+i} \times I \rightarrow S^n$ , где  $I$  — отрезок от 0 до 1; аналогично гомотопия порождает «оснащенную пленку»  $N^{i+1} \subset S^{i+n} \times I$ , границы которой на верхнем и нижнем основаниях являются «оснащенными многообразиями». Таким образом, вместо гомотопических классов отображений  $S^{n+i} \rightarrow S^n$  приходится рассматривать «оснащенные многообразия» размерности  $i$  и гомотопии между ними с помощью «оснащенных пленок» размерности  $i+1$ . Как показал Понтрягин, это соответствие оказывается точным. Отсюда сразу видно, что для  $i = 0$  гомотопические классы отображений

определяются целым числом (степенью), хотя это было доказано еще в 20-х годах Хопфом. Для  $i = 1$  несложно получается  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$  и  $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2$  при  $n > 2$ , что уже представляло собой крупный результат. Несложно вычисление также для  $i = 2$ , хотя в первой заметке (1937 г.) был указан неверный ответ, существенно исправленный Понтрягиным позднее — в 1950 г.; сначала здесь не был замечен интересный алгебраический эффект (Arg — инвариант), ответ —

$$\pi_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2, \quad n \geq 2.$$

В дальнейшем Понтрягину удалось применить свои результаты к решению других гомотопических задач. Так, им получена в 1941 г. полная классификация гомотопических классов отображений трехмерного комплекса в двумерную сферу. Эта работа интересна совсем новым для топологии того времени явлением — функториальной когомологической операцией, не выражающейся посредством таких простых операций, как сложение и умножение. Операция получила название «квадрат Понтрягина», а ее простейшие обобщения — «степени Понтрягина». В дальнейшем развитии топологии различные когомологические операции приобрели огромное значение. Однако Понтрягин не пошел тогда по этому пути дальше, поскольку в одной из следующих работ он дал неверную классификацию отображений  $(n+1)$ -мерного комплекса в  $n$ -мерную сферу, которая при правильном ответе приводила бы к квадратам Стиррода. Дальнейшее «правильное развитие» эти идеи получили лишь в 1947 г. — ошибка была указана в известной работе Стиррода, где введены и впервые применены «квадраты Стиррода». Школа Понтрягина завершила позднее на основе работ Понтрягина и Стиррода классификацию гомотопических классов отображений  $(n+1)$ -мерного комплекса в пространство, асферичное в размерностях меньших  $n$  (М. М. Постников, 1950 г.), где появилась еще одна когомологическая операция — «квадрат Постникова», были указаны применения квадратов Понтрягина — Стиррода к задачам построения сечений в косых произведениях, в частности касательных (В. Г. Болтянский, 1955—1956 гг.).

Здесь трудно рассказать о судьбе упоминавшихся идей и методов в последующем развитии топологии — она очень сложна; все они получили многочисленные применения, хотя уже и не в тех задачах, для которых создавались.

*Косые произведения. Характеристические классы и числа.* Частные примеры построения многообразий с помощью тех или иных специальных косых произведений приведены еще Пуанкаре, не говоря даже о накрытиях. Однако понятие косого произведения в начале 30-х годов не было общеизвестным и общеупотребительным; Зейферту и Трельфаллю даже приходилось доказывать в известной книге «Топология» важность изучения «волоконистых пространств» в трехмерном случае, а общее понятие было, по-видимому, сформулировано впервые Уитни в 30-х годах в связи с началом развития теории гладких многообразий. К 40-м годам назрела потребность в развитой теории косых произведений. Л. С. Понтрягин (1940—1949 гг.) и затем Стиррод установили класси-

фикационную теорему для общих косых произведений посредством гомотопических классов отображений базы в базу найденного ими «универсального расслоения» и применили ее к вычислению конкретных примеров классификации. Более того, Понтрягину удалось вычислить целочисленные гомологии грассмановых многообразий в больших размерностях. Поскольку грассмановы многообразия как раз и дают универсальное косое произведение для групп  $O_n$ ,  $SO_n$ , то эта работа позволила определить «характеристические классы»  $p_\omega \in H^{4h}(M^n)$  ( $\omega = (a_1, \dots, a_s)$  — разбиение числа  $k$  на слагаемые  $a_1 + \dots + a_s = k$ ) для любого косого произведения с группой  $SO_n$  и любой базой  $X$ .

Вначале Понтрягин определял классы  $p_\omega$  лишь для касательного косого произведения над гладким многообразием  $M^n$ . Идея состояла в следующем. Вложим гладкое многообразие в  $R^{n+l}$  при  $l > n$  и снесем касательную плоскость в точке  $x \in M^n$  в начало координат. Множество  $n$ -плоскостей в  $R^{n+l}$ , проходящих через начало координат, образует грассманово многообразие  $G_{n,n+l}$ . Возникает «тангенциальное отображение»  $f: M^n \rightarrow G_{n,n+l}$ . Когомологии  $H^i(G_{n,n+l}) / 2\text{-torsion}$  порождаются элементами  $p_\omega \in H^{4i}(G_{n,n+l})$  для всех  $\omega$  и еще одним элементом  $\chi \in H^n(G_{n,n+l})$ ,  $n = 2s$  при  $i \leq n$ . Полагаем:  $p_\omega(M^n) = f^* p_\omega$ . Гомотопический класс отображения  $f: M^n \rightarrow G_{n,n+l}$  при  $l > n$  не зависит от вложения  $M^n \subset R^{n+l}$ , и классы  $p_\omega(M^n)$  корректно определены. Позднее эти классы были названы «классами Понтрягина»; Ву показал, что среди них для каждого  $k$  существует один класс  $p_k \in H^{4k}(M^n)$ , а остальные  $p_\omega$  — полиномы от  $p_1, \dots, p_k$ . Можно также определить класс  $\chi \in H^n(M^n)$ ,  $n = 2s$ , но оказывается, что  $\chi$  определяется уравнением

$$\chi[M^n] = \text{эйлеровой характеристике.}$$

В 1949 г. Понтрягин определил классы  $p_\omega$  посредством тензора кривизны риманова многообразия как дифференциальные формы; это определение получилось также из тангенциального отображения  $f: M^n \rightarrow G_{n,n+l}$  и выбора «инвариантных форм» по Э. Картану на симметрическом многообразии  $G_{n,n+l}$ . Классы  $p_\omega$  дают полный набор, кроме  $\chi$ , таких выражений от тензора кривизны, интегралы которых по циклам не зависят от метрики, а инвариантны относительно диффеоморфизма. Много лет оставалась нерешенной проблема, являются ли эти интегралы инвариантами гомеоморфизма. Они заведомо не являются гомотопическими инвариантами, в отличие от «гауссовой кривизны»  $\chi \in H^n(M^n)$ . При таком определении  $\chi$  — просто гауссова кривизна и уравнение

$$\chi[M^n] = \text{эйлеровой характеристике}$$

есть просто формула Гаусса — Бонне. Кроме классов Понтрягина были известны также классы Штифеля — Уитни  $W_i \in H^i(M^n, \mathbb{Z}_2)$  и позднее

введены классы Черна комплексных расслоений и многообразий  $c_i \in H^{2i}(M^n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Для комплексного многообразия классы Понтрягина являются выражениями от классов Черна; эти выражения были найдены ученицей Понтрягина В. И. Бурдиной. Для алгебраического многообразия при определении классов Черна посредством особенностей реперных полей было показано (учеником Понтрягина Р. В. Гамкрелидзе, 1956 г.), что они являются линейными комбинациями алгебраических подмногообразий.

Наконец, Понтрягину принадлежит очень важное наблюдение. Назовем числами Понтрягина скалярные произведения  $p_\omega[M^n]$  для  $n = 4k$ . Аналогично вводятся числа Штифеля и Черна; оказывается, что если многообразие является границей, то его числа Штифеля равны нулю; если все ориентируемо, то равны нулю и числа Понтрягина. Понтрягин высказал гипотезу, доказанную позднее В. А. Рохлиным: всякое трехмерное многообразие является границей четырехмерного. (О дальнейшей роли классов и чисел Понтрягина см. § 3.)

Остановимся на характеристике исследований переходного для нашей топологии периода — начала 50-х годов. К этому времени ситуация в мировой топологии начала резко изменяться. С одной стороны, благодаря работам многих видных математиков (Хопфа, Понтрягина, Уитни, Стинрода, Эйленберга, Маклейна, Уайтхеда и др.) был накоплен богатый запас материала — идейного и фактического; однако не было единого взгляда на вещи, аппарата, который позволял бы регулярным образом решать отдельные частные задачи теории гомотопий, а сами эти задачи казались неразрешимо трудными. С другой стороны, в тогда еще малоизвестных работах Лерэ строился большой сложно формулируемый аппарат спектральных последовательностей и вводились основные понятия теории пучков, но не было очевидного предмета, к которому все это можно было бы применить; трудно было понять тогда, что это не тавтология, а реально применимая система правильных понятий и взаимосвязей. Семинар А. Картана (Серре, Борель, Том и др.) тогда еще не был известен, хотя и работал весьма активно. Краткие заметки об исследованиях его участников, полностью изменивших лицо топологии (а позднее и не только топологии), стали появляться в начале 50-х годов. Полностью была опубликована в 1951 г. лишь знаменитая диссертация Серре, а остальные вышли из печати значительно позднее и были освоены у нас окончательно лишь во второй половине 50-х годов.

Тем не менее в этот период советскими математиками (В. А. Рохлиным и М. М. Постниковым) были выполнены работы, оказавшие вместе с работами зарубежных топологов существенное влияние на развитие топологии.

М. М. Постников выполнил в 1949—1951 гг. важный цикл исследований, идейно продолжающий исследования Эйленберга и Маклейна, относящиеся к 40-м годам, в сторону выяснения, что представляет собой гомотопический тип общих комплексов. Именно он окончательно выделил минимальную модель в сингулярном комплексе простран-

ства (ранее для частного случая это сделали Эйленберг и Маклейн, а общий случай получили одновременно Эйленберг и Зильберг). Более того, им было выяснено, что минимальная модель допускает формально-алгебраическое описание в терминах групп гомотопий пространства и групп гомологий вспомогательных «алгебраических комплексов», чем обобщаются найденные в частных случаях «алгебраические комплексы Эйленберга — Маклейна». Постников доказал также, что эта модель определяет гомотопический тип комплекса. Введенные им объекты называются ныне «системой Постникова».

Работы М. М. Постникова имели большое значение для развития теории гомотопий, так как ими была завершена выработка четкого взгляда на структуру ее основного понятия — гомотопического типа. Позднее они оказались полезны также для брауновского доказательства алгоритмической вычислимости гомотопических групп односвязных конечных комплексов (хотя алгоритм Брауна не пригоден пока для конкретных вычислений).

В начале 50-х годов появился цикл работ В. А. Рохлина по гомотопическим группам сфер, характеристическим классам Понтрягина и введенным им группам внутренних гомологий  $N^i (= \Omega_0)$  и  $\Omega^i (= \Omega_{SO})$ . Им были развиты весьма сложные геометрические соображения, позволившие решить чрезвычайно трудные задачи методами теории гладких многообразий. Назовем его основные результаты (в современной формулировке).

1. Группа  $\pi_{n+3}(S^n)$  при  $n \geq 5$  есть  $Z_{24}$ ,

$$\pi_6(S^3) = Z_{12}, \pi_7(S^4) = Z + Z_{12}.$$

Группа  $\pi_{n+3}(S^n)$  совпадает с образом  $J$ -гомоморфизма Уайтхеда

$$J: \pi_3(SO_n) \rightarrow \pi_{n+3}(S^n).$$

2.  $N^3 = \Omega^3 = 0$ ,  $N^4 = Z_2 + Z_2$ ,  $\Omega^4 = Z$  (очевидно,  $N^1 = \Omega^1 = 0 = \Omega^2$ ). Рохлин заметил, что сигнатура многообразия  $\sigma(M^{4h})$  (сигнатура матрицы пересечений  $2k$ -мерных базисных циклов) есть внутригомологический инвариант. Поэтому из результатов о группе  $\Omega^4 = Z$  он извлек формулу  $\frac{1}{3} p_1[M^4] = \sigma(M^4)$  (для четырехмерного многообразия  $M^4$ ).

3. Если для четырехмерного многообразия  $M^4$  класс Штифеля  $w_2 = 0$ , то класс Понтрягина  $p_1[M^4]$  делится на 48.

Одновременно результаты о группах внутренних гомологий были получены Томом. Формула  $p_1 = 3\sigma(M^4)$  (Тома — Рохлина) получила много далеких обобщений и применений. Большое значение приобрел также результат о делимости класса Понтрягина и вычисление  $J$ -гомоморфизма Уайтхеда, особенно для дифференциальной топологии. Сами же порядки гомотопических групп сфер начали получать иным путем вскоре после работ В. А. Рохлина, и решение задачи вычисления групп  $\pi_{n+i}(S^n)$  было продвинуто очень далеко.



В дальнейшем, однако, методы работ Рохлина соединялись с результатами и методами алгебраических работ, и это приводило к серьезным результатам в теории гомотопических групп сфер уже после того, как исчерпывались методы французской школы в этой проблеме (Милнор, Кервер).

### 3

#### Современные работы

Исследования, рассмотренные в настоящем параграфе, выполнены совсем недавно, в основном за последние семь лет. Как правило, они посвящены бурно развивающимся отделам топологии, и поэтому, по-видимому, еще рано оценивать их в исторической перспективе. В связи с этим мы просто назовем полученные результаты, стараясь по возможности указать их место в общем потоке исследований. Поскольку дать точную формулировку большинства результатов здесь попросту невозможно (да и, пожалуй, излишне), мы зачастую приводим их в упрощенной форме или указываем наиболее важные следствия из них, особенно в тех случаях, когда общие результаты получались ради следствия. Кроме того, работы, выполненные в 1965 г., нами описаны более кратко, чем другие.

*Общие гомотопические конструкции.* Рассмотрим работы, связанные с исследованием общих гомотопических понятий и конструкций. В 1960 г. В. Г. Болтянским и М. М. Постниковым была предложена аксиоматика теории когомологий. Она в некотором смысле дуализирует известную аксиоматику гомотопических групп и по существу отличается от широко известной системы аксиом Эйленберга — Стиррода лишь систематическим отказом от использования относительных групп, введение которых авторы считают излишним. Однако развитие теорий «обобщенных гомотопических групп» указывает, по-видимому, на нецелесообразность такого отказа.

Хорошо известный в топологии интуитивный параллелизм, существующий между многими понятиями и теоремами алгебраической топологии (например, между гомотопиями и когомологиями) и послуживший, в частности, основой для построения аксиоматики Постникова — Болтянского, подробно рассматривался Экманом и Хилтоном (двойственность Экмана — Хилтона). Им, однако, не удалось математически ясно осмыслить эту двойственность. Это было сделано недавно в работе Д. Б. Фукса (1963 г.). Начальная идея Фукса состоит во введении некоторой «разумной» топологии во множество морфизмов одного ковариантного функтора (из категории топологических пространств в нее саму) в другой функтор того же типа. Интуитивная двойственность функторов  $\Omega_X(Y)$  (пространство морфизмов  $X$  в  $Y$ ) и  $S_X(Y) = X \# Y$  вместе с тем фактом, что пространство морфизмов (в топологии Фукса) произвольного функтора,  $T$  в функтор  $\Omega_X(T)$  естественно гомеоморфно  $T(X)$ , позволили Фуксу определить функтор  $DT$ , двойственный  $T$ , как функтор, сопоставляющий пространству  $X$  пространство морфизмов функтора  $S_X$  в функтор  $T$ . Такое определение

двойственности, по-видимому, наиболее естественно. К сожалению, двойственность не является рефлексивной, т. е., вообще говоря,  $T \neq DDT$ , хотя  $DDDT = DT$ .

Обобщению другого типа двойственности, так называемой  $S$ -двойственности Спанье — Уайтхеда, посвящены заметки А. С. Шварца (1963—1964 гг.). Им сначала была обобщена эта двойственность на пространства главных расслоений, а впоследствии — и на произвольные расслоенные пространства с конечномерной полиэдральной базой. «Обобщенная» двойственность Шварца переходит в обычную  $S$ -двойственность Спанье — Уайтхеда, если рассматривать расслоения с одноточечной базой.

В большом цикле работ, выполненных примерно в 1959—1961 гг., Шварц ввел также и исследовал новое понятие — род расслоенного пространства, обобщающее понятие категории Люстерника — Шнирельмана. Родом расслоенного пространства он называет наименьшее число открытых кусков, на которые можно разбить базу расслоения и над которыми расслоение имеет секующую поверхность (для двулистных накрытий род был ранее определен М. А. Красносельским). В частности, категория пространства  $X$  есть род серровского расслоения над пространством  $X$ . Исследования Шварца о связи понятия рода с известными гомотопическими инвариантами показали, что применение этого понятия в актуальных гомотопических задачах ограничено, так как его успешно заменяют другие более известные и лучше вычислимые инварианты. Например, в проблеме вложения гладких многообразий эту роль выполняют характеристические классы. С другой стороны, некоторые задачи, например некоторые задачи вложения комплекса в комплекс, допускают близкое приближение к решению в терминах рода расслоенного пространства. Однако плохая вычислимость этого инварианта ограничивает его применение в конкретных случаях.

Общий характер трудностей, возникающих при изучении гомотопической структуры полиэдра по  $\text{mod } p$  описал в 1960 г. А. М. Виноградов. Он сопоставил всякому полиэдру конечного типа в так называемых стабильных размерностях цепочку расслоений ( $p$ -систему):

$$\dots \xrightarrow{F_2} X_2 \xrightarrow{F_1} X_1,$$

где каждый слой  $F_i$  есть произведение пространств Эйленберга — Маклейна для группы  $Z_p$  (простое  $p$  фиксировано), а пространства  $X_i$  являются универсальными примерами для некоторых кохомологических операций порядка  $i$ . Предельное пространство  $X$ , определяемое этой цепочкой расслоений, в стабильных размерностях гомотопически по  $\text{mod } p$  устроено идентично исходному полиэдру, при этом фильтрация его гомотопических групп, порожденная системой вложенных друг в друга слоев  $F_i$  естественных отображений  $X \rightarrow X_i$ , порождает известную спектральную последовательность Адамса. Последнее утверждение является решением одной задачи Адамса. Понятие  $p$ -системы также является «неэффективным», так как нет практически вычисляемого способа построения  $p$ -системы в конкретных случаях. Поэтому оно также носит в основном «теоретический» характер.

*Кобордизмы (внутренние гомологии).* Как упоминалось (§ 2), кольца внутренних гомологий (кобордизмы) были введены в современную топологию В. А. Рохлиным и Р. Томом в 1953 г. и уже в следующем году в известной работе Тома было сделано решающее продвижение в вопросе вычисления этих групп. Тому не только удалось полностью вычислить так называемые неориентируемые кобордизмы и получить обширную информацию об ориентируемых. Ему принадлежит также заслуга создания сильных алгебраических методов вычисления, основанных на последних достижениях алгебраической топологии. Основу метода Тома составляет редукция геометрической проблемы к гомотопической, которая осуществляется введением некоторых вспомогательных пространств, называемых ныне «пространствами Тома», и применение к этим вспомогательным пространствам современного аппарата алгебраической топологии.

Оставшаяся нерешенной непосредственно после работ Тома задача вычисления ориентируемых кобордизмов привлекла внимание многочисленных исследователей. Первый интересный результат получил в 1959 г. В. А. Рохлин, установивший отсутствие 4-кручения в этом кольце<sup>21</sup>. Примечательно, что оригинальный метод, примененный Рохлиным, не требует использования упомянутых конструкций Тома, но основывается на «прямом» геометрическом изучении естественного гомоморфизма ориентируемых кобордизмов в неориентируемые, ядро которого было вычислено. Рохлинское соображение использовать естественные связи разных типов кобордизмов оказалось полезным и в ряде других аналогичных задач.

Следующий шаг в определении кольца ориентируемых кобордизмов был сделан в 1959 г. Б. Г. Авербухом, который (одновременно с Дж. Милнором) показал, что в таком кольце отсутствуют  $p$ -кручения при  $p > 2$ . Этот результат вместе с результатом Рохлина и Уолла позволил полностью описать аддитивную структуру кольца. Однако громоздкая техника методики Картана — Серре, примененной Авербухом, не давала возможностей для дальнейшего продвижения.

Замена этого подхода новейшим — спектральной последовательностью Адамса — при исследовании гомотопий пространств Тома, которую осуществил несколько позднее (1960 г.) С. П. Новиков, оказалась весьма полезной и позволила не только сравнительно просто вновь доказать старые результаты, но и получить обширную новую информацию о предложенных им и Милнором других видах кобордизмов, например унитарных, которые были полностью вычислены. Преимущество спектрального метода Адамса заключается в том, что он позволяет хорошо учитывать мультипликативную структуру гомотопий томовских пространств. Новикову поэтому удалось собрать также многочисленные сведения о мультипликативной структуре кобордизмов специальной унитарной группы  $\Omega_{SU}$ . Одновременно с Новико-

<sup>21</sup> В работе Рохлина допущена ошибка. Она была исправлена Уоллом, который и завершил методом Рохлина изучение 2-кручения в ориентируемых кобордизмах  $\Omega_{SO}$ .

вым методом Адамса в таких же целях пользовался Милнор, получивший также упомянутые результаты для случая унитарных кобордизмов  $\Omega_U$ .

Заканчивая краткий обзор советских работ по теории кобордизмов, назовем еще две работы о гомотопических группах сфер (которые можно рассматривать как кобордизмы над тривиальной группой). Одна из них — работа С. П. Новикова (1959 г.) о гомологиях алгебры Стиррода. В известную спектральную последовательность Адамса им была введена здесь полезная дополнительная структура — когомологические операции. Это позволило Новикову несколько продвинуть вычисление гомологий алгебры Стиррода и получить некоторые новые сведения о гомотопиях сфер. Например, он доказал существование сколь угодно длинной нетривиальной композиции отображений сфер в сферу. Другая работа принадлежит Л. Н. Ивановскому (1964 г.) и посвящена непосредственному вычислению гомотопических групп сфер в малых размерностях. В ней на основании детального изучения гомологии алгебры Стиррода в малых размерностях по  $\text{mod } 2$  вычислены стабильные гомотопические группы  $\pi_{i+n}(S^n)$  при  $i \leq 21$ . Вычисления Ивановского опираются на введенную им новую спектральную последовательность, сходящуюся к гомологиям стирродовской алгебры, и систематическое использование так называемых произведений Масси для расчета этой последовательности.

*Проблема вложений и погружений.* Вопрос о возможных реализациях одного комплекса (многообразия) в другом с самопересечениями (погружения) и без них (вложения) в последнее время был объектом многих исследований. Большинство полученных результатов касается вложений и погружений многообразий (Смейл — Хирш, Хефлигер, Зиман, Столлинкс, Атья — Хирцебрух, Левин и др.). Однако в отличие, например, от теории кобордизмов эта тема своевременно не приобрела у наших математиков должной популярности и, естественно, результатов «общего значения» в этом вопросе у нас было мало. Трудные и интересные задачи о четырехмерных многообразиях решил В. А. Рохлин. Еще Уитни показал, что всякий элемент  $k$ -мерной гомотопической группы  $\pi_k(M^{2k})$   $2k$ -мерного односвязного гладкого многообразия  $M^{2k}$  можно реализовать гладко вложенной сферой  $S^k \subset M^{2k}$ , если  $k < 2$ . Долгое время считалось, что это верно и при  $k = 2$ , — необходимо просто другое доказательство. Однако Рохлин показал, что это не так и, более того, что гладкая реализация может быть невозможна даже тогда, когда возможна кусочно-гладкая. Результат Рохлина указывает на «исключительность» размерности 4 для этого круга вопросов.

С задачей вложения двумерных многообразий в четырехмерные тесно связана задача реализации унимодулярных целочисленных квадратичных форм формами пересечений циклов для четырехмерных замкнутых односвязных многообразий. Еще в 1952 г. Рохлин отметил, что для четных форм необходимым условием реализуемости является делимость на 16 сигнатуры, и построил пример реализуемой четной формы с сигнатурой 16. Совсем недавно ему же удалось доказать реали-

зуюмость всякой неопределенной четной формы с сигнатурой 16, а также других важных форм. Это пока наиболее сильные результаты в задаче реализации.

Д. Б. Фукс и А. С. Шварц получили (1959 г.) удобное описание спектральной последовательности циклического накрытия полиэдра и с ее помощью результаты о препятствиях к вложению многообразия в евклидово пространство, введенных Ву и др. В дальнейшем Фукс установил возможность получения вытекающей отсюда информации и посредством характеристических классов, что значительно проще и удобнее.

С. П. Новиков доказал (1961 г.), что всякое односвязное нечетномерное многообразие размерности  $n > 6$  вложимо в  $R^{2n-1}$ . Этот результат оказался, однако, частным случаем фундаментального результата Хефлигера, полученного одновременно и по существу решающего проблему вложения в так называемых стабильных размерностях.

В 1965 г. В. А. Рохлин установил вложимость всякого неориентируемого трехмерного многообразия в  $R^5$ , что вместе с некоторыми результатами Хирша является положительным решением проблемы вложения трехмерных многообразий в пятимерное евклидово пространство. Этот результат был получен независимо от Рохлина также Уоллом.

Гомотопические свойства пространства гладких вложений окружности в сферу или шар изучал А. М. Виноградов (1962 г.). Он показал, что в так называемых «стабильных размерностях» эти пространства гомотопически эквивалентны пространствам геометрических окружностей. Отсюда следует, например, что пространство вложений окружности в четырехмерную сферу не только связно, но и односвязно.

Гладкие вложения сфер Милнора изучали С. П. Новиков и Л. Н. Ивановский. Ими, в частности, были указаны примеры таких вложений в метастабильных размерностях с нетривиальным нормальным пучком (одновременно с Левиным, Цзяном, Скзарбой) и найдены сильные достаточные условия вложимости с тривиальным нормальным пучком во всех размерностях.

В 1966 г. С. П. Новиков установил факт, что при  $n \geq 5$  всякий локально плоский топологический узел коразмерности 2 топологически эквивалентен гладкому узлу (хотя гладкость на сфере  $S^n$  может быть и нетривиальной).

*Гладкие структуры и связанные с ними вопросы.* Открытие существования разных гладкостей на многообразии было сделано недавно, в 1957 г., Дж. Милнором, который установил этот факт для 7-мерных сфер. В дальнейшем он развил свои идеи и, опираясь на некоторые весьма тонкие результаты других математиков (С. Смейла, Дж. Адамса), совместно с М. Кервером получил полное описание множества всех гладкостей на сферах. Милноровские построения, однако, оказались не применимыми к многообразиям общей природы. С. П. Новиков предложил (1962 г.) конструкцию весьма общего характера в связи с проблемой нахождения полной системы инвариантов диффеоморфизма односвязных многообразий. Его результаты состоят в следующем.

Рассматривается односвязное ориентированное многообразие  $M^n$  и изучается (с точностью до прибавления сфер Милнора, являющихся границами  $\pi$ -многообразий) множество  $A$  многообразий  $\{M_\alpha^n\}$ , гомотопически эквивалентных многообразию  $M^n$  и имеющих такой же стабильный нормальный пучок. Основной теоремой описывается множество  $A$  в терминах гомотопий пространств Тома стабильного нормального пучка многообразия  $M^n$ . Из этого описания вытекает, во-первых, конечность множества  $A$ , из чего, в свою очередь, следует, что заданный гомотопический тип и классы Понтрягина определяют лишь конечное число недиффеоморфных гладких многообразий. Во-вторых, в ряде простых случаев на основе этого описания возможны подсчеты числа гладких структур. В-третьих, возможно описание изменения гладкости применением некоторых стандартных приемов, например приклеек сфер Милнора. Конкретные подсчеты, основанные на упомянутом выше общем подходе, позволили Новикову указать на наличие в классе  $A$  для  $M^n = S^2 \times S^6$  комбинаторно неэквивалентных многообразий (аналогичный факт был давно известен для неодносвязных многообразий), существование многообразий, гладкость которых не изменяется от прибавления сфер Милнора, и другие новые эффекты.

Использованная техника позволяет получить необходимое и достаточное условие для того, чтобы заданный стабильный пучок над многообразием был нормальным пучком для другого многообразия, того же гомотопического типа, и другие результаты подобного рода. Для нечетномерных односвязных ориентируемых многообразий, например, это условие состоит в том, чтобы фундаментальный цикл пространства Тома  $T(\nu)$  пучка  $\nu$  был сферическим (последняя задача, в несколько более общей форме, независимо от Новикова была решена также В. Браудером).

Часть упомянутых результатов перенес на многообразие с краем В. Л. Голо (1964 г.). Он применил схему рассуждений С. П. Новикова и, преодолев возникающие в этом случае трудности, получил аналогичное описание множества  $A$  для односвязных многообразий с краем размерности  $n > 5$ .

Описание множества  $A$  для размерностей  $n$  вида  $4k + 2$ ,  $k \neq 0, 1, 3$ , полученное в упомянутой работе, не совсем полно. В 1963 г. Новиков исследовал первый нетривиальный случай, т. е.  $k = 2$ ,  $n = 10$ . Введенный им новый инвариант, обобщающий известный инвариант Кервера (с помощью которого строился пример негладкого многообразия), указал на связь теории  $(4k+2)$ -мерных многообразий с кольцом  $\Omega_{\text{spin}}$  спинорных кобордизмов<sup>22</sup>. В этой же работе показано, что образ групп Милнора гладкостей на сфере в  $\Omega_{\text{spin}}$  нетривиален, откуда следует, что принадлежность многообразия к тому или иному классу спинорных кобордизмов не определяется (в отличие от обычных кобордизмов),

<sup>22</sup> Одновременно эта связь была найдена также Э. Брауном. Вычисление Новикова обобщенного инварианта Кервера для конкретных многообразий содержало ошибку. Правильные ответы были получены позднее Брауном и Петерсоном.

вообще говоря, комбинаторной структурой, а также касательным пучком и гомотопическим типом.

С гладкостями на сфере оказалась тесно связанной следующая задача: вычислить группы гомотопий компоненты единицы группы всех диффеоморфизмов сферы с точностью до ортогональных преобразований. На эту связь указал С. П. Новиков (1963 г.). Как выяснилось, нетривиальность этих гомотопий в ряде случаев вытекает из некоторых особенностей умножения в кольце стабильных гомотопий сфер. Этот факт равнозначен несводимости дифференцируемых пучков сфер к ортогональным. Кроме того, из него следует, например, гомотопическая нетривиальность группы всех диффеоморфизмов шара, постоянных на границе. В частности, в некоторых размерностях эта группа не связна.

Несколько работ связано со следующей проблемой Понтрягина: инвариантны ли характеристические классы Понтрягина при замене гладкости. В 1957 г. В. А. Рохлин доказал, что класс Хирцебруха  $L_k(M^{4k+1})$ , в частности первый понтрягинский класс пятимерного многообразия, инвариантен топологически. Более слабым является вопрос зависимости характеристических классов от замены гладкости при сохранении комбинаторной структуры. Этот вопрос одновременно исследовали в 1957 г. В. А. Рохлин, А. С. Шварц и Том. Их результаты идентичны и сводятся к определению рациональных классов Понтрягина для комбинаторных многообразий, откуда вытекает положительный ответ на поставленный вопрос. Долгое время этот результат был, по существу, единственным. В самое последнее время (1965 г.) С. П. Новиков предложил положительное решение всей проблемы в целом для рациональных понтрягинских классов (известно, что «кручения» понтрягинских классов уже и комбинаторно не инвариантны). Кроме того, он показал, что класс  $L_k(M^{4k+1})$  инвариантен на самом деле гомотопически. Из этих результатов вытекает, что на односвязном топологическом многообразии существует лишь конечное число неэквивалентных гладких (или комбинаторных) структур.

Результаты о гомотопической инвариантности скалярных произведений классов  $L_k(M^n)$  со специальными циклами при  $n > 4k + 1$  были получены для ряда случаев С. П. Новиковым и В. А. Рохлиным. Однако изучение этой темы еще далеко не завершено.

*Слоения.* В последнее время успешно развивается качественная теория систем Пфаффа, или слоений. Особый интерес к этой области возник в 50—60-х годах в связи с целым рядом обстоятельств. Во-первых, появились исследования Роба, Ву, Хефлигера, в которых были выработаны первичные понятия этой теории, найдены хорошие примеры, высказаны интересные гипотезы и получены неожиданные результаты (например, результаты Хефлигера об аналитичности слоений коразмерности 1).

Во-вторых, независимо от указанных исследований появились работы И. Г. Петровского и Е. М. Ландиса (1957 г.), посвященные известной проблеме Гильберта о предельных циклах уравнений  $Pdx +$

$+ Qdy = 0$  на плоскости ( $P, Q$  — полиномы), где некоторые из этих понятий были также определены и изучались (правда, авторам не удалось решить проблему Гильберта, и их идеи требуют далеко идущего топологического и алгебро-геометрического развития).

В-третьих, были опубликованы работы Д. В. Аносова, В. И. Арнольда и Я. Г. Синая, где слоения необходимо возникли при изучении важного специального класса динамических систем с метрической и топологической точки зрения (1962 — 1964 гг.) Этот класс аксиоматически описан Аносовым под названием  $U$ -систем и  $U$ -каскадов. Центральные топологические результаты Аносова и Синая состоят в следующем.

1. Такие системы структурно устойчивы, хотя, как правило, консервативны (Аносов).

2. Периодические решения образуют всюду плотное множество (Аносов), и число их растет экспоненциально в зависимости от длины (Синай).

С указанными системами связывается пара слоений (и для  $U$ -систем и для  $U$ -каскадов). Возникла проблема: на каких многообразиях такие системы могут существовать (примеры: торы для  $U$ -каскадов и линейные элементы на многообразиях отрицательной кривизны и «косые» торы для  $U$ -систем). С. П. Новиков доказал (1965 г.), что если одно из слоений  $U$ -системы имеет коразмерность 1, то  $\pi_2(M) = 0$ , а из работ Хефлигера следует, что здесь  $\pi_1(M)$  бесконечна. Для  $U$ -каскадов с аналогичным условием Новиков доказал, что  $M$  есть фактор евклидова пространства  $R^n$  по дискретной группе, свободной абелевой. Недавно же Моргулис доказал, что для  $U$ -систем группа  $\pi_1(M)$  носит «экспоненциальный» характер по росту числа элементов в зависимости от длины слова.

В 1965 г. С. П. Новиков получил результаты об общих слоениях коразмерности 1. В частности:

всякое неособое слоение на  $M^3$ , таком, что  $\pi_1(M^3)$  конечна или  $\pi_2(M^3) \neq 0$ , имеет компактный слой (специального вида);

если на  $M^3$  существуют аналитические слоения, то универсальная накрывающая либо стягиваема, либо есть  $S^2 \times R$ .



## ГЛАВА X

### ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

По теории функций действительного переменного написано очень большое количество работ. Многие из них посвящены небольшим уточнениям и обобщениям тех или иных теорем. Авторы главы не стремились изложить все полученные результаты. Из имеющегося материала отобраны наиболее характерные и основные утверждения из теории функций действительного переменного.

Однако во многих случаях формулируются некоторые частные утверждения, способствовавшие нахождению основных результатов. Иногда приводятся частные результаты также для того, чтобы показать, в какой степени советские математики продвинулись в решении тех или иных проблем.

Глава состоит из трех разделов: метрической теории функций, теории дифференцируемых функций многих переменных (теоремы вложения), теории приближения функций полиномами. В главе нет раздела по дескриптивной теории функций, так как в последнее время обзорные статьи по этой теории принято включать в основания математики.

#### Метрическая теория функций

В начале XX в. Лебегом было найдено чрезвычайно важное понятие меры множества. На основе этого понятия им была создана теория интеграла (Лебега). Эти два основных понятия — мера и интеграл — составляют фундамент метрической теории функций действительного переменного, которая занимается изучением свойств функций, производных, интегралов и функциональных рядов. К метрической теории функций действительного переменного относятся также вопросы измерения длин дуг, площадей поверхностей и т. п.

Начало развития метрической теории функций действительного переменного в России следует отнести к первому десятилетию XX в., хотя крупные результаты в этой области были получены русскими математиками в начале второго десятилетия XX в. (Д. Ф. Егоров, Н. Н. Лу-

зин). Полного же расцвета эта теория достигла лишь после Великой Октябрьской социалистической революции.

Создателем и руководителем школы метрической теории функций в СССР был Н. Н. Лузин. Эта школа по своим исследованиям занимала и занимает одно из ведущих мест в мире. Развитие метрической теории функций можно охарактеризовать двумя большими направлениями. Первое направление — на базе понятия меры множества и интеграла Лебега, а также их обобщений исследуются как общие свойства функций, интегралов, тригонометрических рядов, ортогональных рядов и т. п., так и их более конкретные тонкие свойства, выявление и изучение которых при помощи методов классического анализа было труднодоступным. Это направление и представляет, собственно, метрическую теорию функций. Об этом первом направлении мы и будем, в основном, говорить ниже.

Второе, не менее важное направление состоит в проникновении методов метрической теории функций в другие области математики, а также в создании на базе ее идей других новых областей математики, которые, в свою очередь, оказывают стимулирующее влияние на теорию функций. Советской науке принадлежит большая роль в развитии второго направления метрической теории функций. Так, на базе метрической теории функций началось изучение граничных свойств аналитических функций (Н. Н. Лузин, И. И. Привалов, В. В. Голубев, М. А. Лаврентьев, М. В. Келдыш, В. И. Смирнов, Г. М. Фихтенгольц и др.). А. Я. Хинчин создал метрическую теорию чисел, методы которой неразрывно связаны с метрической теорией функций. Велико влияние метрической теории функций на создание функционального анализа (который некоторые математики ранее считали частным случаем общей теории функций и общего анализа).

Развитие метрической теории функций действительного переменного в СССР способствовало возникновению и расцвету других математических школ, например школы теории функций комплексного переменного (И. И. Привалов, М. А. Лаврентьев, М. В. Келдыш), топологии (П. С. Александров, П. С. Урысон), теории вероятностей (А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин), математической логики (П. С. Новиков) и др. Значительно проникновение метрической теории функций и в такие области математики, как дифференциальные уравнения (С. Л. Соболев, Н. М. Гюнтер), вариационное исчисление (М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник, Н. Н. Боголюбов), почти периодические функции (В. В. Степанов), операционное исчисление и др.

Прежде чем перейти к описанию развития в СССР метрической теории функций, отметим, что некоторые разделы из этой области здесь не рассматриваются или только упоминаются. Читатель, желающий ознакомиться с этими разделами, может найти подробные обзоры в сборниках «Математика в СССР за XV лет», «Математика в СССР за 30 лет»,<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Математика в СССР за XV лет. ГТТИ, М.—Л., 1932. Математика в СССР за 30 лет. 1917—1947. ГТТИ, М.—Л., 1948. Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 1,2. Физматгиз, М., 1959.

«Математика в СССР за 40 лет». Кроме того, некоторые разделы не рассматриваются потому, что хотя их и относят к метрической теории функций, но нам это представляется не всегда достаточно убедительным. Например, теорию суммирования числовых рядов, последовательностей и интегралов обычно относят к метрической теории функций. С этим можно в какой-то степени согласиться, но можно и не согласиться. Нам представляется, во всяком случае, что теория суммирования числовых рядов не является той областью, исследования в которой могут как-то сильно повлиять на общую характеристику исследований по всей метрической теории функций. И, как нам кажется, зачисление теории суммирования числовых рядов в метрическую теорию функций зачастую делается только потому, что от других областей математики она (теория суммирования) отстоит еще дальше.

В силу всего сказанного выше, мы не даем, например, обзора по теории суммирования числовых рядов, последовательностей и интегралов, хотя в этом направлении имеются многочисленные исследования советских ученых (М. С. Аграновича, А. Л. Брудно, И. И. Волкова, Б. И. Голубова, Н. А. Давыдова, В. М. Даревского, Г. Ф. Кангро, А. Н. Колмогорова, И. И. Огиевского, И. Е. Огиевского, А. Г. Постникова, Г. П. Сафроновой, С. Б. Стечкина, П. Л. Ульянова, В. Г. Челидзе, М. П. Щеглова и многих других).

Наконец, за последние годы в Советском Союзе активизировались исследования по теории ортогональных рядов (и их обобщениям), и этим объясняется тот факт, что указанному разделу нами уделено значительное внимание.

## 1

### **Измеримые функции. Дифференцирование. Суперпозиции функций**

Первые наиболее важные результаты в метрической теории функций в нашей стране были получены Д. Ф. Егоровым и Н. Н. Лузиным. Егоров доказал, что всякая сходящаяся последовательность измеримых функций является равномерно сходящейся, если пренебречь некоторым множеством сколь угодно малой меры. Лузин установил, что всякая измеримая функция становится непрерывной, если пренебречь некоторым множеством сколь угодно малой меры. Эти два результата трудно переоценить, так как, с одной стороны, ими устанавливается определенная взаимосвязь между основными понятиями метрической теории функций и классического анализа, а с другой — они являются фундаментом, на котором очень часто строятся многие исследования по метрической теории функций.

В начальный период развития метрической теории функций в СССР активно изучались строение измеримых функций и вопросы дифференцирования функций. Исследования в этом направлении продолжают и в настоящее время, но их уровень и значение стали значительно ниже.

Напомним некоторые направления исследований и основные результаты, относящиеся к свойствам измеримых функций. Как отмечалось, Н. Н. Лузин впервые установил взаимосвязь между непрерывными и измеримыми функциями. Он же доказал, что для всякой измеримой на отрезке  $[0, 1]$  и почти всюду конечной функции  $f(x)$  существует примитивная функция  $F(x)$ . Другими словами, существует такая непрерывная функция  $F(x)$ , что  $F'(x) = f(x)$  почти для всех точек  $x \in [0, 1]$ . На основе этого утверждения Лузин решил задачу Дирихле в классе измеримых функций. Именно он доказал, что если  $f(\zeta)$  — конечная измеримая функция, определенная в комплексной плоскости на окружности  $|\zeta| = 1$ , то существует функция  $u(z)$ , гармоническая в круге  $|z| < 1$  и такая, что почти для всех  $\zeta_0 \in \{|\zeta| = 1\}$  функция  $u(z) \rightarrow f(\zeta_0)$  при  $z \rightarrow \zeta_0$  по некасательным путям. Этот результат явился началом активного развития московской школы теории функций комплексного переменного и, особенно, началом изучения граничных свойств аналитических функций.

Изучению метрических и дифференциальных свойств измеримых функций посвящены некоторые работы В. В. Степанова и А. Я. Хинчина, исследования и методы которых сохранили свое значение до настоящего времени. Так, Хинчин доказал, что если  $F(x)$  — конечная измеримая функция на множестве  $E$ , то почти в каждой точке множества  $E$  она либо имеет асимптотическую производную, либо оба ее верхних производных числа равны  $+\infty$ , а оба нижних равны  $-\infty$ . К этому же направлению относится результат Г. П. Толстова, установившего, что точная асимптотическая производная является функцией не выше первого класса Бэра.

В этом же направлении несколько результатов было установлено Е. П. Долженко. Так, он доказал, что если плоская область  $G$  ограничена спрямляемой жордановой кривой  $\Gamma$ , а функция  $u(x, y)$  непрерывна в  $\bar{G} = \bar{G} + \Gamma$  и гармонична в  $G$ , то из существования у граничной функции  $f(\xi, \eta) = u(x, y)|_{\Gamma}$  производной  $\frac{d}{ds}f(\xi, \eta)$  (относительно  $\Gamma$ ) в каждой точке некоторого множества  $E \subset \Gamma$  вытекает существование у функции  $u(x, y)$  полного дифференциала относительно  $\bar{G}$  почти в каждой точке из  $E$ . Такого типа факт им установлен также для производных и дифференциалов любого порядка. Относительно граничных свойств он же показал, что если функция  $f(p)$  определена в области  $\bar{G}$  ( $n$ -мерного пространства с  $n > 2$ ), ограниченной гладкой границей  $\Gamma$ , то почти для каждой точки  $Q \in \Gamma$  множество всех предельных значений  $f(p)$  при  $p \rightarrow Q$  по внутренности  $V_Q$  зависит только от точки  $Q$ , но не от  $V_Q$ , где  $V_Q$  — некоторый прямой круговой конус с вершиной  $Q$ , ведущий в точку  $Q$  изнутри области  $G$  так, что никакая его образующая не касается  $\Gamma$ .

В дальнейшем В. Н. Вениаминов, Л. В. Канторович, Ю. Б. Гермейер, Г. Х. Синдаловский, С. Г. Козловцев и другие продолжали исследования строения измеримых функций как с точки зрения поведения производных чисел, так и с точки зрения производных Шварца, Валье-Пуассена и т. п.

Отметим результат А. Н. Колмогорова о том, что нельзя дать



Г. П. Толстов.

естественное определение производной так, чтобы всякая непрерывная функция имела производную почти всюду.

Французский математик Данжуа доказал, что всякая точная конечная производная интегрируема в смысле  $D$  (Данжуа — Хинчина). Поэтому особо интересным становится пример В. Я. Козлова, построившего непрерывную на  $[0, 1]$  функцию  $F(x)$  с точной производной (принимавшей и бесконечные значения)  $F'(x)$ , не интегрируемой в смысле  $D$   $(0, 1)$ . Последний факт впервые был сообщен на I Всероссийском съезде математиков Ю. А. Гольдовским (доказательство свое не опубликовал, умер в 1931 г.).

Приведем еще одно важное утверждение А. Н. Колмогорова. Пусть  $M_k(f) = \sup_{-\infty < x < \infty} |f^{(k)}(x)|$ . Тогда, для того чтобы тройке

положительных чисел  $M_0, M_k, M_n$  ( $0 < k < n$ ) соответствовала функция  $f(x)$ , для которой  $M_0(f) = M_0, M_k(f) = M_k, M_n(f) = M_n$ , необходимо и достаточно выполнение условия  $M_k^n \leq A_{n,k} M_0^{n-k} M_n^k$ , где

$$A_{n,k} = \frac{K_{n-k}^n}{K_n^{n-k}} \quad \text{и} \quad K_j = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(j+1)p}}{(2p+1)^{j+1}}.$$

Для функций многих переменных В. В. Степановым доказана следующая замечательная теорема: для того чтобы конечная функция двух переменных  $f(x, y)$ , измеримая на множестве  $E$ , была асимптотически дифференцируема почти во всех точках этого множества, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на  $E$  она была асимптотически дифференцируема по каждой переменной (такого типа утверждение не имеет места для обычных частных производных и дифференциалов). В этом утверждении под асимптотической дифференцируемостью функции  $f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  понимается существование асимптотического дифференциала в точке  $(x_0, y_0)$ .

В дальнейшем И. Я. Верченко и А. Н. Колмогоров выполнили исследование о точках разрыва функций двух переменных.

Ряд важных результатов, относящихся к функциям многих переменных, был получен Г. П. Толстовым. Так, в частности, он построил пример непрерывных, в некотором квадрате  $K$ , функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , для которых  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  при  $(x, y) \in K$ , но функция  $P(x, y) \times dx + Q(x, y) dy$  не является полным дифференциалом. Другой интересный его результат состоит в том, что он построил пример функ-

ции  $F(x, y)$ , имеющей в  $K$  непрерывные частные производные  $F'_x, F'_y$  и такой, что хотя производные  $F''_{xy}$  и  $F''_{yx}$  существуют всюду в  $K$ , но  $F''_{xy}(x, y) \neq F''_{yx}(x, y)$  на множестве положительной меры. Более детальному изучению поведения измеримых функций посвящены исследования Ф. И. Шмидова и И. Я. Пламеннова.

В Советском Союзе активно разрабатывалась теория дифференцируемых отображений (М. А. Лаврентьев, И. Н. Векуа, Л. Д. Кудрявцев, А. М. Роднянский, П. П. Белинский, Г. Д. Суворов, Ю. Г. Решетняк и др.). М. А. Лаврентьевым создана геометрическая теория квазиконформных отображений. Им доказана фундаментальная теорема о существовании квазиконформных отображений плоских областей с заданными характеристиками. Ему же принадлежат первые глубокие результаты в теории дифференцируемых отображений в трехмерном пространстве. Эта теория Лаврентьева получила дальнейшее развитие в работах И. Н. Векуа, П. П. Белинского, Г. Д. Суворова, Ю. Г. Решетняка и др. (подробно мы не будем останавливаться на этих вопросах, так как они по методам исследований примыкают к теории функций комплексного переменного).

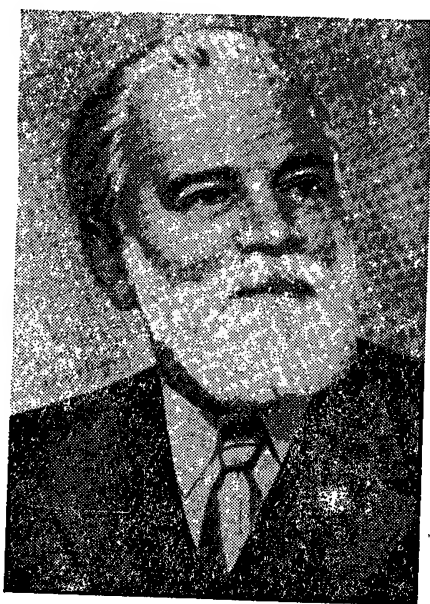
Общие вопросы теории дифференцируемых отображений с привлечением топологических методов изучали Л. Д. Кудрявцев, А. М. Роднянский и др. Кудрявцев исследовал непрерывные ориентированные отображения, т. е. отображения, у которых степень не обращается в нуль (к таким отображениям относятся, в частности, дифференцируемые отображения с изолированными нулями якобиана). Для этих отображений он доказал принцип сохранения области, принцип соответствия границ и другие общие геометрические факты. Он же установил, что для ориентированных дифференцируемых отображений дополнение к множеству нулей якобиана можно разбить на счетную сумму непересекающихся  $B$ -множеств, из которых одно имеет меру нуль, а на каждом из остальных отображение взаимно однозначно. А. М. Роднянским установлено, что якобиан дифференцируемого отображения обращается в нуль в некоторой точке, если он принимает в некоторых точках значения разных знаков. Им же доказан принцип максимума для дифференцируемых отображений, якобиан которых не меняет знака.

В математической литературе известно несколько обобщений понятия вариации функций одного переменного на случай функций многих переменных: вариации Витали, Фреше, Харди, Тоннели, Л. Д. Кудрявцева, А. С. Кронрода и др. Мы остановимся только на вариациях Кронрода.

Еще польский математик С. Банах доказал, что если непрерывная на отрезке  $[0, 1]$  функция  $f(x)$  имеет ограниченную вариацию  $\left(\overset{1}{V}_0 f\right)$ , то справедливо равенство

$$\overset{1}{V}_0 f = \int_{-\infty}^{\infty} N(t) dt,$$

где  $N(t)$  — число точек множества уровня  $\{x \in [0, 1]; f(x) = t\}$ . Ис-



Г. М. Фихтенгольц.

пользуя эту идею рассмотрения множеств уровня и развивая ее, Кронрод определил для всякой непрерывной функции  $n$  переменных  $n$  различных вариаций. Так, для непрерывных функций двух переменных он определил две вариации (линейную и плоскую). Эти вариации оказались независимыми. Их роль частично выясняется следующей теоремой Кронрода: если непрерывная в квадрате  $K$  функция  $f(x, y)$  имеет конечную плоскую вариацию, то  $f(x, y)$  почти всюду в  $K$  имеет асимптотический дифференциал; если же, кроме того, она имеет и конечную линейную вариацию, то  $f(x, y)$  почти всюду дифференцируема в  $K$ . А. Г. Витушкин обобщил понятие вариаций Кронрода и с успехом применил свои исследования в этом направлении к изучению суперпозиции функций<sup>2</sup>.

Изложим основные результаты, относящиеся к суперпозициям функций. Исследования в этой области продолжаются и в настоящее время. Хорошо известно, что именно советским математикам принадлежит заслуга детального изучения суперпозиций функций (Н. К. Бари, Д. Е. Меньшов, А. Н. Колмогоров, А. Г. Витушкин, В. И. Арнольд и др.).

Г. М. Фихтенгольц заметил, что суперпозиция абсолютно непрерывных функций одного переменного уже может не быть абсолютно непрерывной функцией. Бари и Меньшов доказали, что тройная суперпозиция абсолютно непрерывных функций не дает ничего нового по сравнению с двойной суперпозицией абсолютно непрерывных функций. Кроме того, Бари доказала важную теорему о том, что всякая непрерывная функция  $F(x)$  может быть представлена в виде

$$F(x) = \sum_{i=1}^3 f_i(\varphi_i(x)),$$

где  $f_i(y)$ ,  $\varphi_i(x)$  — абсолютно непрерывные функции. При этом существуют непрерывные функции, которые нельзя представить в виде суммы двух суперпозиций абсолютно непрерывных функций. В случае же суперпозиций функций с ограниченным изменением, как показала Бари, картина совсем иная. Например, если обозначить через  $F_n$  ( $n \geq 1$ )

<sup>2</sup> Более детально результаты изучения свойств измеримых функций и дифференцируемых отображений изложены в монографиях А. Г. Витушкина — «О многомерных вариациях» (1955 г.), Н. Н. Лузина — «Интеграл и тригонометрический ряд» (1951 г.), И. И. Привалова — «Граничные свойства аналитических функций» (1950 г.), Г. П. Толстова — «О криволинейном и повторном интеграле» (1950 г.).

множество всех функций, представимых в виде  $n$  последовательных суперпозиций функций с ограниченным изменением, то при любом  $n$  множество  $F_n$  строго меньше множества  $F_{n+1}$ .

Существенные результаты, относящиеся к суперпозициям функций нескольких переменных, получены А. Г. Витушкиным. Так, он доказал, что если даны натуральные числа  $n, p, m, q$  с  $\frac{n}{p} > \frac{m}{q}$ , то существует функция  $n$  переменных, которая имеет  $p$  непрерывных производных и которая не представима в виде суперпозиции функций  $m$  переменных, имеющих  $q$  непрерывных производных.

Далее, Колмогоров доказал теорему: всякая непрерывная функция  $n$  переменных с  $n \geq 4$  есть конечная сумма суперпозиций непрерывных функций трех переменных. Усложнив конструкцию рассуждений Колмогорова, его ученик В. И. Арнольд показал, что всякая непрерывная функция трех переменных представима в виде конечной суммы суперпозиций непрерывных функций двух переменных.

Самый же сильный результат классического характера установлен Колмогоровым в 1957 г. Именно им доказано, что для любого целого  $n \geq 2$  существуют непрерывные на  $[0, 1]$  действительные функции  $\psi^{pq}(x)$  такие, что каждая непрерывная в единичном кубе действительная функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  представима в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \chi_j \left[ \sum_{p=1}^n \psi^{jp}(x_p) \right],$$

где функции  $\chi_j(y)$  действительны и непрерывны. Таким образом, всякая непрерывная функция нескольких переменных является конечной суммой суперпозиций непрерывных функций одной переменной. Для доказательства этого утверждения Колмогоров нашел совершенно новый и достаточно простой путь, отличающийся от пути, найденного им первоначально для функций  $n$  переменных с  $n \geq 4$ .

Исследования по суперпозициям функций способствовали дальнейшему активному изучению  $\varepsilon$ -энтропии и  $n$ -поперечников множеств (А. Н. Колмогоров, А. Г. Витушкин, К. И. Бабенко, В. Д. Ерохин, В. М. Тихомиров, Н. С. Бахвалов, Н. П. Корнейчук и др.)<sup>3</sup>. В этом направлении еще много предстоит сделать.



А. Г. Витушкин.

<sup>3</sup> Результаты советских математиков по суперпозициям функций,  $\varepsilon$ -энтропии и  $n$ -поперечникам множеств освещены в упоминавшейся выше монографии А. Г. Ви-



## Интегрирование

Проблеме интегрирования посвящен ряд работ Н. Н. Лузина, А. Я. Хинчина, П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова, В. И. Гливенко, Г. П. Толстова, П. И. Романовского, В. Г. Челидзе, А. Г. Джваршейшвили, И. А. Виноградовой, В. А. Скворцова, И. Л. Бонди и других советских математиков.

Сначала отметим результат А. Н. Колмогорова, который установил, что естественное определение интеграла без аксиомы Цермело от любой измеримой функции влечет за собой возможность построения множества, неизмеримого по Лебегу, также без аксиомы Цермело. Вопросам общей теории построения интегралов посвящено несколько важных работ А. Н. Колмогорова и В. И. Гливенко. Они указали и исследовали некоторые общие схемы конструктивного определения интегралов. Найденные ими схемы таковы, что включают определение интегралов Лебега, Лебега — Стильеса и др. Кроме того, эти конструктивные определения дают возможность вычислять длины кривых, площади поверхностей и т. п.

К вопросам теории интегрирования примыкают исследования по аддитивным функциям множеств. В Советском Союзе этому направлению посвящены работы В. И. Гливенко, Г. М. Фихтенгольца, В. М. Дубровского, Л. Д. Кудрявцева, Ш. С. Пхакадзе, Г. Я. Арешкина, М. Н. Бобынина и др. Вопросам квадратуемости поверхностей посвящены некоторые исследования И. Я. Верченко, М. А. Зарецкого и др.

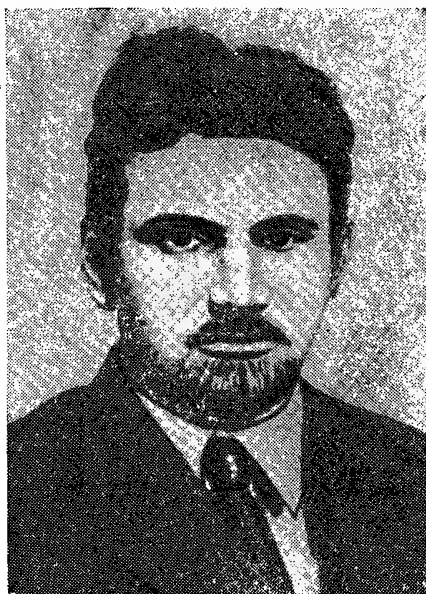
А. Я. Хинчин ввел новый процесс интегрирования, впоследствии получивший название интеграла Данжуа — Хинчина ( $D$ -интеграл). Исследования, относящиеся в той или иной мере к теории интегралов Данжуа ( $D_*$ -интеграл) и Данжуа — Хинчина, продолжаются и в настоящее время. В теории интегрирования важным является результат П. С. Александрова, который установил, что  $D_*$ -интеграл (узкий интеграл Данжуа) эквивалентен интегралу Перрона. Г. П. Толстов обобщил интеграл Перрона и доказал, что найденный им новый интеграл эквивалентен  $D$ -интегралу. Таким образом им показано, что интегрирование Перрона может быть естественно обобщено до  $D$ -интегрирования. П. И. Романовский дал определение интеграла Данжуа — Хинчина без привлечения трансфинитных чисел. Ф. И. Шмидов доказал, что функция  $f(x)$  является  $D$ -интегрируемой на  $[0, 1]$ , если она в каждой точке равна одному из четырех асимптотических производных чисел от непрерывной функции  $F(x)$ .

---

тушкина, а также в работах А. Н. Колмогорова и В. М. Тихомирова — « $\epsilon$ -энтропия и  $\epsilon$ -емкость множеств в функциональных пространствах» (1959 г.) и В. М. Тихомирова — «Работы А. Н. Колмогорова по  $\epsilon$ -энтропии функциональных классов и суперпозициям функций» (1963 г.)

В последнее время по теории  $D$ -интегралов опубликованы работы А. Г. Джваршейшвили, В. А. Скворцова, И. А. Виноградовой и др. Так, А. Г. Джваршейшвили нашел достаточно широкие условия, обеспечивающие предельный переход под знаком интегралов  $D$  и  $D_*$ . Он же нашел общий вид линейного функционала в пространстве  $D_*$ -интегрируемых функций.

Несколько работ П. И. Романовского посвящено обобщениям  $D_*$ -интеграла на случай многомерных и абстрактных пространств. В. Г. Челидзе предложил вариант дескриптивного определения двумерного широкого интеграла Данжуа и провел большое исследование в этом направлении. Г. П. Толстов рассмотрел двумерные интегралы Данжуа в узком смысле. Некоторые свойства двумерных интегралов Данжуа найдены А. Г. Джваршейшвили.



В. И. Гливенко.

А. Н. Колмогоров в вероятностной форме дал определение  $A$ -интеграла. Этому интегралу и его применениям посвящены некоторые исследования Ю. С. Очана, П. Л. Ульянова, И. А. Виноградовой, И. Л. Бонди, Г. А. Хускивадзе, О. Д. Церетели и др. Так, с помощью  $A$ -интеграла Ульянов установил, что всякий  $L$ -интеграл типа Коши по достаточно гладкой замкнутой кривой является  $A$ -интегралом Коши. Хускивадзе показал, что последний результат теряет силу в случае произвольных замкнутых спрямляемых кривых. Ряд патологических свойств  $A$ -интеграла был найден Виноградовой, Бонди, Церетели. С другой стороны, ими же предложены различные варианты сужения определения  $A$ -интеграла, которые помогают избежать некоторых патологических свойств и вместе с тем сохраняют основные преимущества  $A$ -интеграла, необходимые для его применения при изучении свойств сопряженных функций, сопряженных тригонометрических рядов и т. п.

Вопросам взаимоотношений различных интегралов посвящены некоторые статьи Н. Н. Лузина, Д. Е. Меньшова, И. А. Виноградовой, В. А. Скворцова и др. Так, Виноградова установила, что  $A$ -интеграл противоречит  $D_*$ -интегралу. Она нашла необходимые и достаточные условия, когда  $A$ -интеграл не противоречит  $D$ -интегралу или  $D_*$ -интегралу. Скворцов отметил, что тотализация Данжуа  $T_2$  является более общим процессом интегрирования, чем  $D_*$ -интегрирование. Он же установил, что интеграл  $T^2$ ,  $CP$ -интеграл Беркиля и  $P^2$ -интеграл Джеймса не покрывают  $D$ -интеграла и вместе с тем  $CP$ -интеграл не противоречит, а  $T_2$  и  $P_2$ -интегралы противоречат  $D$ -интегралу. Им же показано, что точная конечная асимптотическая производная

Шварца не обязательно должна быть  $(T_2)$ -тотализуемой, хотя она всегда интегрируема в смысле некоторого обобщенного  $R^2$ -интеграла.

В настоящее время исследования по теории интегрирования ведутся менее интенсивно, чем раньше<sup>4</sup>.

### 3

#### Тригонометрические ряды

Теория тригонометрических рядов явилась той областью теории функций, при исследованиях в которой очень часто выковывались методы метрической теории функций; с другой стороны, сила найденных методов в метрической теории функций зачастую испытывалась на решении тех или иных проблем теории тригонометрических рядов.

Исключительное влияние на развитие всей метрической теории функций в СССР, и в частности теории тригонометрических рядов, оказала знаменитая монография Н. Н. Лузина: «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915 г.). Эта монография стала настольной книгой всех исследователей метрической теории функций. Именно она явилась источником многочисленных проблем, решение которых далеко не завершено и в настоящее время. В 1951 г. вышло новое издание монографии Лузина с примыкающими к этой работе добавлениями (Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова), в которых учтены результаты исследований по теории тригонометрических рядов до 1950 г.

Основное внимание в теории тригонометрических рядов уделялось следующим вопросам: сходимости, расходимости, абсолютной сходимости, коэффициентам рядов, сопряженным функциям, сопряженным рядам, проблеме единственности, проблеме представления, суммируемости.

Еще в 1911 г. Н. Н. Лузин построил тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

расходящийся почти всюду<sup>5</sup> на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Следующий принципиальный шаг был сделан А. Н. Колмогоровым, который построил пример всюду расходящегося тригонометрического ряда Фурье — Лебега (1926 г.). Этот последний результат обобщался Л. В. Тайковым, В. И. Прохоренко и др.

<sup>4</sup> По затронутой в этом параграфе тематике см. работы В. И. Гливенко — «Интеграл Стильтеса» (1936 г.), П. Л. Ульянова — «Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов» (1964 г.), а также упоминавшиеся выше монографии Н. Н. Лузина и Г. П. Толстова.

<sup>5</sup> В 1957 г. С. Б. Стечкин показал, что ряд Лузина расходится всюду на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

Что касается сходимости почти всюду рядов Фурье класса  $L_2$ , то до последнего времени наиболее сильным утверждением здесь был результат А. Н. Колмогорова и Г. А. Селиверстова, которые доказали сходимость почти всюду ряда (1), если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \lg n < \infty \quad (2)$$

(этот результат был также получен в Германии А. И. Плеснером). Совсем недавно этот результат был существенно усилен шведским математиком Л. Карлесоном, который доказал сходимость почти всюду ряда (1), как только  $\{V a_n^2 + b_n^2\} \in l_2$ , и тем самым решил известную проблему Лузина. Таким образом, в условии (2) множитель  $\lg n$  может быть опущен.

Расходимость общих тригонометрических рядов изучена лучше. Так, С. Б. Стечкиным установлена (1957 г.) теорема, гарантирующая существование всюду расходящихся тригонометрических рядов, коэффициенты которых достаточно быстро стремятся к нулю. Точнее, какова бы ни была последовательность  $\rho_n \downarrow 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2 = \infty,$$

существует всюду расходящийся тригонометрический ряд вида (1), коэффициенты которого удовлетворяют неравенствам

$$|a_n| + |b_n| < \rho_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Несколько результатов, относящихся к структуре множеств точек сходимости и расходимости тригонометрических рядов, получено С. Б. Стечкиным и Л. В. Тайковым<sup>6</sup>. Так, Тайков показал, что для любого множества  $E \subset [0, 2\pi)$  типа  $F_\sigma$  существует пара сопряженных рядов Фурье, сходящихся на  $E$  и неограниченно расходящихся в каждой точке  $x \in [0, 2\pi) - E$ .

Перейдем к вопросу об абсолютной сходимости рядов вида (1). Н. Н. Лузин доказал, что если ряд (1) абсолютно сходится в каждой точке некоторого множества положительной меры, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty \quad (3)$$

<sup>6</sup> В связи с изложенным см. монографии Н. Н. Лузина — «Интеграл и тригонометрический ряд» (1951 г.), Н. К. Бари — «Тригонометрические ряды» (1961 г.) и обзорные статьи Н. К. Бари — «Тригонометрические ряды» (1958 г.) и П. Л. Ульянова — «О расходимости рядов Фурье» (1957 г.).



Д. Е. Меньшов.



Н. К. Бари.

(этот результат независимо от Лузина получил также А. Данжуа). Далее, Н. Н. Лузиным, В. В. Немыцким, С. Б. Стечкиным и другими были найдены некоторые достаточные условия, при которых на основании поведения ряда (1) (сходимость, абсолютная сходимость и т. п.) на том или ином множестве  $E$  (вообще говоря, меры ноль) можно делать заключение о выполнении неравенства (3). С. Н. Бернштейн установил, что неравенство (3) справедливо, если ряд (1) является рядом Фурье от  $2\pi$ -периодической функции  $f(x) \in \text{Lip } \alpha$  с некоторым  $\alpha > \frac{1}{2}$ , причем это утверждение теряет силу, если  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

В дальнейшем наиболее полные результаты, относящиеся к абсолютной сходимости тригонометрических рядов и лакунарных тригонометрических рядов, были получены С. Б. Стечкиным. Например, им установлено, что если ряд (1) является рядом Фурье от некоторой функции  $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$  с

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\sqrt{n}} < \infty \quad \left( E_n = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2}, \quad \rho_k^2 = a_k^2 + b_k^2 \right), \quad (4)$$

то справедливо неравенство (3). Обратно: если  $\rho_k \downarrow 0$  и выполнено неравенство (3), то справедливо неравенство (4). Пусть возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{n_k\}$  удовлетворяет требованию: если коэффициенты Фурье  $a_n(f)$ ,  $b_n(f)$  непрерывной функции  $f(x)$  таковы, что  $a_n(f) = b_n(f) = 0$  при всех  $n \neq n_k$  ( $k \geq 1$ ), то ряд Фурье от  $f(x)$  сходится абсолютно на всей прямой. Стечкин доказал, что в этом случае последовательность  $\{n_k\}$  необходимо удовлетворяет следующему условию: существуют постоянные  $C > 0$  и  $\gamma > 1$ , такие, что

$$n_k \geq C\gamma^k \quad (k \geq 1).$$

Некоторые результаты, относящиеся к абсолютной сходимости (а также к поведению в окрестности нуля) тригонометрических рядов с положительными или монотонно убывающими коэффициентами, получили С. Б. Стечкин, А. И. Шмуклер и др.

К вопросу об абсолютной сходимости тригонометрических рядов тесно примыкают исследования, относящиеся к абсолютному суммированию рядов вида (1). В этом направлении некоторые результаты получили М. Ф. Тиман, Л. В. Гречакевская, Ю. А. Пономаренко, П. Л. Ульянов и др.

Так, Ульянов установил, что не существует точного множителя Вейля для  $|C, 1|$ -суммируемости почти всюду рядов вида (1). Греч-

пачевская доказала, что если

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{E_n}{n \sqrt{\lg n}} < \infty, \quad (5)$$

то ряд (1) почти всюду на отрезке  $[0, 2\pi]$  является  $|C, 1|$ -суммируемым. Она же установила, что в последнем утверждении условие (5) в некотором смысле не ослабляемо<sup>7</sup>.

Сопряженные функции и сопряженные тригонометрические ряды изучались Н. Н. Лузиным, И. И. Приваловым, А. Н. Колмогоровым, В. И. Смирновым, А. И. Плеснером, Н. К. Бари, П. Л. Ульяновым и др.

Напомним, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx - b_n \cos nx$$

называют сопряженным к ряду (1). Лузин и Привалов доказали (соответственно для классов функций  $L^2(0, 2\pi)$  и  $L(0, 2\pi)$ ) существование сопряженной функции  $\bar{f}$  в виде особого интеграла

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt = -\bar{f}(x), \quad (6)$$

т. е. особый интеграл в выражении (6) существует почти для всех  $x \in [0, 2\pi]$  (если  $f \in L^2$  или  $f \in L$ ) и потому сопряженная функция  $\bar{f}(x)$  имеет смысл почти для всех  $x \in [0, 2\pi]$ .

С одной стороны, функция  $\bar{f}(x)$  тесно связана с сопряженным рядом к ряду Фурье от функции  $f \in L$ , с другой — существование почти всюду особого интеграла вида (6) для суммируемых функций (т. е. существование функции  $\bar{f}(x)$ ) является само по себе тонким фактом из метрической теории функций.

Некоторые работы Н. Н. Лузина, И. И. Привалова, А. И. Плеснера, Г. П. Толстова, В. А. Ходакова, П. Л. Ульянова, А. И. Шмуклера и других посвящены изучению свойств тех или иных особых интегралов, а также из связи с различными вопросами теории функций.

Если обозначить:  $u(r, x)$  — интеграл Пуассона от функции  $f(t) \in L(0, 2\pi)$ ,  $\vartheta(r, x)$  — гармонически сопряженная функция к  $u(r, x)$  с  $\vartheta(0, x) = 0$ , то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \{u(r, x) + i\vartheta(r, x)\} = f(x) + i\bar{f}(x)$$

<sup>7</sup> В связи с изложенным см. упомянутые выше монографию Н. К. Бари (1961 г.), а также обзорные статьи Н. К. Бари (1958 г.) и П. Л. Ульянова (1964 г.).



С. Б. Стечкин.

почти для всех  $x \in [0, 2\pi]$ . Это утверждение указывает на связь рассматриваемых вопросов с граничными свойствами аналитических и гармонических функций внутри единичного круга.

Известно, что если  $2\pi$ -периодическая функция интегрируема по Риману или даже непрерывна, то функция  $\bar{f}(x)$  не всегда должна быть интегрируемой по Риману, она может быть даже существенно неограниченной функцией на любом интервале  $(a, b)$  с  $a < b$ . То же самое верно и для интегралов Лебега, т. е. из  $f(x) \in L(0, 2\pi)$  не вытекает, что  $\bar{f}(x) \in L(0, 2\pi)$ ; возможен даже случай, когда  $\bar{f}(x) \notin L(a, b)$  при любых  $a < b$ . Это свидетельствует о том, что свойства функций  $f(x)$  и  $\bar{f}(x)$  не равноправны, если исходить из интегралов Римана и Лебега.

До сих пор не найдено достаточно хорошее конструктивное определение интеграла (более широкое, чем интеграл Лебега), с точки зрения которого свойства функций  $f(x)$  и  $\bar{f}(x)$  были бы неразличимыми. Положительное решение такого вопроса дало бы, в частности, возможность попытаться найти такое интегрирование, для которого всякий интеграл типа Коши являлся бы интегралом Коши. Выше упоминался такой результат: всякий  $L$ -интеграл типа Коши является  $A$ -интегралом Коши (здесь речь идет об интегралах типа Коши, взятых по единичной окружности или, во всяком случае, по достаточно гладкой замкнутой кривой). Сформулируем еще некоторые результаты, относящиеся к рассматриваемому кругу вопросов.

И. И. Привалов установил, что  $\bar{f}(x) \in \text{Lip } \alpha$ , если только  $f(x) \in \text{Lip } \alpha$  с  $0 < \alpha < 1$  (для  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$  утверждение теряет силу). Этот результат обобщен Н. К. Бари на классы функций, имеющих наперед заданную мажоранту для модулей непрерывности. А. Н. Колмогоров доказал интегрируемость функции  $|\bar{f}(x)|^p$ , где  $0 < p < 1$ , для  $f(x) \in L(0, 2\pi)$ , а также, что сопряженный ряд к ряду Фурье — Лебега является рядом Фурье в смысле интеграла  $B$  (интеграла Данжуа — Бокса). В. И. Смирнов показал, что если  $f(x) \in L(0, 2\pi)$  и  $\bar{f}(x) \in L(0, 2\pi)$ , то ряд Фурье от функции  $\bar{f}(x)$  совпадает с сопряженным рядом к ряду Фурье от функции  $f(x)$ . Для общих сопряженных рядов А. И. Плеснер установил следующую теорему: если ряд (1) сходится на некотором множестве  $E$ , то его сопряженный ряд сходится почти всюду на  $E$ . Этот фундаментальный результат в теории сопряженных тригонометрических рядов был также получен польскими математиками Марцинкевичем и Зигмундом. Он остается также верным, если сходимостъ заменить на чезаровскую суммируемость  $(C, \alpha)$  с  $\alpha > 0$ . П. Л. Ульянов доказал, что всякий тригонометрический ряд с монотонными коэффициентами, стремящимися к нулю, является, вместе с сопряженным рядом, рядом Фурье в смысле  $A$ -интегрирования от его суммы<sup>8</sup>.

Советским математикам принадлежит неоспоримый приоритет в разработке проблемы единственности тригонометрических рядов.

<sup>8</sup> О сопряженных функциях и сопряженных тригонометрических рядах см. монографии Н. К. Бари — «Тригонометрические ряды» (1961 г.), Н. Н. Лузича — «Интеграл и тригонометрический ряд» (1951 г.) и И. И. Привалова — «Графические свойства аналитических функций» (1950 г.).

Так, Д. Е. Меньшовым был впервые построен принципиально важный и неожиданный пример тригонометрического ряда, почти всюду сходящегося к нулю, хотя не все его коэффициенты равны нулю. Такие ряды называют нуль-рядами. Пример Меньшова направил исследования по проблеме единственности по совершенно новому руслу.

Напомним, что множество  $E \subset [0, 2\pi]$  называется множеством единственности для тригонометрических рядов, если из сходимости ряда вида (1) к нулю при всех  $x \in [0, 2\pi] - E$  вытекают равенства  $a_n = b_n = 0$  при всех  $n \geq 1$ . Такие множества принято называть  $U$ -множествами. Глубокие результаты по проблеме единственности получила Н. К. Бари. Она построила совершенные  $U$ -множества<sup>9</sup> и обнаружила, что решение проблемы единственности тригонометрических рядов не может быть получено на основе изучения одной геометрической структуры множеств — для этого требуется привлечение арифметических свойств множеств. Бари также доказала, что счетная сумма замкнутых  $U$ -множеств является снова  $U$ -множеством. Проблема, является ли сумма двух (не обязательно замкнутых) измеримых  $U$ -множеств снова  $U$ -множеством, до сих пор не решена.

Вопросам единственности тригонометрических рядов, построения нуль-рядов и их аналогов посвящены статьи О. С. Ивашова-Мусатова, В. Я. Козлова, И. И. Шапиро-Пятецкого, А. А. Талалаяна и др. Козлов построил пример тригонометрического ряда вида (1)  $\left( c \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \infty \right)$ , у которого некоторая подпоследовательность частных сумм сходится к нулю всюду на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Шапиро-Пятецкий дал отрицательный ответ на одну старую гипотезу Райхмана. Относительно поведения коэффициентов тригонометрических нуль-рядов наиболее общий (в настоящее время) результат получен Ивашовым-Мусатовым. Он доказал, что если  $\rho_n$  стремится к нулю достаточно гладко и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2 = \infty \quad (\rho_n > 0), \quad (7)$$

то существует нуль-ряд вида (1), коэффициенты которого удовлетворяют неравенствам

$$|a_n| + |b_n| \leq \rho_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

<sup>9</sup> Независимо от Бари это было сделано также польским математиком Райхманом с помощью другого метода.



П. Л. Ульянов.



Однако до сих пор не доказана общая теорема о коэффициентах тригонометрических нуль-рядов: если  $\rho_n \downarrow 0$  и выполнено условие (7), то существует ли нуль-ряд вида (1), коэффициенты которого удовлетворяют неравенствам (8); другими словами, остается ли справедливой теорема Ивашова-Мусатова, если в ней отбросить требование на гладкость убывания  $\rho_n$ . Талалян установил существование таких нуль-рядов, что нижняя плотность множества тех номеров, для которых коэффициенты ряда отличны от нуля, равна нулю. Отметим, что еще далека от полного решения проблема классификации множеств единственности тригонометрических рядов, если она вообще допускает полное решение<sup>10</sup>.

По проблеме представления функций тригонометрическими рядами после диссертации Н. Н. Лузина<sup>11</sup> первый крупный результат получил Д. Е. Меньшов (1940 г.). Он установил, что всякую  $2\pi$ -периодическую конечную и измеримую функцию  $f(x)$  можно представить тригонометрическим рядом, сходящимся к  $f(x)$  почти всюду. Тем самым проблема представления конечных и измеримых функций тригонометрическими рядами была полностью решена. Теорема Меньшова является глубоким результатом, так как даже для случая непрерывных функций  $f(x)$  или функций  $f(x) \in L(0, 2\pi)$  этот вопрос ранее не был решен. Уместно напомнить, что ряды Фурье от функций  $f(x) \in L(0, 2\pi)$  могут оказаться всюду расходящимися (пример А. Н. Колмогорова).

Тем не менее общая проблема представления измеримых (не обязательно конечных) функций, поставленная Лузиным, до сих пор так и не решена. В частности, не известно, существует ли тригонометрический ряд, который сходится к  $+\infty$  на некотором множестве положительной меры (ряды Фурье — Лебега таковыми быть не могут). Однако проблема представления произвольных измеримых функций тригонометрическими рядами, сходящимися по мере, полностью и положительно решена Д. Е. Меньшовым. Меньшов доказал также следующую важную теорему: всякую конечную и измеримую на отрезке  $[0, 2\pi]$  функцию  $f(x)$  можно изменить на некотором множестве сколь угодно малой меры так, чтобы у измененной функции ряд Фурье был равномерно сходящимся на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

Решение вопроса о представлении измеримых функций  $f(x)$  тригонометрическими рядами, которые суммируемы почти всюду к  $f(x)$ , существенно зависит от выбранного метода суммирования. Так, Н. Н. Лузин и И. И. Привалов установили, что существует тригонометрический ряд, который почти всюду суммируем методом Абеля к  $+\infty$ . С другой стороны, Ю. Б. Гермейер доказал, что не существует тригонометрического ряда, который суммировался бы методом Римана к бесконечности на некотором множестве положительной меры. Последние

<sup>10</sup> В связи с изложенным см. цитированные выше работы Н. К. Бари, а также ее обзорную статью «Проблема единственности разложения функции в тригонометрический ряд» (1949 г.).

<sup>11</sup> Проблема представления произвольных измеримых функций тригонометрическими рядами впервые поставлена Лузиным в его диссертации (1915 г.).

утверждения показывают, что с точки зрения возможности представления измеримых функций суммируемыми тригонометрическими рядами метод Абеля существенно отличен от метода Римана.

В. Я. Козлов построил пример ряда вида (1), некоторая подпоследовательность частных сумм которого сходится к  $+\infty$  в каждой точке  $x \in (-\infty, \infty)$ . С другой стороны, П. Л. Ульяновым отмечено, что не существует тригонометрического ряда вида (1), который в каждой точке некоторого интервала  $(a, b)$  ( $a < b$ ) сходил бы к  $+\infty$  или к  $-\infty$  (в зависимости от точки).

А. А. Талаляном получены результаты, усиливающие и дополняющие соответствующие утверждения Д. Е. Меньшова. Он доказал, что:

а) существует такой ряд вида (1), что для всякой измеримой и конечной почти всюду на отрезке  $[0, 2\pi]$  функции  $f(x)$  можно найти такие  $n_k$  ( $0 \leq n_1 < n_2 < \dots$ ), что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x$$

почти всюду на отрезке  $[0, 2\pi]$  сходится к  $f(x)$ ;

б) существует такая перестановка тригонометрической системы функций  $\{\cos p_n x, \sin p_n x\}$ , что эта система не является системой сходимости почти всюду, но всякую функцию  $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$  можно изменить на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы у новой функции  $\psi(x) \in L^2(0, 2\pi)$  ряд Фурье по этой системе был почти всюду сходящимся<sup>12</sup>.

Рассмотрим вопрос суммируемости тригонометрических рядов. Этому разделу посвящены работы С. Н. Бернштейна, С. М. Никольского, С. М. Лозинского, И. П. Натансона, Е. В. Вороновской, С. Б. Стечкина, Ф. И. Харшиладзе, А. Ф. Тимана, А. В. Ефимова, С. А. Теляковского, М. Ф. Тимана, Г. А. Фомина и многих других. Первые общие результаты принадлежат С. М. Лозинскому и С. М. Никольскому.

Из общих результатов сформулируем одно утверждение Лозинского. Пусть  $\{\mu_k^{(n)}\}$  — треугольная матрица, которая каждому ряду Фурье (от функции  $f(x)$ ) вида (1) сопоставляет последовательность

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^n \mu_k^{(n)} s_k(x),$$

<sup>12</sup> В связи с изложенным выше см. монографию Д. Е. Меньшова «О сходимости по мере тригонометрических рядов» (1950 г.), а также упомянутые выше работы Н. К. Бари (1958 и 1961 гг.), Н. Н. Лузина (1951 г.), И. И. Привалова (1950 г.) и П. Л. Ульянова (1964 г.).



С. М. Лозинский.



И. П. Натансон.

где  $s_h(x)$  — частные суммы ряда (1). Лозинский называет метод суммирования, определяемый матрицей  $M = \{\mu_k^{(n)}\}$ , фейеровским методом, если для всякой функции  $f(x) \in C(0, 2\pi)$  последовательность  $\sigma_n(x)$  равномерно сходится к  $f(x)$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Он доказал, что эквивалентны следующие три утверждения, относящиеся к свойству матрицы  $M$ :

а) матрица  $M$  определяет фейеровский метод;

б) для всякой функции  $f(x) \in L(0, 2\pi)$  справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)| dx = 0;$$

в) матрица  $M$  удовлетворяет первым двум условиям Теплица (т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_k^{(n)} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \mu_k^{(n)} = 1) \text{ и}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^n \mu_k^{(n)} D_k(t) \right| dt = 0(1), \quad (9)$$

где  $D_k(t)$  — ядро Дирихле. Лозинский же построил пример фейеровского метода, не являющегося методом суммирования Теплица.

Аналогичного типа общее утверждение, относящееся к треугольным матрицам  $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$ , применяемым не к частным суммам рядов, а непосредственно к членам рядов (1), получено С. М. Никольским. Условия типа (9) мало наглядны, и их проверка, как правило, весьма затруднительна. Никольский впервые поставил вопрос о нахождении для матриц  $\Lambda$  достаточных условий, выраженных непосредственно через  $\{\lambda_k^{(n)}\}$  и гарантирующих, что матрица  $\Lambda$  определяет фейеровский метод. Им же получен простой и очень изящный результат: если матрица  $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$  такова, что при всяком  $n$  она выпукла или вогнута по  $k$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^{(n)} = 1$ , то матрица  $\Lambda$  определяет фейеровский метод в том и только в том случае, когда

$$\lambda_k^{(n)} = 0(1) \text{ и } \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^{(n)}}{n+1-k} = 0(1).$$

Впоследствии этот результат обобщался многими математиками.

За последнее десятилетие в этом направлении наиболее сильные результаты получены А. В. Ефимовым и С. А. Теляковским. Так, Теляковским найдены общие достаточные условия на матрицу  $\Lambda$ , облада-

ющие свойством устойчивости (ранее известные условия этим свойством не обладали) и гарантирующие, что матрица  $\Lambda$  определяет Фейеровский метод.

Остановимся на другом важном направлении, относящемся к теории суммирования рядов Фурье. Пусть  $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$ , ряд (1) есть ряд Фурье от функции  $f(x) \in L(0, 2\pi)$  и задан какой-либо класс функций  $M$ . Положим

$$\tau_n(x, f) = \frac{a_0}{2} \lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Требуется изучить асимптотическое поведение величин

$$\sup_{f \in M} \|f - \tau_n\| \quad (n \rightarrow \infty).$$

Широкое и систематическое исследование этой задачи было предпринято С. М. Никольским. Ранее эта задача была рассмотрена лишь в немногих случаях А. Н. Колмогоровым, Ж. Фаваром и др. Работы Никольского стимулировали многочисленные исследования других математиков.

Никольский показал, например, что если  $\sigma_n(x, f)$  суть средние арифметические ряда Фурье вида (1) от  $2\pi$ -периодических функций  $f(x)$ , удовлетворяющих условию

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha \quad (0 < \alpha < 1),$$

то

$$I_n \equiv \sup_f \|f(x) - \sigma_n(x, f)\|_C = \frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi(1-\alpha)} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Порядок величин  $I_n$  при  $n \rightarrow \infty$  был найден С. Н. Бернштейном давно. Впоследствии П. Л. Ульянов установил, что этот же порядок сохраняется и для приближения чезаровскими средними  $(C, \beta)$  с любым  $\beta > 0$ .

А. В. Ефимов показал, что

$$\sup_{f \in H_2^{(1)}} \|\bar{f}(x) - \sigma_n(x, f)\|_C = \frac{1}{2 \ln(\sqrt{2} + 1)} \cdot \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

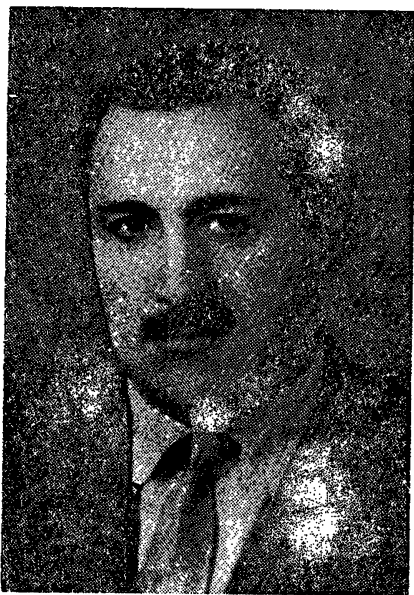
где  $\bar{f}(x)$  — сопряженная функция к  $f(x)$ , а  $H_2^{(1)}$  — класс  $2\pi$ -периодических функций, удовлетворяющих условию

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq |h|.$$

С. Б. Стечкин установил, что для функций  $f(x) \in C(0, 2\pi)$  справедлива оценка

$$\|f(x) - \sigma_n(x, f)\|_C \leq \frac{B}{n+1} \sum_{v=0}^n E_v(f),$$

где  $B$  — некоторая абсолютная постоянная, а  $E_v(f)$  — наилучшее приближение функции  $f$  в метрике  $C$  посредством тригонометрических поли-



А. Г. Джваршейшвили.

номов порядка не выше  $\nu$ . Впоследствии в этом направлении некоторые утверждения были получены М. Ф. Тиманом, П. Л. Ульяновым, А. С. Джафаровым и др.<sup>13</sup>

К теории суммирования тригонометрических рядов Фурье примыкают основополагающие результаты Д. К. Фаддеева, П. И. Романовского, С. М. Лозинского, И. П. Натансона, П. П. Коровкина, А. Г. Джваршейшвили, Р. Г. Мамедова и других по теории представления функций при помощи сингулярных интегралов.

Так, Романовский нашел два достаточно общих условия, гарантирующих сходимость к представляемой функции  $f(x)$  сингулярных интегралов в точках Лебега и в точках  $x_0$ , где производная неопределенного интеграла от  $f(x)$  равна  $f(x_0)$ . Фаддеев

нашел необходимое и достаточное условие, налагаемое на ядро сингулярного интеграла для того, чтобы с помощью сингулярного интеграла всякая интегрируемая по Лебегу функция была представима в каждой точке Лебега. Натансон получил необходимое и достаточное условие представимости сингулярными интегралами всякой ограниченной измеримой функции в каждой ее точке асимптотической непрерывности. Им же установлено, что не существует сингулярных интегралов, для которых всякая интегрируемая функция была бы представима этими интегралами в каждой ее точке асимптотической непрерывности. Джваршейшвили рассматривал вопрос о представлении сингулярными интегралами  $D_*$ -интегрируемых функций.

В 1960 г. польский математик Загорский опубликовал краткую схему доказательства теоремы о существовании почти всюду расходящихся рядов Фурье класса  $L^2$  по переставленной тригонометрической системе. Впервые этот результат был сформулирован без доказательства А. Н. Колмогоровым в 1927 г. П. Л. Ульянов обобщил утверждение Колмогорова — Загорского на класс функций, принадлежащих всем пространствам  $L^p(0, 2\pi)$ , где  $1 \leq p < \infty$ . Этот результат в свою очередь был усилен А. М. Олевским на класс непрерывных функций, а Л. В. Тайковым — на пары сопряженных рядов. Именно Тайков доказал существование пары таких сопряженных функций  $f(x)$  и  $\bar{f}(x)$ , принадлежащих всем  $L^p(0, 2\pi)$ , где  $1 \leq p < \infty$ , что их тригонометрические

<sup>13</sup> В связи с изложенным см. работы С. М. Никольского — «Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами» (1945 г.), Труды математического института им. В. А. Стеклова. Сборник работ по линейным методам суммирования рядов Фурье (1961 г.), А. Ф. Тимана — «Теория приближений функций действительного переменного» (1960 г.), а также названную выше монографию Н. К. Бари (1961 г.).

ряды Фурье после некоторой перестановки членов (общей для обоих рядов) неограниченно расходятся всюду на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

Напомним, что функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in E) \quad (10)$$

называется безусловно сходящимся почти всюду на множестве  $E$ , если после любой перестановки членов он сходится почти всюду на  $E$  (множество точек расходимости меры нуль зависит, вообще говоря, от перестановки). Согласно этому определению из результата Колмогорова — Загорского непосредственно вытекает существование тригонометрических рядов класса  $L^2$ , которые не являются безусловно сходящимися почти всюду на отрезке  $[0, 2\pi]$ , т. е. условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < \infty$$

не гарантирует безусловной сходимости почти всюду ряда (1). Поэтому естественно возникает вопрос: какого минимального роста достаточно потребовать от положительной последовательности  $\{\omega(n)\}$ , чтобы неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \omega(n) < \infty \quad (11)$$

влекло за собой безусловную сходимость почти всюду ряда (1). Известно, что можно брать  $\omega(n) = \{\log(n+1)\}^{2+\varepsilon}$ , где  $\varepsilon > 0$  — любое фиксированное число. Но неизвестно, можно ли брать  $\omega(n) = \log^2(n+1)$ ,  $\omega(n) = \log(n+1)$  и т. п. Неизвестно даже, существует ли вообще такая минимальная последовательность  $\omega(n)$ , что неравенство (11) всегда влечет за собой безусловную сходимость почти всюду ряда (1), тогда как выполнение неравенства (11) с заменой  $\omega(n)$  на всякую последовательность  $\omega_1(n) = o\{\omega(n)\}$  уже не влечет, вообще говоря, безусловной сходимости почти всюду ряда (1). Наконец, для переставленной тригонометрической системы не имеют силы, вообще говоря, некоторые утверждения, которые справедливы для обычных тригонометрических рядов Фурье, например принцип локализации Римана, базисность в  $L^p$  (где  $1 < p < \infty$ ), теорема Фейера — Лебега о  $(C, 1)$ -суммируемости почти всюду и др. Эти факты установлены П. Л. Ульяновым. Им же найдены некоторые достаточные условия, выраженные через структурные свойства функций  $f$  и гарантирующие безусловную сходимость почти всюду тригонометрических рядов Фурье от функции  $f$  <sup>14</sup>.

Некоторые работы А. Г. Джваршейшвили, В. А. Скворцова, И. Л. Бонди, О. Д. Церетели и других посвящены изучению тригонометрических рядов Фурье — Данжуа (рядов Фурье (A) и т. п.). Мы

<sup>14</sup> В связи с изложенным см. упомянутые выше работы Н. К. Бари (1961 г.), П. Л. Ульянова (1964 г.), а также обзорную статью П. Л. Ульянова «Расходящиеся ряды Фурье» (1961 г.).

упомянем лишь результат Сковорцова, доказавшего существование тригонометрического ряда вида (1) с коэффициентами  $o(n)$ , который всюду на отрезке  $[0, 2\pi]$  суммируем методом Абеля к конечной  $D$ -интегрируемой функции  $f(x)$  и в то же время не является рядом Фурье — Данжуа от этой функции. Он же отметил, что такого типа утверждение уже не имеет силы для  $D_*$ -,  $p^2$ - и  $SCP$ -интегралов. Для случая интеграла Лебега этот факт установлен давно. Пока неизвестно, остается ли справедливым первое утверждение Сковорцова, если в нем суммируемость методом Абеля заменить обычной сходимостью.

Значительное число работ советских математиков посвящено теории кратных тригонометрических рядов (В. Г. Челидзе, Л. В. Жижиашвили, С. М. Лозинский, М. Ф. Тиман, Е. И. Жак, А. Г. Джваршейшвили, И. В. Матвеев и др.). В этом направлении исследования велись, в основном, по тем же путям, что и в теории обычных тригонометрических рядов. Рассматривались вопросы сходимости и суммируемости, абсолютной сходимости и суммируемости, сопряженные функции и сопряженные ряды, представление функций сингулярными интегралами, рядами и т. п. Широкое исследование свойств двойных рядов предпринял впервые в нашей стране В. Г. Челидзе. Не останавливаясь подробно на многочисленных результатах в этом направлении, мы отметим лишь некоторые утверждения Л. В. Жижиашвили, которые, на наш взгляд, представляют несомненный интерес. Пусть  $R_n$  —  $n$ -мерный квадрат  $R_n = [-\pi, \pi]^n$  и измеримая функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  такова, что

$$|f|(\log^+ |f|)^n \in L(R_n). \quad (12)$$

Тогда сопряженная по всем переменным функция  $\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  существует и

$$\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L(R_n),$$

причем утверждение теряет силу, если в выражении (12) степень  $n$  заменить меньшим числом. Жижиашвили же показал, что известные в теории одинарных тригонометрических сопряженных рядов Фурье теоремы Плеснера, Зигмунда и Марцинкевича теряют силу для кратных рядов. Именно существует функция двух переменных  $f(x, y) \in L(\log L)^\gamma$ , при всех  $\gamma \in [0, 1)$  тригонометрический ряд Фурье которой

$$\sum_{m,n} \lambda_{m,n} A_{m,n}(x, y) \quad (13)$$

почти всюду  $\lambda$ -суммируем методом  $(C, 1, 1)$ , а сопряженные (по  $x$ , по  $y$  и по  $(x, y)$ ) ряды к ряду (13) не являются почти всюду  $\lambda$ -суммируемыми методом  $(C, 1, 1)$ .

Нами не изложены отдельные разделы теории тригонометрических рядов, которым посвящено весьма много исследований советских математиков. Например:

теория универсальных рядов — в этом направлении имеются глубокие исследования Д. Е. Меньшова, В. Я. Козлова и др.;

коэффициенты тригонометрических рядов (рядов Фурье, степенных рядов и т. п.) от тех или иных классов функций — работы С. Б. Стечкина, В. П. Хавина, Ф. И. Харшиладзе, А. В. Ефимова, А. М. Олевского, А. А. Конюшкова, М. К. Потапова, А. С. Махмудова, В. М. Кокшашвили, А. И. Рубинштейна и др.;

вопросы сходимости рядов — результаты Н. К. Бари, С. Б. Стечкина, П. Л. Ульянова, А. С. Джафарова, Б. Л. Голинского и др.;

свойства тригонометрических рядов Фурье от тех или иных специальных классов функций (например, исследования Ф. И. Харшиладзе о классе функций со вторым ограниченным изменением), преобразования (мультипликаторы) рядов Фурье и т. п.;

методы суммирования Рогозинского, введенные им в 1924 и 1925 гг., — результаты С. Н. Бернштейна, И. П. Натансона, Ф. И. Харшиладзе, А. Ф. Тимана, С. Б. Стечкина и др.

Этот перечень можно было бы продолжить, однако нам представляется, что изложенный материал охватывает все основные достижения советских математиков по теории тригонометрических рядов.

## 4

### Ортогональные ряды, системы и их обобщения

Теории ортогональных систем и рядов, а также их обобщений посвящены многочисленные работы советских математиков. В последние годы исследования в этом направлении особенно усилились. Тем не менее, на наш взгляд, по сравнению с теорией тригонометрических рядов, теория ортогональных рядов разработана слабее, в ней еще много нерешенных принципиальных проблем. В то же время многие первые крупные результаты в этом направлении получены именно советскими математиками. Основное внимание уделялось и уделяется следующим вопросам: ортогональным многочленам и рядам по ним, сходимости, суммируемости и безусловной сходимости общих ортогональных рядов, свойствам рядов по тем или иным конкретным системам, базисам, проблеме представления функций, свойствам коэффициентов ортогональных разложений.

Рассмотрим вначале теорию ортогональных многочленов. Хорошо известно, что основы ее заложены в трудах П. Л. Чебышева, который не только рассмотрел классические ортогональные многочлены (многочлены Якоби, Лагерра и Эрмита), но и установил целый ряд общих свойств многочленов, ортогональных с весом на отрезке действительной оси. Заслугой Чебышева является введение и изучение ортогональных многочленов, ставших классическими:

$$T_n(x) = \cos n \arccos x.$$

Их свойства явились исходным пунктом исследований во многих областях математики. Исследования Чебышева были продолжены А. А. Марковым, Н. Я. Сониным, К. А. Поссе и др.





Я. Л. Геронимус.

Развитию теории ортогональных многочленов в послеоктябрьский период посвящены работы В. А. Стеклова, С. Н. Бернштейна, А. Н. Колмогорова, Н. И. Ахиезера, Я. Л. Геронимуса, П. П. Коровкина, П. К. Суетина и др. Так, Стекловым установлены некоторые асимптотические свойства классических ортогональных многочленов и, что особенно важно, им впервые отчетливо сформулировано и изучено понятие замкнутости систем многочленов в тех или иных пространствах функций. Несколько работ Колмогорова, Натансона, Геронимуса и других относится к нахождению условий разложимости функций в ряды по ортогональным многочленам. Бернштейн, Геронимус, В. П. Коноплев и другие изучали вопрос асимптотического поведения ортогональных многочленов.

Обзор отечественных работ по ортогональным многочленам дан Я. Л. Геронимусом в его книгах «Теория ортогональных многочленов» (1950 г.) и «Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке» (1958 г.).

Основополагающие результаты по вопросу сходимости ортогональных рядов получены Д. Е. Меньшовым. Он доказал, что если

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \log^2 n < \infty, \quad (14)$$

то для всякой ортонормированной на отрезке  $[0, 1]$  системы  $\{\varphi_n(x)\}$  ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x) \quad (x \in [0, 1]) \quad (15)$$

сходится почти всюду на отрезке  $[0, 1]$  (этот результат был получен также за рубежом Радемахером). Кроме того, и это является более принципиальным и важным, Меньшов показал, что приведенное выше утверждение теряет силу, если в условии (14) заменить множитель  $\log^2 n$  на любую более медленно растущую функцию  $\omega(n) = o(\log^2 n)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Для удобства дальнейшего изложения материала приведем некоторые определения.

Пусть  $\{\varphi_n(x)\}$  — произвольная система функций, определенных на отрезке  $[0, 1]$ . Неубывающая неотрицательная последовательность  $\{\omega(n)\}$  называется множителем Вейля для сходимости почти всюду рядов (15), если из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \omega(n) < \infty$$

вытекает сходимость почти всюду на отрезке  $[0, 1]$  ряда (15). Если, кроме того,  $\{\omega(n)\}$  такова, что всякая неотрицательная последовательность

$\beta(n) = o\{\omega(n)\}$  уже не является множителем Вейля для сходимости почти всюду рядов (15), то  $\{\omega(n)\}$  называется точным множителем Вейля в широком смысле для сходимости почти всюду рядов по системе  $\{\varphi_n\}$ . Далее, если  $\{\omega(n)\}$  такова, что для всякой неотрицательной последовательности  $\beta(n) = o\{\omega(n)\}$  существует почти всюду расходящийся ряд вида (15), с суммой

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \beta(n) < \infty,$$

то  $\{\omega(n)\}$  называется точным множителем Вейля в узком смысле для сходимости почти всюду рядов по системе  $\{\varphi_n\}$  (в дальнейшем под выражением «точный множитель Вейля» подразумевается точный множитель Вейля в узком смысле).

Заменяя в приведенных выше определениях слово «сходимость» словами «суммируемость методом  $T$ », «безусловная сходимость» и т. п., получим определения множителей Вейля (точных в широком и узком смысле) для суммируемости методом  $T$ , безусловной сходимости и т. п.

Если система  $\{\varphi_n\}$  такова, что  $\omega(n) \equiv 1$  является множителем Вейля для сходимости почти всюду (безусловной сходимости,  $T$ -суммируемости почти всюду), то говорят, что  $\{\varphi_n\}$  является системой сходимости (безусловной сходимости,  $T$ -суммируемости). Система сходимости  $\{\varphi_n\}$  называется системой строгой сходимости, если из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 = \infty$$

вытекает расходимость почти всюду на отрезке  $[0, 1]$  ряда (15).

В определенных выше терминах утверждение Меньшова можно сформулировать так: последовательность  $\{\log^2 n\}$  является точным множителем Вейля для сходимости почти всюду во всем классе ортонормированных систем (ОНС). Более того, несколько позднее им же доказано: существует ОНС алгебраических полиномов  $\{P_n(x)\}$ , которая ограничена в совокупности и для которой  $\log^2 n$  является точным множителем Вейля для сходимости почти всюду. Указанное выше достаточное условие Меньшова — Радемахера было несколько уточнено В. Ф. Гапошкиным.

Другое важное утверждение Меньшова состоит в том, что, каковы бы ни были ОНС  $\{\varphi_n(x)\}$  и последовательность  $\omega(n) \uparrow \infty$ , в системе  $\{\varphi_n\}$  можно изменить порядок следования функций так, чтобы для вновь образованной системы  $\{\varphi_{\nu_n}(x)\}$  последовательность  $\omega(n)$  была множителем Вейля для сходимости почти всюду. До сих пор неизвестно, справедливо ли это утверждение для  $\omega(n) \equiv 1$ . П. Л. Ульянов отметил, что за счет слабых перестановок<sup>15</sup> ОНС нельзя, вообще говоря, сделать системой сходимости почти всюду, хотя в последнем утверждении Меньшова можно ограничиться слабыми перестановками системы  $\{\varphi_n\}$ .

<sup>15</sup> Переставленный натуральный ряд чисел называется слабо переставленным рядом чисел, если он разбивается на конечное число возрастающих последовательностей.

При доказательстве последней теоремы Меньшова было использовано следующее утверждение, принадлежащее ему же: из всякой ОНС  $\{\varphi_n\}$  можно выделить подсистему сходимости почти всюду  $\{\varphi_{p_n}(x)\}$  ( $p_1 < p_2 < \dots$ ). Этот результат интересен сам по себе, но, кроме того, он стимулировал исследования в различных направлениях. Так, Н. А. Сенчищевым и Е. К. Рябовой было найдено необходимое и достаточное условие на ОНС  $\{\varphi_n\}$ , чтобы из нее можно было выделить подсистему строгой сходимости.

Указанные выше результаты Меньшова явились фундаментом для многочисленных исследований по теории сходимости ортогональных рядов.

Для точных множителей Вейля А. А. Талалян доказал теорему: пусть  $\omega(x) \uparrow \infty$ ,  $\omega(x) = o\{\log^2 x\}$  и  $\omega(x+a) - \omega(x) \leq \log^2(x+a) - \log^2 x$ ; тогда последовательность  $\{\omega(n)\}$  является точным множителем Вейля (для сходимости почти всюду) для некоторой ОНС  $\{\varphi_n\}$ . Венгерский математик Тандори усилил этот результат, освободившись от третьего условия.

Весьма давно возник вопрос о том, всякая ли ОНС  $\{\varphi_n\}$  имеет точный множитель Вейля для сходимости почти всюду. Поскольку ранее не было четкого деления точного множителя Вейля на широкий и узкий, а под точным множителем Вейля неявно понимали в наших определениях точный множитель Вейля в узком смысле, то формально указанная выше проблема имеет отрицательное решение. Именно П. Л. Ульянов построил пример полной ОНС (ОНПС)  $\{\varphi_n(x)\}$ , которая не имеет точного множителя Вейля в узком смысле. Но до сих пор остается открытой сформулированная выше проблема для точного множителя Вейля в широком смысле.

Отметим некоторые результаты, относящиеся к системам сходимости. Известно (Радемахер), что система Радемахера является системой сходимости. А. Н. Колмогоров и А. Я. Хинчин доказали, что система Радемахера является системой строгой сходимости почти всюду. Колмогоров установил, что лакунарная тригонометрическая система является системой сходимости почти всюду на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

Недавно Е. М. Никишин обобщил на произвольные системы функций известную теорему американского математика А. Гарсиа.

Ряд вида (15) называется рядом класса  $L^p$ , если он является рядом Фурье от некоторой функции  $f \in L^p$ . В вопросах расходимости ортогональных рядов наиболее принципиальный факт был установлен Д. Е. Меньшовым, который построил первый пример всюду расходящегося ортогонального ряда класса  $L^2$ . Выше приводились даже более сильные утверждения Меньшова.

В предыдущем параграфе упоминался построенный Н. Н. Лузиным пример почти всюду расходящегося тригонометрического ряда, коэффициенты которого стремятся к нулю. Этот результат был усилен С. Б. Стечкиным, показавшим, что коэффициенты всюду расходящихся тригонометрических рядов могут стремиться к нулю достаточно быстро, лишь бы для коэффициентов монотонная мажоранта  $\{\beta_n\}$  не была

из  $l^2$ . Польский математик Орлич распространил результат Лузина на произвольные ОНПС. Утверждение Орлича усилил А. М. Олевский, получивший в некотором смысле окончательный результат. Он доказал, что для любой ОНПС  $\{\varphi_n\}$  существует почти всюду расходящийся ряд вида (15), коэффициенты которого удовлетворяют неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^{2+\varepsilon} < \infty \quad (\text{при всех } \varepsilon > 0).$$

Последнее утверждение теряет силу при  $\varepsilon = 0$ , так как еще Хааром была построена ОНПС сходимости.

По вопросам суммируемости общих ортогональных рядов основополагающие результаты были получены также Д. Е. Меньшовым. Он установил, что, каково бы ни было число  $\alpha > 0$ , последовательность  $\omega(n) = \{\log \log(n+1)\}^2$  является для  $(C, \alpha)$ -суммируемости почти всюду точным множителем Вейля во всем классе ортогональных рядов. Им же показано, что во всякой ОНС  $\{\varphi_n\}$  можно изменить порядок следования функций так, чтобы новая система  $\{\varphi_{p_n}(x)\}$  стала системой  $(C, \alpha)$ -суммируемости почти всюду при любом  $\alpha > 0$ .

Польский математик Качмаж доказал, что если ортогональный ряд (15), где

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 < \infty, \quad (16)$$

$T$ -суммируем почти всюду, то некоторая подпоследовательность  $\{S_{n_k}(x)\}$  частных сумм этого ряда сходится почти всюду ( $\{n_k\}$  зависит лишь от  $T$ ). П. Л. Ульяновым показано, что утверждение Качмажа теряет силу, если условие (16) заменить любым другим, не гарантирующим выполнение принадлежности  $\{C_n\} \in l_2$ .

Известно, что  $(C, 1)$ -суммируемость почти всюду рядов (15) с условием (16) эквивалентна сходимости почти всюду подпоследовательности  $\{S_{n_k}(x)\}$ . Естественно, возник вопрос о том, не распространяется ли последний факт на общие методы суммирования. Полный ответ на этот вопрос был дан Д. Е. Меньшовым, который доказал существование вполне регулярного метода  $T$  и ОНС  $\{\varphi_n\}$  таких, что для любой последовательности натуральных чисел  $n_k \uparrow \infty$  суммируемость почти всюду методом  $T$  рядов (15) с условием (16) не эквивалентна сходимости почти всюду подпоследовательности частных сумм  $S_{n_k}(x)$ .

К последнему направлению относятся также некоторые результаты О. А. Зизы. Она установила, что суммируемость почти всюду рядов вида (15) с условием (16) методами Эйлера  $(E, q)$  с  $q > 0$  и методом Бореля эквивалентна сходимости почти всюду подпоследовательности  $S_{n_k}(x)$ .

В теории ортогональных рядов хорошо известно, что если  $L_n(x)$  — функции Лебега для ОНС  $\{\varphi_n(x)\}$  и метода  $(C, \alpha)$  ( $\alpha \geq 0$ ) — имеют неубывающую мажоранту  $\omega(n)$ , то  $\{\omega(n)\}$  является множителем Вейля для  $(C, \alpha)$ -суммируемости рядов (15). А. В. Ефимовым установлено, что для

общих методов суммирования  $T$  этот результат теряет силу. Может даже оказаться, что всякая последовательность  $\{\omega^p(n)\}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) не является множителем Вейля для  $T$ -суммируемости рядов (15) (такие  $T$  существуют), хотя  $\omega(n)$  является мажорантой функций Лебега, построенных по методу  $T$  и системе  $\{\varphi_n\}$ . В. А. Андриенко исследовал вопрос о скорости сходимости и суммируемости почти всюду ортогональных рядов.

Д. Е. Меньшову принадлежит принципиальный результат, относящийся к безусловной сходимости почти всюду ортогональных рядов: всякий ряд вида (15) безусловно сходится почти всюду, если хоть при одном  $\varepsilon \in (0, 2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^{2-\varepsilon} < \infty.$$

Этот результат был усилен самим Меньшовым и другими математиками. Так, Орлич нашел достаточное условие для безусловной сходимости почти всюду, выраженное через множители Вейля. П. Л. Ульянов сформулировал критерий Орлича в эквивалентной, но более удобной форме.

С. Б. Стечкин впервые отметил, что всякая  $S_p$ -лакунарная ( $p > 2$ ) ОНС  $\{\varphi_n\}$  является системой безусловной сходимости почти всюду. Он же построил наилучшие лакунарные системы функций. Далее, С. Б. Стечкин и О. А. Зиза, независимо друг от друга, нашли некоторые достаточные условия, при выполнении которых из  $\{\varphi_n\}$  можно выбрать подсистему  $\{\varphi_{p_n}(x)\}$  безусловной сходимости почти всюду. Однако до сих пор остается открытым вопрос о возможности выделения подсистемы безусловной сходимости почти всюду из любой ОНС  $\{\varphi_n\}$ .

Выше отмечалось, что неизвестно, должна ли всякая ОНС  $\{\varphi_n\}$  иметь точный множитель Вейля в широком смысле для сходимости почти всюду. Естественно, такой же вопрос возникает и для безусловной сходимости почти всюду. П. Л. Ульяновым показано, что некоторые ОНПС, например система Хаара, не имеют точного множителя Вейля (и в широком и в узком смысле) для безусловной сходимости почти всюду. Он же доказал, что ОНПС Хаара  $\{\chi_m(t)\}$  не является системой безусловной сходимости почти всюду. Используя этот факт, А. М. Олевский и П. Л. Ульянов, независимо друг от друга, показали, что не существует ОНПС, которые являлись бы системами безусловной сходимости почти всюду. Более того, Ульянов установил, что систем безусловной сходимости почти всюду нет даже среди базисов в  $L^2$ . Дальнейшие обобщения, относящиеся к классам функций из  $L^p$  и  $C$ , принадлежат П. Л. Ульянову, А. М. Олевскому, Л. В. Тайкову и Ф. Г. Арутюняну.

К указанному кругу вопросов относится следующий результат А. А. Талаляна: существует такая ОНПС  $\{\varphi_n\}$ , что для любой функции  $f(x) \in L^2(0, 1)$  и любого числа  $\varepsilon > 0$  можно определить функцию  $\psi(x) \in L^2(0, 1)$  с  $mE\{f(x) \neq \psi(x)\} < \varepsilon$ , ряд Фурье которой по системе  $\{\varphi_n\}$  безусловно (даже абсолютно) сходится почти всюду. Неизвестно, можно ли в утверждении Талаляна вместо системы  $\{\varphi_n\}$  взять тригонометрическую систему.

П. Л. Ульяновым доказано, что всякий почти всюду на множестве  $E$  безусловно  $T$ -суммируемый тригонометрический ряд является безусловно сходящимся почти всюду на  $E$  ( $T$  — произвольный фиксированный метод Теплица). Это утверждение А. М. Олевский обобщил на любые ОНПС. С другой стороны, Ульянов показал, что существует всюду на отрезке  $[0, 1]$  расходящийся ортогональный ряд, который безусловно суммируем всюду на отрезке  $[0, 1]$  некоторым методом  $T$ . В дальнейшем Олевский нашел достаточные (в некотором смысле, окончательные) условия, налагаемые на коэффициенты ряда или на систему функций  $\{\varphi_n\}$ , или на метод  $T$  для того, чтобы безусловная  $T$ -суммируемость сводилась к безусловной сходимости.

Вопросам абсолютной сходимости ортогональных рядов посвящено несколько работ С. Б. Стечкина. Он доказал, что если ряд Фурье от функции  $f \in L^2$  имеет вид (15) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n(f)}{\sqrt{n}} < \infty \quad \left( E_n(f) = E_n = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} C_k^2} \right),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n| < \infty. \quad (17)$$

Пусть функция  $f \in L^2$  и

$$l_n(f) = \inf_{\{h_1 < h_2 < \dots < h_n\}} \left\| f - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{h_i} \varphi_{h_i} \right\|_{L^2}.$$

Стечкин доказал, что для справедливости неравенства (17) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n(f)}{\sqrt{n}} < \infty.$$

Относительно абсолютной суммируемости П. Л. Ульянов установил, что положительная последовательность  $\omega(n) \uparrow$  является множителем Вейля во всем классе ортогональных рядов (или тригонометрических рядов, или рядов по системе Хаара) для  $[C, 1]$ -суммируемости почти всюду в том и только в том случае, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \omega(n)} < \infty.$$

Из этого результата вытекает, в частности, что указанные классы рядов не имеют точного множителя Вейля для  $[C, 1]$ -суммируемости почти всюду.

Достаточные, в некотором смысле окончательные, условия, выраженные посредством структурных свойств функций, для абсолютной суммируемости почти всюду рядов вида (15) методами Чезаро, Абеля, Рисса и Зигмунда были найдены Л. В. Гречачевской.

Наконец, отметим результат Е. М. Никишина, который нашел необходимое и достаточное условие на систему функций  $\{f_k(x)\}$ , чтобы

она была системой абсолютной сходимости в классе коэффициентов  $\{C_k\} \in l_p$  с  $1 \leq p < \infty$ .

Выше изложены основные результаты, относящиеся к проблеме представления функций тригонометрическими рядами. Здесь же приведем следующую теорему Бари: для всякой измеримой и конечной почти всюду функции  $f(x)$  существует ряд по системе Хаара, сходящийся почти всюду к  $f(x)$ . Таким образом, проблема представления конечных функций рядами по системе Хаара полностью решена. Наиболее сильные и важные утверждения, относящиеся к общей проблеме представления функций ортогональными рядами, были получены А. А. Талалайном. Сформулируем некоторые его результаты.

1. Если  $\{\varphi_n\}$  — ОНПС на отрезке  $[0, 1]$ , то для всякой измеримой на отрезке  $[0, 1]$  функции <sup>16</sup>  $f(x)$  существует ряд вида (15), где  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$ , сходящийся по мере к  $f(x)$ .

2. Если  $\{\varphi_n\}$  — ОНПС, то для любой измеримой функции  $f(x)$  существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_{n_k}(x),$$

где  $\{\varphi_{n_k}\}$  — некоторая переставленная система  $\{\varphi_n\}$ , суммирующийся почти всюду к  $f(x)$  одновременно всеми методами  $(C, \alpha)$  с  $\alpha > 0$ .

Первое и второе утверждения сохраняют силу и для нормированных базисов в  $L^p$  с  $p > 1$ .

3. Существует ОНПС  $\{\varphi_n\}$  такая, что для любой измеримой функции  $f(x)$  найдется ряд вида (15), который сходится почти всюду к  $f(x)$ .

4. Всякая измеримая функция  $f(x)$  представима рядом по системе Шаудера, сходящимся почти всюду к  $f(x)$ .

5. Если  $\{\varphi_n\}$  — ОНПС, то существует ряд вида (15) с  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$ , который является универсальным, т. е. для любой измеримой функции  $f(x)$  существуют натуральные  $n_k \uparrow \infty$ , такие, что подпоследовательность  $S_{n_k}(x)$  частных сумм ряда (15) сходится почти всюду к  $f(x)$ . Для тригонометрической системы этот факт был установлен ранее Д. Е. Меньшовым и В. Я. Козловым.

П. Л. Ульяновым построен пример ортогонального ряда с достаточно быстро стремящимися к нулю коэффициентами, обладающего тем свойством, что при некоторых перестановках членов он сходится к различным функциям. До сих пор неизвестно, может ли быть таким тригонометрический ряд или ряд Фурье.

А. А. Талалайн всесторонне исследовал вопрос об универсальных рядах по ОНС в смысле перестановок, в смысле подрядов для случая сходимости по мере или же  $(C, \alpha)$ -суммируемости почти всюду. Недавно Талалайн и его ученик Ф. Г. Арутюнян установили важный факт: не существует ряда по системе Хаара (по системе Уолша), который сходил бы к  $+\infty$  на множестве положительной меры. Этот результат

<sup>16</sup> Если не говорится, что функция конечна почти всюду, то это означает, что она может принимать и бесконечные значения на множестве положительной меры.

интересен сам по себе и, кроме того, указывает на то важное обстоятельство, что при решении проблемы представления функций ортогональными рядами необходимо, вообще говоря, существенно различать случай конечных функций от случая произвольных функций (даже для некоторых классических ОНС).

До сих пор неизвестно, для всякой ли ОНПС  $\{\varphi_n\}$  существует нуль-ряд, т. е. ряд вида (15), который почти всюду сходится к нулю, хотя не все его коэффициенты равны нулю. Талалайном был сделан важный шаг в этом направлении. Он доказал, что для всякой ОНПС  $\{\varphi_n\}$  (даже для базиса в  $L^p$  с  $p > 1$ ) существует ряд вида (15), который сходится по мере к нулю, хотя не все его коэффициенты равны нулю.

Остановимся на некоторых частных результатах, относящихся к рассматриваемому кругу вопросов. С. Б. Стечкин и П. Л. Ульянов установили, что для рядов по системе Радемахера всякое множество  $E \subset [0, 1]$  с  $mE < \frac{1}{2}$  является  $U$ -множеством, причем утверждение

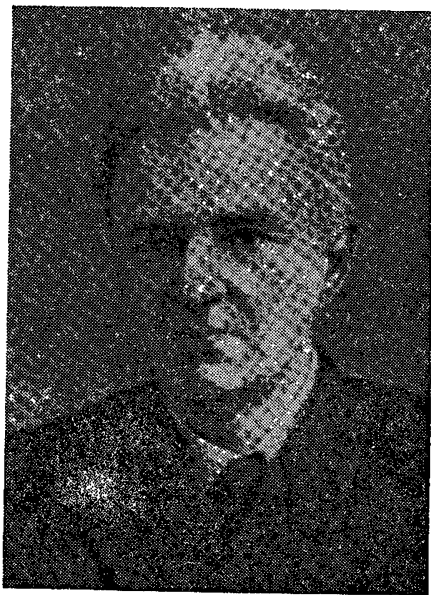
теряет силу, если  $mE = \frac{1}{2}$ . Далее, Ульянов показал, что для всякой последовательности  $\{C_n\}$  с  $\{C_n\} \notin l_2$  существует ОНС  $\{\varphi_n\}$  такая, что ряд (15) всюду на отрезке  $[0, 1]$  сходится к  $+\infty$ . При этих же условиях, налагаемых на  $\{C_n\}$ , было доказано (Агню), что существует ряд вида (15), который всюду на отрезке  $[0, 1]$  сходится к нулю. Оба результата обобщил Р. И. Осипов, заменив  $+\infty$  и нуль произвольной измеримой функцией  $f(x)$ . Б. М. Гагаевым установлены для рядов по системе Штурма — Лиувилля некоторые аналоги теорем Кантора и Дюбуа — Реймона о коэффициентах сходящихся тригонометрических рядов, а С. Н. Андриановым впервые показано, что для некоторых классов ортогональных рядов по многочленам множества единственности могут иметь положительную меру, таким свойством, например, обладают ряды по некоторым многочленам Якоби.

Приведем некоторые результаты советских математиков, относящиеся к базисам.

С. С. Левин нашел необходимое и достаточное условие, налагаемое на систему функций  $\{\varphi_n\}$  (функции  $\varphi_n \in L^2$ ) для того, чтобы она допускала сопряженную систему  $\{\psi_m\}$ , т. е. чтобы  $(\varphi_n, \psi_m) = \delta_{n,m}$ .

Н. К. Бари ввела новые важные понятия (системы Бесселя и Гильберта, базисы Рисса и т. п.) и провела детальные исследования в этом направлении.

Пусть  $\varphi_n(x)$  и  $\psi_m(x)$  — полные системы функций в пространстве  $L^2(0,1)$  и  $\{\varphi_n, \psi_m\}$  — биортонормированная система. Система функций



Б. М. Гагаев.



$\{\varphi_n\}$  называется системой Бесселя, если для любой функции  $f \in L^2$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (f, \psi_m)^2 < \infty.$$

Систему Бесселя  $\{\varphi_n\}$  называют базисом Бесселя, если  $\{\varphi_n\}$  является базисом в  $L^2(0, 1)$ . Следуя обратному порядку, получим определения систем и базисов Гильберта. Система функций  $\{\varphi_n\}$ , являющаяся одновременно системой Бесселя и системой Гильберта, называется системой Фишера — Рисса.

Н. К. Бари доказаны следующие теоремы.

1. Для того чтобы  $\{\varphi_n\}$  была системой Бесселя, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве  $L^2$  существовал линейный непрерывный оператор  $A$ , для которого система функций  $\{A\varphi_n\}$  является ОНПС.

2. Существует система Бесселя, которая не является базисом.

3. Если  $\{\varphi_n\}$  — система Бесселя, то  $\{\psi_m\}$  — система Гильберта.

4. Утверждения типа 1 — 3 справедливы и для систем Гильберта.

5. Всякая система Фишера — Рисса является базисом (который называют базисом Рисса).

6. Если система  $\{\varphi_n\}$  — базис Рисса, то и всякая минимальная система  $\{\tau_n\}$ , где

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n - \tau_n\|_2^2 < \infty,$$

является базисом Рисса.

Некоторое время оставался открытым вопрос о том, существуют ли нормированные базисы, не являющиеся базисами Рисса. Этот вопрос был решен К. И. Бабенко, который построил пример базиса, не являющегося базисом Рисса. Исследования Бари и Бабенко продолжили А. Г. Костюченко и А. В. Скороход, И. М. Гельфанд, М. Г. Крейн, В. Ф. Гапошкин, З. А. Чантурия и др. В. Я. Козлов нашел интересное необходимое и достаточное условие для базиса в пространстве  $L^2$ . Известно, что в пространствах  $L$  и  $C$  не существует безусловных базисов, а в пространствах  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) система Хаара является безусловным базисом. Но система Хаара не ограничена в совокупности. В. Ф. Гапошкин установил, что всякая нормированная в  $L^p$  равномерно ограниченная система не может быть безусловным базисом  $L^p$  с  $p \in (1, 2) + (2, \infty)$ . Для ОНС этот результат фактически был известен ранее.

В последние годы возник ряд вопросов, относящихся к базисам в  $C(0, 1)$ . В этом направлении получены, например, следующие результаты.

А. М. Олевский доказал, что всякая ограниченная в совокупности ОНС  $\{\varphi_n\}$  не может быть базисом в  $C(0, 1)$ . Более того, для таких систем  $\{\varphi_n\}$  всегда существуют непрерывные функции, ряды Фурье которых по  $\{\varphi_n\}$  расходятся в некоторых точках. Таким образом, известная в теории тригонометрических рядов теорема Дюбуа — Реймона остается верной и для указанных ОНС  $\{\varphi_n\}$ .

Весьма давно известно (Фабер, В. Ф. Николаев, С. М. Лозинский, Ф. И. Харшиладзе), что не существует последовательности алгебра-

ических полиномов  $P_n(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), которые образовывали бы базис в  $C(0, 1)$  и степени которых были бы не выше  $n$ . Недавно З. А. Чантурия доказал, что если натуральные числа  $v_n \uparrow \infty$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v_n} < \infty \quad (0 \leq v_0 < v_1 < \dots),$$

то существует алгебраический базис  $\{\pi_n(x)\}$  в пространстве  $C(0, 1)$ , где степени полиномов  $\pi_n(x)$  равны  $v_n$  при  $n \geq 0$ . Пока неизвестно, можно ли существенно уменьшить рост  $v_n$ .

Известно, что если ОНС  $\{\varphi_n\}$  является базисом в  $C(0, 1)$ , то  $\{\varphi_n\}$  есть базис в  $L(0, 1)$ . П. Л. Ульянов показал, что если ОНС  $\{\varphi_n\}$  состоит из ограниченных функций и является базисом в  $L(0, 1)$ , то  $\{\varphi_n\}$  является базисом в  $L^p$  при всех  $p \in (1, \infty)$ , причем существует ОНС непрерывных функций  $\{\varphi_n\}$ , которая является базисом в  $L(0, 1)$ , но не является базисом в  $C(0, 1)$ . Более того, в последнем утверждении система  $\{\varphi_n\}$  может быть даже существенно незамкнутой в  $C(0, 1)$ , т. е. множество  $C(0, 1) \ominus \{\varphi_n\}$  может иметь бесконечно много линейно независимых элементов ( $\{\bar{\varphi}_n\}$  — замыкание в  $C(0, 1)$  линейной оболочки, построенной на элементах  $\varphi_n$  ( $n \geq 1$ )).

Изложим некоторые результаты, относящиеся к поведению коэффициентов ортогональных рядов.

И. И. Привалов доказал, что если ОНС  $\{\varphi_n\}$  ограничена в совокупности, то из сходимости почти всюду на отрезке  $[0, 1]$  ряда (15) вытекает равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0.$$

А. М. Олевский установил, что если  $\{\varphi_n\}$  — ОНПС и ряд (15) сходится на некотором множестве  $E \subset [0, 1]$  с мерой  $mE > 0$  то,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{-2} = \infty. \quad (18)$$

(Если  $C_{n_0} = 0$ , то полагается  $C_{n_0}^{-2} = 1$ .) Обратно: если  $\{C_n\}$  удовлетворяет равенству (18), то найдется ОНПС  $\{\varphi_n\}$  такая, что ряд (15) сходится всюду на отрезке  $[0, 1]$ .

Несколько работ советских математиков посвящено изучению поведения коэффициентов Фурье от непрерывных функций. Так, А. М. Олевским показано, что если  $\{\varphi_n\}$  — ОНПС, то найдется функция  $f \in C(0, 1)$  такая, что  $\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^{2-\varepsilon} = \infty$  при всех  $\varepsilon > 0$ . С другой стороны, А. С. Махмудов доказал следующее: пусть  $\{\varphi_n\}$  — ОНС. Для того чтобы при любой последовательности  $\{d_n\}$ , где  $d_n \geq 0$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty,$$

существовала функция  $f \in C(0, 1)$ , для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n |(f, \varphi_n)| = \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлась постоянная  $M > 0$  такая, что

$$\int_{\delta}^1 |\varphi_n(x)| dx \geq M \text{ при всех } n \geq 1.$$

Для коэффициентов Фурье — Данжуа А. Г. Джваршейшвили установил, что не существует ОНС  $\{\varphi_n(x)\}$ , для которой выполнялось бы неравенство

$$\left| (D_*) \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx \right| \leq C(f) < \infty \quad (n = 1, 2, \dots)$$

при всех  $D_*$ -интегрируемых функциях  $f$ .

Некоторые исследования советских математиков посвящены рядам по системе Уолша и ее обобщениям. Так, А. А. Шнейдер доказал, что если  $\{\varphi_n\}$  — система Уолша в нумерации Пэли и  $C_n \downarrow 0$ , то ряд (15) сходится при всех  $x \in (0, 1)$  к функции  $f(x)$ , причем равномерно на  $(\delta, 1)$  при всяком фиксированном  $\delta \in (0, 1)$ . Если же  $\{\varphi_n\}$  — система Уолша в нумерации Качмажа и  $C_n \downarrow 0$ , но  $C_n \neq o\left(\frac{1}{\log n}\right)$ , то ряд (15) почти всюду расходится на отрезке  $[0, 1]$ . Шнейдер изучал также вопросы единственности для рядов по системе Уолша. Н. Я. Виленкин провел некоторые исследования, относящиеся к периодическим мультипликативным системам (обобщения системы Уолша). А. И. Рубинштейн распространил первое утверждение Шнейдера на случай некоторых мультипликативных систем и показал, что в этом случае, вообще говоря,  $f(x) \notin L(0, 1)$ , хотя всегда  $f(x) \in A(0, 1)$  и ряд (15) всегда есть ряд Фурье  $A$  от функции  $f$ . П. Л. Ульянов доказал, что система Уолша не является системой безусловной сходимости почти всюду. Ф. Г. Арутюнян и А. А. Талалян установили для рядов по системе Уолша аналог известной теоремы Дюбуа — Реймона о тригонометрических рядах, сходящихся к суммируемым функциям.

Укажем некоторые результаты, относящиеся к изучению систем вида  $\{\varphi(nx)\}$  и рядам по ним. Первые обстоятельные исследования в этом направлении были проведены В. Я. Козловым. Им, в частности, найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы такие системы являлись полными и ортонормированными. З. Н. Каждан и П. Л. Ульяновым получено несколько результатов по абсолютной сходимости рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi(\lambda_n x + \alpha_n)$$

(аналоги теорем Лузина — Данжуа и Лузина).

Равномерной сходимости, абсолютной сходимости, сходимости почти всюду и безусловной сходимости почти всюду рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi(nx)$$

посвящены некоторые работы К. Ф. Малявко, В. Ф. Гапошкина, Л. А. Балашова и Е. М. Никишина. Малявко и Гапошкин выделили системы вида  $\{\varphi(nx)\}$ , свойства рядов Фурье по которым весьма близки к свойствам тригонометрических рядов Фурье. Независимо друг от друга Балашов и Гапошкин установили, что если периодическая, с периодом 1, функция  $\varphi(x) \in L^2(0, 1)$  такова, что

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \text{а} \quad \int_0^1 \varphi^2(x) dx = 1, \quad (19)$$

то существуют такие  $n_k \uparrow \infty$ , что система  $\{\varphi(n_k x)\}$  является системой строгой сходимости почти всюду. Они же показали, что если периодическая функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет условиям (19) и  $\varphi(x) \in L^p(0, 1)$  при некотором  $p > 2$ , то найдутся такие  $n_k \uparrow \infty$ , что система  $\{\varphi(n_k x)\}$  будет системой строгой безусловной сходимости почти всюду. Гапошкиным получен также следующий результат: если непрерывная нечетная периодическая функция  $\varphi(x)$  с рядом

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \pi n x \quad (C_1 \neq 0)$$

такова, что для системы  $\{\varphi(nx)\}$  справедлив принцип локализации хоть в одной точке  $x_0 \neq \frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  — целые,  $0 < x_0 < 1$ , то  $\varphi(x) = C_1 \sin \pi x$ . Такого же типа утверждение доказано им и для случая  $\varphi \in L$ .

В последние годы активно разрабатывается как в СССР, так и за рубежом теория рядов по системе Хаара  $\{\chi_m(t)\}$ . Получаемые в этом направлении результаты не только интересны сами по себе (в частности, они нередко принципиально отличны от результатов для тригонометрических рядов), но и оказываются иногда полезными при решении некоторых общих вопросов теории ортогональных рядов, например вопросов о точных множителях Вейля для безусловной сходимости почти всюду, о существовании ОНПС безусловной сходимости почти всюду, о представлении функции рядами и т. п. Выше упоминались некоторые результаты Н. К. Бари, А. А. Талаляна, Ф. Г. Арутюняна и П. Л. Ульянова, относящиеся к рядам по системе  $\{\chi_m(t)\}$ . Приведем еще несколько утверждений. Так, Ульяновым установлено:

а) если  $C_m \downarrow 0$ , то ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m \chi_m(t) \quad (20)$$

сходится на множестве положительной меры тогда и только тогда, когда  $\{C_m\} \in l_2$ . Причем если  $C_m \downarrow 0$  и  $\{C_m\} \in l_2$ , то сумма этого ряда принадлежит  $L^p(0, 1)$  при всех  $p \in [1, \infty)$ ;

б) для того чтобы положительная последовательность  $\omega(n) \uparrow \infty$  являлась множителем Вейля для безусловной сходимости почти всюду рядов по системе  $\{\chi(t)\}$ , необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m \omega(m)} < \infty;$$

в) если функция  $f(t) \in L^2(0, 1)$  и ее интегральный в  $L^2$  модуль непрерывности  $\omega_2(\delta, f) = O\left\{\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\right\}$  при некотором  $\varepsilon > 0$ , то ряд Фурье от  $f$  по системе Хаара

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m(f) \chi_m(t) \quad (21)$$

безусловно (даже абсолютно) сходится почти всюду. Причем для  $\varepsilon = 0$  утверждение теряет силу (нельзя даже гарантировать, что ряд (21) безусловно сходится почти всюду на некотором множестве  $E$  с мерой  $mE > 0$ );

г) существует функция  $f(t) \in L^p(0, 1)$  при всех  $p \in [1, \infty)$ , для которой ряд (21) не является безусловно сходящимся почти всюду;

д) если функция  $f$  имеет ограниченную вариацию, т. е.  $f \in V(0, 1)$ , то

$$\sum_{m=1}^{\infty} |C_m(f)|^{\alpha} < \infty \quad \text{при всех } \alpha > \frac{2}{3},$$

для  $\alpha = \frac{2}{3}$  утверждение теряет силу.

Четвертое утверждение было усилено А. М. Олевским на случай непрерывных функций, а пятое — Б. И. Голубовым, показавшим, что если функция  $f$  имеет ограниченную  $p$ -ю вариацию, т. е.  $f \in V_p(0, 1)$ , где  $p \geq 1$ , то

$$\sum_{m=1}^{\infty} |C_m(f)|^{\beta} < \infty \quad (22)$$

при всех  $\beta > \frac{2p}{2+p}$ . При  $\beta = \frac{2p}{2+p}$  утверждение теряет силу. Более того, при всяком  $p \geq 1$  существует функция  $f \in \text{Lip } \frac{1}{p}$ ; для которой ряд (22) расходится при  $\beta = \frac{2p}{2+p}$ . В случае  $p = 2$  из результата Голубова вытекает существование функции  $f \in \text{Lip } \frac{1}{2}$ , для которой

$\sum_{m=1}^{\infty} |C_m(f)| = \infty$ . Это утверждение является распространением теоремы Бернштейна на случай рядов по системе  $\{\chi_m(t)\}$ . Впоследствии результаты Бернштейна и Голубова были перенесены Б. С. Митягиным на произвольные ОНПС.

Голубовым доказаны также следующие утверждения:

а) для рядов вида (21) справедливы аналоги соответствующих теорем Стечкина, установленные для абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье;

б) если  $f(t) \in C(0, 1)$  и  $C_m(t) = o\left(m^{-\frac{3}{2}}\right)$ , то  $f(t) = \text{const.}$  Это утверждение теряет силу, если  $o$  заменить на  $O$ ;

в) если  $f(t) \in C(0, 1)$ , то для  $0 < \alpha \leq 1$  эквивалентны три условия

$$C_m(f) = O\left(m^{-\alpha - \frac{1}{2}}\right), \quad f \in \text{Lip } \alpha, \\ \|f(t) - S_m(t, f)\|_C = O(m^{-\alpha}),$$

где  $S_m(t, f)$  — частные суммы ряда (21).

Олевский показал, что если для некоторого числа  $\varepsilon \in (0, 2)$

$\sum_{m=1}^{\infty} |C_m|^{2-\varepsilon} < \infty$ , то ряд (20) абсолютно сходится почти всюду на отрезке  $[0, 1]$ .

В. А. Матвеевым установлены такие теоремы:

а) для того чтобы функция  $f \in V(0, 1)$  была непрерывной во всех двоично иррациональных точках, необходимо и достаточно, чтобы

$C_m(f) = o\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)$  (здесь принято, что в точках разрыва функция  $f$  равна среднему арифметическому пределов слева и справа);

б) для того чтобы ряд Фурье (21) от функции  $f(t) \in V(0, 1)$  был сходящимся во всех точках  $t \in [0, 1]$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$C_m(f) = o\left(m^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Несколько работ М. Б. Петровской, В. А. Скворцова, Ф. Г. Арутюняна и А. А. Талаляна посвящено вопросам единственности рядов по системе Хаара. Наиболее общие результаты в этом направлении установлены Петровской, Арутюняном, Талаляном. Из их результатов вытекает, в частности, что если ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \chi_m(t) \tag{23}$$

всюду на отрезке  $[0, 1]$  сходится к конечной на этом отрезке функции  $f(t) \in L(0, 1)$ , то этот ряд является рядом Фурье от  $f$ .

Петровская доказала, что существуют нуль-ряды вида (23), коэффициенты которых достаточно быстро стремятся к нулю, например так, что  $a_m = O\left\{\frac{1}{\sqrt{m \log m}}\right\}$ . Талалян показал, что существует ряд вида (23), обладающий свойством: для всякой измеримой и почти везде конечной функции  $f(t)$  найдется возрастающая последовательность целых чисел  $m_k$  таких, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} \chi_{m_k}(t)$$

почти всюду на отрезке  $[0, 1]$  сходится к  $f(t)$ , т. е. ряд (23) является универсальным в смысле сходимости почти всюду подрядов.

О некоторых других направлениях исследований по ортогональным рядам, системам и их обобщениям мы вынуждены сказать лишь в самых общих чертах<sup>17</sup>. Так, несколько работ Б. М. Гагаева, Б. В. Гнеденко, Н. Г. Чеботарева, С. Н. Андрианова, Е. А. Синева и других посвящено изучению ортогональных систем, инвариантных относительно дифференцирования. В некоторых работах Н. К. Бари, В. Я. Козлова, Ф. Г. Арутюняна и других математиков изучались полные системы функций. Например, Козловым установлено, что если  $\{\varphi_n(x)\}$  — ОНПС на отрезке  $[0, 1]$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n^+(x)\}^2 = \infty$$

$$(\varphi_n^+(x) = \varphi_n(x) \quad \text{при } \varphi_n(x) \geq 0,$$

$$\varphi_n^+(x) = 0 \quad \text{при } \varphi_n(x) < 0)$$

почти для всех  $x \in [0, 1]$ . Н. К. Бари, К. И. Бабенко, М. Г. Крейном и другими получены результаты по устойчивости тех или иных свойств систем функций и рядов по ним. Некоторые работы Н. Я. Виленкина, А. А. Талаляна и других посвящены изучению континуальных аналогов ортогональных систем и базисов. Советскими математиками изучались также мультипликаторы рядов.

## Теория приближения функций многочленами

Теория приближения функций ведет свое начало от трудов П. Л. Чебышева. Чебышев ввел в науку понятие наилучшего приближения функций при помощи многочленов и доказал одну из основных теорем в этой теории (теорема Чебышева). Дальнейшее непосредственное развитие его идей в этом направлении происходило главным образом в России, в трудах его учеников Е. И. Золотарева, А. Н. Коркина и братьев А. А. и В. А. Марковых. Усилия этих математиков направлялись прежде всего на изучение тех свойств многочленов, которые используются при приближении функций, и на разработку методов приближения отдельных индивидуальных функций.

Наилучшим приближением  $E_n(f)$  функции  $f(x)$  при помощи алгебраических многочленов  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  степени  $n$  на отрезке  $[-1, 1]$

<sup>17</sup> По изложенным в этом параграфе вопросам см. монографию Н. К. Бари «Тригонометрические ряды» (1961 г.), а также работы А. А. Талаляна — «Представление измеримых функций рядами» (1960 г.) и П. Л. Ульянова — «Расходящиеся ряды Фурье» (1961 г.), «Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов» (1964 г.).

называется наименьший максимум

$$\max_x |f(x) - P_n(x)| = \|f - P_n\|_C = E_n(f) \quad (24)$$

среди всех многочленов  $P_n$  данной степени  $n$ . Соответственно наилучшим приближением  $E_n^*(f)$  функции  $f(x)$  (периода  $2\pi$ ) при помощи тригонометрических многочленов

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

порядка  $n$  называется наименьший максимум

$$\max_x |f(x) - T_n(x)| = \|f - T_n\|_{C^*} = E_n^*(f) \quad (25)$$

из всех многочленов  $T_n$  порядка  $n$ .

Большую роль в развитии теории приближений сыграла доказанная Вейерштрассом теорема, утверждающая, что всякая непрерывная на отрезке  $[-1, 1]$  функция может быть равномерно приближена на нем алгебраическими многочленами с любой степенью точности. На языке наилучших приближений это означает, что для непрерывной функции  $f$   $E_n(f) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

В начале нашего столетия в теории приближения появилась тенденция — ставить задачи о приближении многочленами не индивидуальных функций, а функций, принадлежащих к тому или иному классу, например аналитических, дифференцируемых, удовлетворяющих условию Липшица и т. д. При этом предлагалось указывать все, что возможно, о соответствующих приближениях, в частности о наилучших приближениях таких функций. В первых же работах этого цикла (Лебега, Бореля, Валле-Пуссена, Джексона, Бернштейна) было выяснено, что дифференциальные свойства функции  $f$  влияют на порядок убывания  $E_n(f)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

С. Н. Бернштейн показал, что и, наоборот, по скорости убывания  $E_n(f)$  при  $n \rightarrow \infty$  можно судить о дифференциальных свойствах функции. Например, он доказал следующую (1911 г.) теорему, ставшую ныне классической: для того чтобы функция  $f$  была аналитической на отрезке  $[-1, 1]$ , необходимо и достаточно, чтобы ее наилучшее приближение  $E_n(f)$  удовлетворяло равенству

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n(f)} = g < 1. \quad (26)$$

Другая фундаментальная теорема Джексона и Бернштейна (с дополнением Валле-Пуссена) гласит: для того чтобы периодическая функция  $f$  имела производную  $f^{(r)}$  порядка  $r$ , удовлетворяющую условию Липшица степени  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), необходимо и достаточно, чтобы



С. М. Никольский



ее наилучшее приближение  $E_n^*(f)$  при помощи тригонометрических многочленов порядка  $n$  удовлетворяло неравенству

$$E_n^*(f) \leq \frac{C}{n^{r+\alpha}}, \quad (27)$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $n$ .

Из этих результатов видно, что функции, имеющие определенные дифференциальные свойства, могут быть полностью охарактеризованы скоростью убывания их наилучших приближений.

В начале XX в. крупными математическими центрами, в которых развивалась теория приближения функций, являлись Петербург и Харьков. В Петербурге в это время работал А. А. Марков. Он установил, в частности, неравенства для производных алгебраических многочленов, оказавшиеся весьма важным аппаратом в современной теории приближений. В Харькове, в университете, развивал свою научную деятельность С. Н. Бернштейн. Еще до революции им были получены фундаментальные результаты, лежащие в основе современной теории приближения функций. После Октябрьской революции он создал в Харькове школу теории приближения, или, как он впоследствии называл, конструктивной теории функций. В начале 30-х годов Бернштейн переехал в Ленинград, что способствовало созданию здесь сильной группы математиков, работающих в теории приближения. Позднее он возглавил московскую школу теории приближения. Своими трудами Бернштейн оказал очень большое влияние на развитие теории приближения в нашей стране и за рубежом. Научные труды Бернштейна по конструктивной теории функций составляют два тома (первый и второй) его собрания сочинений, изданного Академией наук СССР.

Новыми глубокими исследованиями и постановками задач обогатил в середине 30-х годов теорию приближения функций А. Н. Колмогоров. Ныне они разрабатываются весьма широко его учениками и последователями. Значительное развитие получила теория приближения в области функций комплексного переменного, где очень большую роль сыграли глубокие результаты М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева.

В настоящее время в Советском Союзе теория приближения функций и близкие к ней вопросы разрабатываются во многих научных центрах — в Москве, Ленинграде, Харькове, Баку, Днепропетровске, Ереване, Киеве, Львове, Минске, Новосибирске, Одессе, Тбилиси и др.

Перейдем к научным исследованиям, выполненным советскими математиками по теории приближения функций в действительной области. По этому вопросу были в различное время опубликованы обзорные статьи (В. Л. Гончаров, М. А. Лаврентьев — «Теория аналитических функций», 1953; С. М. Никольский — «Приближение многочленами функций действительного переменного», 1948; С. М. Лозинский, И. П. Натансон — «Метрическая и конструктивная теория функций вещественной переменной», 1959), содержащие большую библиографию. В нашем обзоре рассмотрены основные исследования по теории приближения функций в действительной области, проведенные в СССР за 50 лет. В обзор не включены работы по теории приближения в общих терминах функциональных пространств.

### Экстремальные свойства многочленов.

С. Н. Бернштейн и его ученики Н. И. Ахиезер, В. Ф. Бржечка, Е. В. Вороновская, Я. Л. Геронимус, Б. А. Рымаренко систематически продолжали исследования П. Л. Чебышева и его школы по изучению экстремальных свойств многочленов.

Еще Чебышев показал, что среди многочленов

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

степени  $n$  со старшим коэффициентом, равным единице, существует и притом единственный многочлен  $Q_n$ , наименее уклоняющийся на отрезке  $[-1, 1]$  от нуля, т. е. такой, что его норма

$$\|P_n\| = \max_{-1 < x < 1} |P_n(x)| \quad (28)$$

наименьшая из возможных. Этот многочлен, называемый ныне многочленом Чебышева, определяется формулой

$$Q_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x.$$

Получение  $Q_n$  связано с варьированием коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$  многочлена  $P_n(x)$  для фиксированного (равного единице) коэффициента при  $x^n$ . Но можно зафиксировать  $a_1$  или первые  $m$  коэффициентов  $a_1, \dots, a_m$  и варьировать только остальные  $a_k$  или, в более общей постановке, потребовать, чтобы коэффициенты  $a_k$  ( $k = 0, \dots, n$ ) удовлетворяли заданным линейным или нелинейным соотношениям. На  $a_k$  иногда налагают еще дополнительные условия, например, требуют, чтобы многочлены  $P_n(x)$  были монотонными. Можно еще рассматривать варьируемые многочлены  $P_n$ , заданные на двух или нескольких отрезках. В одних случаях указанные задачи удалось решить до конца, точно, в других — исследователи удовлетворялись тем, что искали асимптотическое их решение при  $n \rightarrow \infty$ . В последнее время, в связи с развитием машинной математики, интерес к эффективному решению подобных задач значительно возрос.

Вторая характерная экстремальная задача заключается в том, что требуется возможно точнее оценить производную алгебраического или тригонометрического многочлена, если известно, что его модуль не превышает заданную функцию  $\psi(x)$ . В том случае, когда  $\psi(x)$  постоянная, задача решается с помощью известных неравенств А. А. Маркова и С. Н. Бернштейна. Именно эти неравенства положены Бернштейном в основу доказательства его обратных теорем приближения, при помощи которых по скорости убывания к нулю  $E_n(f)$  узнаются дифференциальные свойства функции  $f$ .



Г. Ф. Канфро.



Н. И. Ахиезер.

Относящиеся к этой задаче дальнейшие результаты получены Н. К. Бари, С. Н. Бернштейном, В. С. Виденским, А. О. Гельфондом. К ним принадлежат также неравенства для алгебраических многочленов, доказанные В. К. Дзядыком (в метрике  $C$ ) и Г. Н. Лебедем (в общей метрике  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ) и примененные ими для получения обратных теорем приближения непериодических функций (см. ниже). С последней темой связаны исследования М. К. Потапова. Указанная экстремальная задача получила также развитие в смысле оценки нормы разности тригонометрического многочлена или целой функции экспоненциального типа (см. ниже) посредством нормы их производной. В этой постановке в 1948 г. получены неравенства С. Н. Бернштейном, С. М. Никольским, С. Б. Стечкиным.

Стечкин применил (см. ниже) свое неравенство для тригонометрических многочленов в метрике  $C$  в исследованиях связи между убываниями  $n$ -го наилучшего приближения функции и ее модулем непрерывности  $\omega(\frac{1}{n})$ . Дальнейшие обобщения на целые функции принадлежат Н. Н. Мейману и Б. Я. Левину и др.

Третья характерная экстремальная задача состоит в оценке нормы многочлена или целой функции экспоненциального типа в одной метрике  $L_{p'}$  посредством их нормы в другой метрике  $L_p$  ( $1 \leq p \leq p' \leq \infty$ ). Такие оценки<sup>18</sup> получены С. М. Никольским в 1951 г. вообще в случае многих переменных и применены им для доказательства теорем вложения. Эти неравенства изучались специально, в частности в работах Н. К. Бари и И. И. Ибрагимова, где в ряде случаев уточнены константы.

Возникла еще одна задача, специфическая для многих переменных, — оценка нормы тригонометрического многочлена или целой функции экспоненциального типа в метрике  $m$ -мерного подпространства посредством их нормы в метрике  $n$ -мерного пространства ( $m < n$ ). Соответствующее неравенство найдено С. М. Никольским в 1951 г., применено им в его теоремах вложения и получило дальнейшее развитие.

Изучалась также задача об оценке смешанной производной тригонометрического многочлена от многих переменных посредством максимумов ее модуля, когда известно, что произведение степеней (частот) входящих в многочлены гармоник не превышает заданное число  $N$ . Полученные в этом вопросе результаты принадлежат К. И. Бабенко (1960 г.) и С. А. Теляковскому (1963 г.).

<sup>18</sup> В случае  $p' = \infty$  и тригонометрических полиномов от одной переменной — это неравенство Джексона.

Получены также неравенства для классических многочленов, оценивающие тригонометрические многочлены посредством их значений (С. Н. Бернштейн, С. М. Лозинский, С. М. Никольский, А. Х. Турецкий, А. Ф. Тиман и др.), и неравенства для производных различных многочленов с весовыми нормами (А. С. Джафаров, О. И. Иноземцев, И. Ю. Харрик и др.). Многие из них получили применение в теории приближения функций.

*Приближение функций с особенностями.* Одна из основных задач современной теории приближения заключается в изучении поведения наилучшего приближения функции  $E_n(f)$ , когда  $n \rightarrow \infty$ . Одна же из возможных систематизаций такого изучения состоит в том, что из всего бесконечного многообразия функций  $f$  выделяются некоторые классы  $\mathcal{M}$  функций  $f$ , асимптотическое поведение наилучшего приближения  $E_n(f)$  каждой из которых одно и то же<sup>19</sup>. Таким образом, чтобы определить это поведение, достаточно установить его для одной какой-либо функции  $f \in \mathcal{M}$ . Например, оказывается, что все функции вида

$$f(x) = \frac{1}{(a-x)^m} + \varphi(x),$$

где  $a > 1$ ,  $m > 1$  и  $\varphi(x)$  — произвольная функция, регулярная в эллипсе с фокусами  $-1, 1$ , содержащем внутри точку  $a$ , имеют одно и то же асимптотическое поведение  $E_n(f)$ , следовательно, достаточно исследовать с этой точки зрения функции  $(a-x)^{-m}$ . Другой пример: функции вида  $f(x) = |x| + \varphi(x)$ , заданные на отрезке  $[-1, 1]$ , где  $\varphi(x)$  имеет непрерывную производную  $\varphi'(x)$ , оказывается, имеют одно и то же асимптотическое поведение  $E_n(f)$  — для каждой из них существует один и тот же предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n E_n(f) = \mu.$$

На втором примере можно проиллюстрировать дальнейшее развитие идей, связанных с этой постановкой вопроса.

Функция может иметь особенности вида  $|x|$  в нескольких точках даже на всюду плотном на отрезке  $[-1, +1]$  счетном множестве, и это не мешает в ряде случаев определить для нее эффективно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n E_n(f).$$

<sup>19</sup> Говорят, что  $a_n$  равно  $b_n$  асимптотически при  $n \rightarrow \infty$ , и пишут  $a_n \approx b_n$  ( $n \rightarrow \infty$ ), если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ .



Б. А. Рымаренко.



И. И. Ибрагимов.

Данный круг вопросов составляет целое направление в теории приближений, начало которому положил С. Н. Бернштейн еще в 10-х годах, решив ряд задач об асимптотическом поведении наилучших приближений функций  $|x|$ ,  $(a-x)^{-m}$  и др. В его монографиях систематизированы полученные им результаты, которые дают точные и асимптотические выражения  $E_n(f)$  для аналитических функций, имеющих вне отрезка  $[-1, +1]$  различные особенности (полюс, логарифмическую особенность и др.).

Для указанных выше задач найдены в ряде случаев решения не только в метрике  $C$ , но и в метрике  $L$ , отдельные результаты относятся к случаю  $L_p$ .

Изучению поведения приближений, в частности наилучших, функции, имеющей особенности, посвящены также работы

Н. И. Ахиезера, В. К. Дзядыка, Я. Л. Геронимуса, И. И. Ибрагимова, С. М. Никольского и др.

*Интерполяционные многочлены.* Одним из важных средств для приближения функций являются интерполяционные многочлены Лагранжа, т. е. алгебраические многочлены  $P_n(x)$  степени  $n$ , совпадающие с функцией  $f(x)$  в заданных  $n+1$  точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  — узлах интерполирования. Многочлен Лагранжа может быть записан в виде

$$P_n(f, x) = \sum_k^n l_k^{(n)}(x) f(x_k),$$

где  $l_k^{(n)}(x)$  — многочлены степени  $n$ , зависящие от распределения узлов. Его норма  $M_n$  удовлетворяет равенству

$$M_n = \max_x \sum_{k=0}^n |l_k^{(n)}(x)|,$$

где максимум распространен на отрезок  $[a, b]$ , на котором рассматриваются значения  $P_n(f, x)$ . Будем, как обычно, считать, что это есть отрезок  $[-1, +1]$ , причем он содержит и все узлы интерполяции.

В начале XX в. было известно неравенство (Бернштейн, Фабер)

$$M_n > C \log n, \quad (29)$$

где  $C$  — константа, не зависящая от распределений узлов интерполяции. Таким образом, всегда  $M_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , откуда следует, что на отрезке  $[-1, +1]$  существует непрерывная функция  $f(x)$ , для которой интерполяционный многочлен  $P_n(f, x)$ , при  $n \rightarrow \infty$ , не может сходиться равномерно. Было известно также, что неравенство (29) достигается в смысле порядка для интерполяционного многочлена, узлы ко-

торого совпадают с нулями многочлена Чебышева  $\cos(n+1) \arccos x$ . С. Н. Бернштейн показал, что для этого интерполяционного многочлена

$$M_n \approx \frac{2}{\pi} \ln n \quad (n \rightarrow \infty).$$

Норма  $M_n$  входит в важное неравенство Лебега

$$|f(x) - P_n(f, x)| \leq (1 + M_n) E_n(f) \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad (30)$$

которое дает оценку приближения функции  $f(x)$  при помощи интерполяционного многочлена  $P_n(f, x)$ . Как показал в 1934 г. А. Н. Колмогоров, в этом неравенстве константу  $1 + M_n$  уменьшить нельзя.

Таким образом, хорошие приближения можно ожидать для интерполяций с чебышевскими или близкими к ним узлами. Этим объясняется тот факт, что основная масса исследований, связанная с установлением сходимости интерполяционных многочленов и нахождением оценок приближений для различных классов функций (удовлетворяющих условию Липшица, дифференцируемых и т. д.), относится к случаю чебышевских или близких к ним распределений узлов интерполяции. В периодическом случае речь идет об интерполировании функций тригонометрическими многочленами (роль чебышевских узлов здесь играют равноотстоящие узлы интерполяции). Результаты, связанные со сходимостью интерполяционных многочленов Лагранжа и некоторых их обобщений, получены С. Н. Бернштейном, Н. М. Крыловым, В. И. Крыловым, С. М. Лозинским, С. М. Никольским и др.

Интерполяционный многочлен Лагранжа не обеспечивает сходимость процесса для любой непрерывной функции. С. Н. Бернштейн, Н. М. Крылов и другие математики изучали многочлены  $Q_{n+m}(f, x)$  степени  $n+m$ , совпадающие с функцией  $f$  в  $n$  узлах интерполяции, с целью установления такой сходимости. Бернштейн показал, что в случае  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = \varepsilon > 0$  возможны распределения узлов, при которых обеспечивается сходимость процесса для любой непрерывной функции. Будет ли этот факт иметь место хотя бы для одной последовательности чисел  $m = m(n)$ , для которой  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = 0$ , неизвестно. К этому кругу вопросов относятся работы Д. Л. Бермана.

Исследованию сходимости многочленов Бернштейна

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (-1 \leq x \leq 1),$$



В. К. Дзядык.



Е. В. Вороновская.

открытых Бернштейном еще в 1912 г., и их обобщений посвящены работы С. Н. Бернштейна, А. О. Гельфонда, Л. В. Канторовича, Е. В. Вороновской, И. Г. Соколова, И. Н. Хлодовского и др. И. Н. Хлодовский, например, в 1930 г. показал, что если функция  $f$  имеет на отрезке  $[-1, 1]$  непрерывную производную  $f^{(r)}$  порядка  $r$ , то  $B_n^{(r)}(f, x) \rightarrow f^{(r)}(x)$  равномерно. С другой стороны, было установлено, что порядок приближения полиномами  $B_n(f, x)$  весьма плохой. Например, как показала Е. В. Вороновская в 1932 г., если функция  $f$  имеет в точке  $x$  вторую не равную нулю производную, то порядок приближения в ней строго равен  $\frac{1}{n}$ .

Если функция  $f$  аналитическая на отрезке  $[-1, 1]$ , то это обстоятельство приводит к сходимости  $B_n(f, x) \rightarrow f(x)$

не только на отрезке  $[-1, 1]$ , но и за его пределами, причем область сходимости может быть установлена по определенным аналитическим свойствам  $f(x)$  (Л. В. Канторович, С. Н. Бернштейн).

*Классы функций.* Выше отмечалось, что для современной теории приближений функций характерна постановка задач о сходимости и об оценках приближений многочленами не отдельных функций, а целых их классов. Чтобы оценка приближения данного класса функций тем или иным методом приближения стремилась к нулю, при неограниченном возрастании порядка многочленов следует выбирать компактные классы. Условиям компактности удовлетворяют классы функций<sup>20</sup>, имеющих производную заданного порядка  $r > 0$ , ограниченную заданной константой или (при  $r \geq 0$ ) удовлетворяющую условию Липшица<sup>21</sup> степени  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) с данной константой. Эти классы в настоящее время весьма широко применяются в анализе, поэтому естественно, что именно для них ставились и решались многие задачи об оценках приближений. Для некомпактных классов оценка заведомо не может стремиться к нулю. Сравнительно недавно начали уделять внимание классу так называемых квазигладких функций (после того как в 1945 г. Зигмундом было выяснено, что в ряде вопросов анализа семейство классов функций Липшица степени  $\alpha$  при  $0 < \alpha < 1$  естественно пополнять классом квазигладких функций, а не классом Липшица степени 1).

По определению функция  $f(x)$  принадлежит к классу  $KW^{(r)}(a, b) = KW^{(r)}$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ), если она имеет абсолютно непрерывную

<sup>20</sup> Точнее, ограниченные множества, принадлежащие к этим классам.

<sup>21</sup> В другой терминологии о функциях, удовлетворяющих условию Липшица, говорят, что они удовлетворяют условию Гельдера.

производную порядка  $r - 1$  на интервале  $(a, b)$  и ее производная порядка  $r$  удовлетворяет (почти всюду) неравенству <sup>22</sup>

$$\|f^{(r)}\|_M = \sup_{a < x < b} |f^{(r)}(x)| \leq K. \quad (31)$$

Периодические, периода  $2\pi$ , функции класса  $KW^{(r)} = KW^{(r)}(-\infty, \infty)$  по определению образуют класс  $KW_*^{(r)}$ . Классы  $KW^{(r)}$ ,  $KW_*^{(r)}$  можно распространить и на нецелые  $r > 0$  на основе понятия дробной производной в смысле Лиувилля в непериодическом случае и в смысле Вейля в периодическом случае.

Будем еще говорить, что функция  $f(x)$  принадлежит к классу

$$KW^{(r)}H^{(\alpha)}(a, b) = KW^{(r)}H^{(\alpha)} \quad (r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1),$$

если она имеет производную  $f^{(r)}(x)$ , удовлетворяющую на отрезке  $[a, b]$  неравенству Липшица степени  $\alpha$   $(f^{(0)} = f)$

$$\|f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x)\| = \sup_{a < x, x+h < b} |f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x)| \leq K|h|^\alpha. \quad (32)$$

Удобно также рассматривать классы  $H^{(r)} = H^{(r)}(a, b)$  и им соответствующие периодические классы  $H_*^{(r)}$ , определенные для любого  $r > 0$ .

Пусть  $r > 0$  и  $r = \bar{r} + \alpha$ , где  $\bar{r}$  — целое и  $0 < \alpha \leq 1$ . Для нецелого  $r$  (т. е.  $0 < \alpha < 1$ ) полагаем  $KH^{(r)} = KW^{(r)}H^{(\alpha)}(a, b)$ , а для целого  $r$  функция  $f \in KH^{(r)}(a, b)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  непрерывную производную  $f^{(r)}(x)$ , удовлетворяющую условию квазигладкости

$$\begin{aligned} & \|f^{(r)}(x+h) - 2f^{(r)}(x) + f^{(r)}(x-h)\| = \\ & = \sup_{a < x-h < x < x+h < b} |f^{(r)}(x+h) - 2f^{(r)}(x) + f^{(r)}(x-h)| \leq kh. \end{aligned} \quad (33)$$

Справедлива следующая теорема об аппроксимации: для того чтобы  $f \in KH_*^{(r)}$ , необходимо и достаточно, чтобы наилучшее приближение  $E_n^*(f)$  (в метрике  $C$ ) при помощи тригонометрических многочленов порядка  $n$  удовлетворяло неравенству

$$E_n^*(f) \leq \frac{C}{n^r}, \quad (34)$$

где  $C$  — не зависящая от  $n$  константа. Это есть сформулированная выше (см. неравенство (27)) теорема Джексона — Бернштейна с дополнением Валле-Пуссена, к которой добавлен еще при целом  $r$  результат Зигмунда 1945 г. В непериодическом случае из  $f \in KH^{(r)}(-1, 1)$  следует неравенство (см. (24))

$$E_n(f) \leq \frac{C}{n^r}. \quad (35)$$

<sup>22</sup> При  $r = 0$  предполагается, что функции  $f$  измеримы.



Но из неравенства (35) следует только, что  $f \in KH^{(r)}(-a, a)$ , где  $a$  — любое число, удовлетворяющее неравенству  $0 < a < 1$ , и константа  $K$  зависит от  $a$ .

Большое внимание уделялось также изучению классов, более общих, чем  $KW^{(r)}H_{\infty}^{(\alpha)}$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ), определяемых по аналогии, где в правых частях неравенств (32) и (33) вместо  $|h|$  ставится неотрицательная функция  $\omega(h)$ , подчиняющаяся только общим ограничениям монотонности, выпуклости и т. д.

Классы  $KW^{(r)}$ ,  $KW^{(r)}H^{(\alpha)}$ ,  $KH^{(r)}$  определены в метрике  $(M)$  ограниченных функций. Поскольку сами функции этих классов (при  $r > 0$  или  $r = 0$ , но  $\alpha > 0$ ) непрерывны, то обычно их называют определенными в метрике  $C$ .

Важную роль в ряде исследований играют также классы  $KW_p^{(r)}$ ,  $KW_p^{(r)}H_p^{(\alpha)}$ ,  $KH_p^{(r)}$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ), определенные по аналогии в метрике  $L_p(a, b)$ , связанной с нормой

$$\|\psi\|_{L_p(a,b)} = \left( \int_a^b |\psi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Случай  $p = \infty$  соответствует метрике  $M$ ;  $L_{\infty}(a, b) = (M)$ ;  $KW_{\infty}^{(r)} = KW^{(r)}$ ;  $KW^{(r)}H_{\infty}^{(\alpha)} = KW^{(r)}H^{(\alpha)}$ ;  $KH_{\infty}^{(r)} = KH^{(r)}$ . Будем считать  $L(a, b) = L_1(a, b)$  и говорить о метрике  $L$  вместо  $(L_1)$ . Подобные соглашения примем и в периодическом случае.

Классы  $KW_p^{(r)}$  и  $KH_p^{(r)}$ , определенные для любого  $r > 0$ , составляют две основные в современном анализе независимые классификации дифференцируемых функций, впрочем тесно переплетающиеся между собой.

Для классов  $KH_p^{(r)}$ ,  $KH_p^{(r)*}$  верны сформулированные выше теоремы об аппроксимации (см. неравенства (34), (35)), если в них наилучшие приближения понимать в метрике  $L_p$  (заменить  $E_n(f)$ ,  $E_n^*(f)$  соответственно на  $E_n(f)_p$ ,  $E_n^*(f)_p$ ).

*Методы суммирования рядов Фурье.* Весьма большое количество работ посвящено вопросам теории приближений периодических (периода  $2\pi$ ) функций посредством так называемых методов суммирования рядов Фурье. Их можно объединить выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k_n(t-x) f(t) dt, \\ \left. \begin{aligned} a_k \\ b_k \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \begin{aligned} \cos kt \\ \sin kt \end{aligned} dt, \\ k_n(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kt, \end{aligned} \tag{36}$$

где  $\lambda_k^{(n)}$  — зависящие от  $k$  и  $n$  коэффициенты, определяющие метод приближения. Суммам  $\sigma_n(f, x)$  соответствуют суммы интерполяционного типа

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_n(f, x) &= \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx) = \\ &= \frac{2}{m} \sum_{i=0}^m k_n (x - x_i^{(m)}) f(x_i^{(m)}),\end{aligned}\quad (37)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_k^{(n)} \\ b_k^{(n)} \end{array} \right\} = \frac{2}{m} \sum_{i=0}^m \begin{array}{l} \cos kx_i^{(m)} \\ \sin kx_i^{(m)} \end{array} f(x_i^{(m)}),$$

$$x_i^{(m)} = \frac{2\pi i}{m+1} \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Все классические методы приближения периодических функций тригонометрическими многочленами входят как частные случаи сумм (36) и (37). Например, сумма (36) при  $\lambda_k^{(n)} = 1$  есть сумма Фурье, а при  $\lambda_k^{(n)} = \frac{n+1-k}{n+1}$  — сумма Фейера. При соответствующем подборе коэффициентов  $\lambda_k^{(n)}$  из выражений (36) получаются известные суммы Валле-Пуссена, Джексона, Бернштейна — Рогозинского. При  $\lambda_k^{(n)} = 1$  и  $m = 2n$  сумма (37) есть тригонометрический интерполяционный многочлен Лагранжа с равноотстоящими узлами  $(x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, k = 0 \pm 1, \dots)$  интерполяции. Многие задачи теории приближения функций решены в терминах сумм (36).

Из общих соображений следует, что для сходимости  $\sigma_n(x)$  в классе  $C$  всех непрерывных периодических функций необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} |K_n(t)| dt \leq M \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (38)$$

где  $M$  — некоторая константа, и чтобы коэффициенты метода удовлетворяли условию сходимости

$$\lambda_k^{(n)} \rightarrow 1 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (39)$$

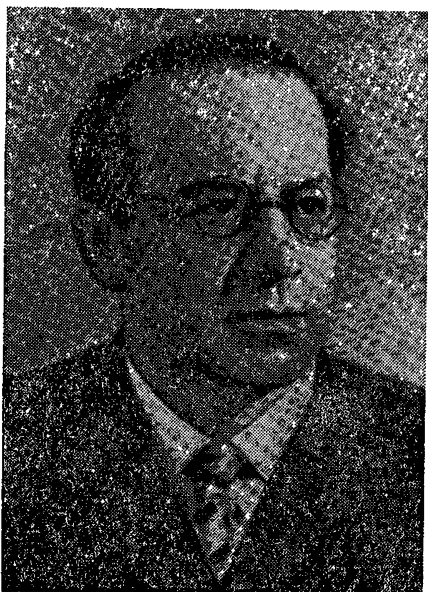
Проверка условия (39) обычно не представляет труда, поэтому все внимание уделялось выяснению вопроса о выполнении условия (38).

Подобные два условия можно записать для суммы  $\tilde{\sigma}_n$ .

Изучение сходимости велось сначала в отдельных классических случаях сумм (36) и (37) (С. Н. Бернштейн, И. П. Натансон). В 40-х годах наметилась тенденция изучения этих вопросов в общем виде, когда на числа  $\lambda_k^{(n)}$  накладываются только общие ограничения монотонности, выпуклости, квазивыпуклости и т. д. (А. В. Ефимов, С. М. Ни-



А. Ф. Тиман.



А. Х. Турецкий.

кольский, А. Ф. Тиман и др.). Специально изучен случай, когда ядро  $K_n(t)$  неотрицательно. В этом случае, как показал П. П. Коровкин, из  $\lambda_1^{(n)} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ) следует выполнение всех остальных условий (39), т. е. сходимость  $\sigma_n$  для всех  $f \in C$ . Выяснена тесная связь между суммами  $\sigma_n$  и  $\bar{\sigma}_n$ . Показано, в частности (С. М. Лозинский), что если  $m$  имеет строго порядок  $n$ , то сходимость  $\sigma_n$  для всех  $f \in C$  влечет за собой сходимость  $\bar{\sigma}_n$  для всех  $f \in C$  и наоборот. Выяснена также тесная связь вопросов сходимости  $\sigma$  в метриках  $C$  и  $L$  (С. М. Никольский). Специально изучался случай, когда  $\lambda_k^{(n)} = \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ , где  $\varphi(x)$  — некоторая заданная функция (С. Б. Стечкин).

В результате указанных исследований стало известно при весьма общих условиях, для каких коэффициентов или ядер  $K_n$  суммы  $\sigma_n(f, x)$  и  $\bar{\sigma}_n(f, x)$  сходятся или равномерно сходятся к порождающим их непрерывным периодическим функциям или же сходимость имеет место в метрике  $L$ . Случай  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ) изучен в меньшей мере.

Сумма Фурье порядка  $n$  может служить примером линейной операции, переводящей каждую непрерывную периодическую функцию в тригонометрический многочлен  $T_n$  порядка  $n$ , при этом сами многочлены  $T_n$  остаются на месте — переводятся в себя же. Возможны и более общие операции, переводящие функции данного класса в многочлены  $(n + m)$ -го порядка и оставляющие многочлены порядка  $n$  на месте. Для подобных операций возможна постановка экстремаль-

ных задач. Например, оказывается, что сумма Фурье порядка  $n$  имеет в пространстве непрерывных периодических функций наименьшую норму среди норм линейных операций, переводящих непрерывные периодические функции в тригонометрические многочлены порядка  $n$ . Исследования в этом направлении проведены Д. Л. Берманом, С. М. Лозинским, В. Ф. Николаевым, Н. А. Сапоговым, Ф. И. Харшиладзе и др.

В последнее время у нас (А. Х. Турецкий, Ф. И. Харшиладзе и др.) и за рубежом (Фавар, Заманский и др.) уделялось внимание изу-

чению с общей точки зрения специальных методов  $\sigma_n(f, x)$  приближения вида (36), определяемых некоторыми матрицами коэффициентов  $\{\lambda_k^{(n)}\}$ . Этим матрицам можно привести в соответствие определенный класс  $\mathcal{M}$  (насыщения) непрерывных функций и убывающую к нулю последовательность чисел  $\{\alpha_n\}$  так, что справедливы следующие свойства: порядок приближения любой <sup>23</sup> непрерывной функции  $f$  при помощи  $\sigma_n(f, x)$  не меньше, чем порядок  $\alpha_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Для функций же класса  $\mathcal{M}$  этот порядок строго равен порядку  $\alpha_n$ .

*Константы приближений классов периодических функций.* В начале нашего столетия математики, ставя вопрос о получении оценки приближения функций данного класса при помощи того или иного метода, обычно удовлетворялись выяснением только порядка приближения при неограниченном возрастании степени  $n$  приближающего многочлена, совсем не заботясь о том, чтобы полученные константы, характеризующие порядок приближения, были наименьшими возможными константами или насколько возможно близкими к наименьшим константам. В середине 30-х годов появилась тенденция получать точные и асимптотически точные оценки приближений классов функций. Точная постановка вопроса, принадлежащая А. Н. Колмогорову, заключается в следующем.

Задан класс  $\mathcal{M}$  функций  $f$  и метод  $U_n(f) = U_n(f, x)$  приближения их многочленами. Необходимо определить точную верхнюю грань норм отклонений  $U_n(f)$  от  $f$ , распространенную на все функции  $f$  класса  $\mathcal{M}$ ,

$$\varepsilon_n(\mathcal{M})_E = \sup_{f \in \mathcal{M}} \|f - U_n(f)\|_E, \quad (40)$$

или узнать ее асимптотическое поведение. Норма  $\|\cdot\|_E$  определяется здесь пространством (метрикой), в котором ведутся рассуждения.

А. Н. Колмогоров в 1935 г. получил первую конкретную асимптотическую оценку  $\varepsilon_n(\mathcal{M})_C$  в метрике  $C$  в случае периодического класса  $W_*^{(r)}(k)$  функций для сумм Фурье  $S_n(f, x) = U_n(f, x)$ . Затем, в 1940 г., С. М. Никольский нашел асимптотические выражения констант  $\varepsilon_n(\mathcal{M})_C$  и  $\varepsilon_n(\mathcal{M})_L$  для ряда эффективных классических методов приближения функций — сумм Фурье, Фейера, интерполяционных многочленов и др. В дальнейшем эти исследования развивались другими математиками. В результате в ряде важных для анализа случаев эффективных приближений и классов функций были получены асимптотические или точные значения для констант  $\varepsilon_n(\mathcal{M})_C$  и  $\varepsilon_n(\mathcal{M})_L$ . В последнее время получены такие оценки для сумм вида (36) и (37) при достаточно общих ограничениях на коэффициенты  $\lambda_k^{(n)}$ . Существенные исследования в этом направлении принадлежат А. В. Ефимову, С. А. Теляковскому, А. Ф. Тиману. С. Б. Стечкин в 1953 г. получил асимптотическую оценку  $\varepsilon_n(\mathcal{M})$  для класса комплексных периодических функций при приближении их суммами Фурье и Фейера. Каждая функция  $f(\Theta) = f_1(\Theta) + + if_2(\Theta)$  этого класса принадлежит к классу комплексных функций

<sup>23</sup> За исключением, может быть, некоторых функций, линейные комбинации которых образуют конечномерное подпространство.



Н. П. Корнейчук.

тивных формул <sup>24</sup>. Задача (41) рассматривалась сначала в периодическом случае в метрике  $C$ . Первые результаты в этом направлении у нас были получены Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном (1937 г.), нашедшими точные выражения констант  $\varepsilon_n(\mathcal{M})$  для некоторых классов периодических дифференцируемых функций, приближаемых наилучшими тригонометрическими многочленами. Затем Н. И. Ахиезер получил точные константы для класса аналитических функций. К более поздним относятся исследования С. М. Никольского (1946 г.), рассмотревшего эти вопросы в метрике  $L$ , В. К. Дзядыка (1953 г.), получившего точные константы для дробных периодических классов  $KW^{(r)}$ , К. И. Бабенко (1958 г.), решившего вопрос в случае комплексных классов  $KW^{(r)}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ), Л. В. Тайкова, продолжившего эти исследования и получившего некоторые константы в метрике  $L_p$ , Н. П. Корнейчука (1961 г.), решившего долго не поддававшуюся решению задачу о точном значении константы  $E_n(KH^{\alpha})_C$ .

Можно определить линейные операции  $U_n(f)$ , отображающие  $E$  в тригонометрические многочлены порядка  $n$ , и среди них такую  $U_n^*(f)$ , называемую наилучшим линейным методом для класса  $\mathcal{M}$ , для которой

$$\min_{U_n \in \mathcal{M}} \sup \|f - U_n(f)\|_E = \sup_{f \in \mathcal{M}} \|f - U_n^*(f)\|_E = E_n^*(\mathcal{M})_E.$$

Для описанных выше экстремальных задач, как правило,  $E_n^*(\mathcal{M}) = E_n(\mathcal{M})_E$  и наилучший линейный метод представляет собой некоторую сумму вида (36) при определенных значениях коэффициентов  $\lambda_h^{(n)}$ .

<sup>24</sup> Исключение составляет случай метрики  $L_2$ .

$KW^{(r)}$  и является граничной на единичном круге  $\sigma$  для некоторой аналитической на  $\sigma$  функции.

*Константы наилучших приближений периодических функций.* Немало исследований посвящено вопросу о нахождении точного значения верхней грани

$$\sup_{f \in \mathcal{M}} E_n(f)_E = E_n(\mathcal{M})_E \quad (41)$$

наилучших приближений периодических функций  $f$  тригонометрическими многочленами, распространенной на класс  $\mathcal{M}$  в метриках  $C$  и  $L$ . Задачу (41) можно рассматривать как частный случай задачи (40), где  $U_n(f, x)$  есть наилучший многочлен степени  $n$ , приближающий функцию  $f$ . Впрочем, хотя  $U_n(f, x)$  есть существующий единственный многочлен, для точного его вычисления (для произвольной функции  $f$ ) нет достаточно эффективной функции  $f$ ) нет достаточно эффективной функции  $f$ ) нет достаточно эффективной функции  $f$ )

Однако, как показал Н. П. Корнейчук, в случае  $\mathcal{M} = KH^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) и метрики  $C$  это утверждение теряет силу.

*Непериодические функции. Константы приближений классов.* Непериодические функции, заданные на конечном отрезке, естественно приближать алгебраическими многочленами.

Пусть  $\mathcal{M}$  — класс функций  $f$ , заданных на отрезке  $[a, b]$  и  $U_n(f, x)$  — их приближения. Определим верхнюю грань  $\varepsilon_n(\mathcal{M}; x) = \sup_{f \in \mathcal{M}} |f(x) - U_n(f, x)|$

при фиксированном  $x \in [a, b]$ . С. М. Никольским (1944 г.) получены асимптотические выражения констант  $\varepsilon_n(\mathcal{M}; x)$  для классов дифференцируемых функций, заданных на отрезке  $[-1, 1]$  в случаях сумм Чебышева и других многочленов  $U_n(f, x)$ . Непериодический случай имеет особенности. В то время как для периодических классов константа  $\varepsilon_n(\mathcal{M}; x) = \varepsilon_n(\mathcal{M})_C$  (см. формулы (36)), как правило, не зависит от  $x$ , для непериодических классов в важных для анализа случаях она существенно зависит от  $x$ . И. М. Ганзбургом, А. Ф. Тиманом и другими подобные зависящие от  $x$  константы получены в ряде других важных случаев.

С. М. Никольский (1946 г.) нашел асимптотические величины верхних граней  $E_n(f)_C$  для класса  $W^{(1)}(-1, +1)$  и  $E_n(f)_L$  для класса  $W^{(r)}(-1, +1)$  ( $r = 1, 2, \dots$ ). Эти исследования были продолжены С. Н. Бернштейном, получившим (1946 г.) асимптотику для классов  $KW^{(r)}(-1, +1)$  ( $r = 2, 3, \dots$ ) и выяснившим связь между асимптотиками периодических и непериодических классов  $KW^{(r)}H^{(\alpha)}$  ( $r = 1, 2, \dots, 0 < \alpha < 1$ ).

На языке только наилучших приближений  $E_n(f)$  невозможно дать полную характеристику непериодического класса  $KH^{(r)}(-1, +1)$ . Однако В. К. Дзядык и А. Ф. Тиман доказали (1951—1956 гг.) теорему, которая в качестве гипотезы была высказана С. М. Никольским: функция класса  $KH^{(r)}(-1, +1)$  полностью характеризуется тем, что для нее существует последовательность алгебраических многочленов  $P_n(x)$ , отклонение которых от  $f(x)$  на отрезке  $[-1, +1]$  имеет

порядок величины  $\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^\alpha$ . В. К. Дзядык распространил эти ре-

зультаты на комплексный случай. Дополнительные результаты, относящиеся к этому вопросу, получены И. Е. Гопенгаузенем и С. А. Теляковским. В метрике  $L_p$  соответствующие результаты получены сначала Г. Н. Лебедем и М. К. Потаповым, а затем В. П. Моторным, полностью завершившим решение вопроса.

*Проблема Колмогорова о поперечниках.* В 1936 г. А. Н. Колмогоров поставил следующую задачу. Пусть в некотором линейном нормированном пространстве функций  $(H)$  задано множество  $\mathcal{M}$ ; требуется найти в  $(H)$   $n$  таких функций  $\psi_1, \dots, \psi_n$  ( $n$  задано), чтобы верхняя грань  $\varepsilon_n(\mathcal{M})$  расстояний (наилучших приближений)  $f \in \mathcal{M}$  до линейного подпространства  $R^{(n)}$ , натянутого на  $\psi_1, \dots, \psi_n$ , была наименьшей из возможных. Колмогоров решил эту задачу в метрике  $L_2$ , получившую название задачи о наименьшем поперечнике класса  $\mathcal{M}$ , когда  $\mathcal{M} = KW_{2*}^{(r)}$  и  $\mathcal{M} = KW_2^{(r)}(-1, 1)$ . В случае класса  $KW_*^{(r)}$  искомые суммы  $\sum \alpha_k \psi_k$  оказались тригонометрическими многочленами.

Колмогоров решил эту проблему также в метрике  $C$  для некоторых отдельных случаев. Его исследования продолжил В. М. Тихомиров. Он решил (1960 г.) задачу о поперечниках в общем случае классов дифференцируемых функций и классов функций, удовлетворяющих условию Липшица степени  $\alpha$ . Здесь, как и в метрике  $L_2$ , в периодическом случае искомые суммы являются тригонометрическими многочленами. С. Б. Стечкин выяснил (1954 г.) порядок убывания поперечников, К. И. Бабенко получил (1960 г.) решение проблемы Колмогорова в метрике  $L_2$  для классов функций многих переменных, таких, что результаты действия на них общего дифференциального оператора имеют ограниченную в смысле  $L_2$  норму.

*Теорема Чебышева.* В исследованиях, начатых в 30-х годах, Е. Я. Ремез теоретически обосновал сходимость различных приближенных методов получения наилучших многочленов. Его методы сводятся к некоторым итерационным процессам или аппроксимации равномерных приближений степенными. В работах С. И. Зуховицкого, Е. Я. Ремеза и других обоснованы также в ряде случаев приближенные методы решения системы несовместных между собой линейных уравнений.

А. Н. Колмогоров распространил (1948 г.) теорему Чебышева, дающую критерий наилучшего приближения в метрике  $C$ , на случай приближения функций в комплексной области при помощи обобщенных многочленов вида  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(z)$ . В этом направлении выполнены работы и другими математиками.

Л. Г. Шнирельман (1938 г.), М. И. Морозов (1952 г.), М. Ш. Пинскер (1954 г.) и другие обосновали теоремы типа Чебышева и Валле-Пуссена для случаев, когда приближающая функция зависит нелинейно от  $n$  параметров.

*Наилучшее приближение функции и ее модуль непрерывности.* Согласно теореме Вейерштрасса, наилучшие приближения  $E_n(f)$  непрерывной функции на отрезке  $[a, b]$  образуют последовательность чисел  $\alpha_n = E_n(f)$ , монотонно убывающих к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . С. Н. Бернштейн в 1938 г. дополнил эту теорему, показав, что для любой монотонно убывающей к нулю числовой последовательности  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  можно построить непрерывную на отрезке  $[a, b]$  функцию  $f$ , такую, что одновременно для всех  $n = 1, 2, \dots$  выполняются равенства  $\alpha_n = E_n(f)$ .

Теорема Джексона, обобщенная на пространство  $L_p^*$ , дает оценку наилучшего приближения  $E_n^*(f)_p$  периодической функции  $f$  посредством ее модуля непрерывности  $\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_p$  (в метрике  $L_p^*$ ). А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман получили в 1950 г. оценку<sup>25</sup>  $\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_p$  посредством некоторой конечной комбинации из  $E_n(f)_p$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ) при  $1 \leq p < \infty$ , обобщенную С. Б. Стечкиным на случай  $p = \infty$ . М. Ф. Тиману принадлежат некоторые дальнейшие результаты в этом направлении.

<sup>25</sup> Подобную оценку в одном частном случае получил Р. Салем (1940 г.).

С. Б. Стечкиным в работе 1949 г., продолженной затем им, Н. К. Бари, С. М. Лозинским и другими исследователями, изучен вопрос о том, какова должна быть функция  $\omega(\delta)$ , чтобы свойства  $\omega(f, \delta) \sim \omega(\delta)$  ( $0 < \delta < 1$ ) и  $E_n(f) \sim \omega\left(\frac{1}{n}\right)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) были эквивалентными<sup>26</sup>.

*Приближение многочленами с целыми коэффициентами.* Проблемы, связанные с решением задач приближения функций при помощи многочленов с целыми коэффициентами, имеют характерные особенности, носящие теоретико-числовой характер и отличающие их от обычных проблем приближения, когда на приближающие многочлены не накладываются ограничения. Эти проблемы изучались в начале 30-х годов С. Н. Бернштейном, Л. В. Канторовичем, Р. О. Кузьминым, а позднее А. О. Гельфондом и его учеником Э. Апарисио-Бернардо.

*Приближение на оси с весом.* Бернштейн предложил (1924 г.) приближать функции, заданные на всей действительной оси, с весом  $\Phi(x)$ , удовлетворяющим условиям

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\Phi(x)} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (42)$$

приближаемые функции  $f$  подчиняются условию

$$\|f\|_{\Phi} = \sup \left| \frac{f(x)}{\Phi(x)} \right| < \infty. \quad (43)$$

Функция  $\Phi(x)$  называется *весовой*, если любая непрерывная функция  $f$  с конечной нормой (43) приближается с любой степенью точности алгебраическими многочленами с весом  $\Phi$ . Бернштейн нашел условия, которым должна удовлетворять функция  $\Phi$ , чтобы быть *весовой*.

В последние 15 лет к рассматриваемым вопросам был проявлен большой интерес у нас и за рубежом. Особенное внимание уделялось нахождению необходимых и достаточных условий для того, чтобы функция  $\Phi$  была *весовой*. В результате эта задача в настоящее время изучена весьма полно при различных постановках вопроса. Вообще говоря, возможны различные варианты определения *весовой* функции.

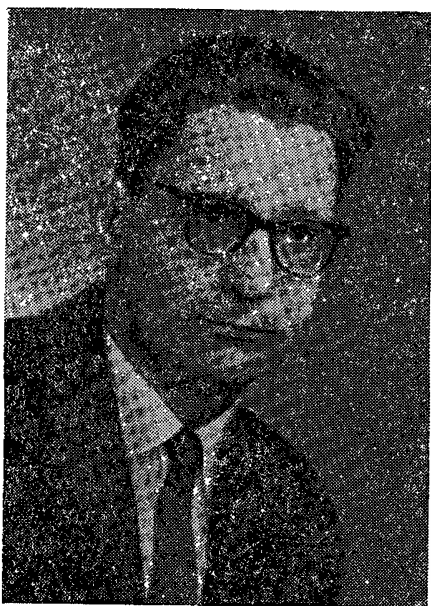
Большое внимание уделялось также вопросам оценок приближений в случае *весовых* классов. Существенные результаты в этом направлении получены С. Н. Бернштейном, С. Н. Мергеляном, Н. И. Ахиезером,

<sup>26</sup> Если функции  $\lambda_1(x), \lambda_2(x) > 0$  ( $x \in I$ ), то  $\lambda_1(x) \sim \lambda_2(x)$  ( $x \in I$ ) означает, что для некоторых положительных констант  $C_1, C_2$ , не зависящих от  $x$ ,  $C_1 < \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} < C_2$ .



Е. Я. Ремез.





В. А. Марченко.

К. И. Бабенко, М. М. Джрбашьяном, О. И. Иноземцевым, А. Л. Шагиняном и др.

*Целые функции конечной степени.* Много работ посвящено целым функциям экспоненциального типа и вопросам приближения на действительной оси при помощи функций экспоненциального типа. С. Н. Бернштейн называет такие функции функциями конечной степени. В 1923 г. он доказал неравенство (неравенство Бернштейна)

$$|q'_v(x)| \leq v_{\max} |q_v(x)| \quad (44)$$

для целых функций степени  $v$ , являющегося аналогом соответствующего неравенства для тригонометрических полиномов. В 1938 г. он установил связь задачи об асимптотическом поведении наилучшего приближения функции  $|x|^p$  на отрезке  $[-1, 1]$  с задачей о наилучшем приближе-

нии  $|x|^p$  на действительной оси при помощи целых функций степени 1. М. Г. Крейн получил (1938 г.) точные константы приближения классов дифференцируемых на действительной оси функций и их обобщений при помощи функций конечной степени<sup>27</sup>. Эти константы аналогичны описанным выше для случая периодических функций и в соответствующих классах равны между собой.

После 1946 г. С. Н. Бернштейн интенсивно изучал функции конечной степени. Он разработал теорию приближения на действительной оси при помощи целых функций конечной степени, аналогичную теории приближения периодических функций тригонометрическими многочленами. Бернштейн, значительно обобщив свои прежние результаты, связанные с неравенствами вида (44), решил некоторые интерполяционные задачи для целых функций конечной степени. Исследования в этих направлениях принадлежат также Н. И. Ахиезеру, Б. Я. Левину, Н. Н. Мейману и др.

Б. М. Левитан предложил (1937 г.) эффективный способ получения последовательности тригонометрических многочленов, сходящейся к ограниченной на оси функции конечной степени. Эти его исследования были обобщены затем в работах С. Н. Бернштейна, Н. И. Ахиезера, В. А. Марченко и др.

О других неравенствах для целых функций экспоненциального типа говорилось выше — см. «Экстремальные свойства многочленов».

*Приближение функций многих переменных.* К вопросам приближения функций многих переменных большой интерес возник в последние 15 лет. Целью исследований было распространение на  $n$  переменных

<sup>27</sup> Подобные результаты в 1938 г. получены также венгерским математиком Надем.

результатов, известных для одной переменной. Но возникли и новые задачи.

С. Н. Бернштейн показал, что наилучшее приближение  $E_{m,n}(f)$  периодической функции  $f(x, y)$  при помощи тригонометрических многочленов  $T_{m,n}$  порядка  $m$  по  $x$  и  $n$  по  $y$  оценивается с помощью величин  $E_{m,\infty}(f)$  и  $E_{\infty,n}(f)$ , первая из которых есть наилучшее приближение  $f$  при помощи функций, являющихся тригонометрическими многочленами порядка  $m$  только в отношении переменной  $x$ , а вторая определяется по аналогии. Он распространил на многие переменные прямую и обратную теоремы аппроксимации (см. неравенство (34)).

С. М. Никольский на основе полученных им неравенств для тригонометрических многочленов  $T_{m,n}$  и целых функций экспоненциального типа разработал методы теории приближения, с помощью которых можно определить дифференциальные свойства функции  $f$  многих переменных в одной метрике  $L_p$ , если известны подобные свойства в другой метрике, или определить дифференциальные свойства следа  $f$  на координатном подпространстве, если известны такие свойства на всем пространстве. Эти исследования имеют непосредственную связь с теоремами вложения. Точные константы приближений для классов функций многих переменных получены П. Т. Бугайцем, Я. С. Бугровым и др. И. Ю. Харрик, В. П. Ильин и другие установили теоремы об аппроксимации типа теорем Джексона для областей с кривыми границами. О. В. Бесов нашел, на языке наилучших приближений целыми функциями экспоненциального типа, необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция, для того чтобы она принадлежала к введенному им классу  $B_{p,\Theta}^{r_1, \dots, r_n}$  функций многих переменных, имеющему в настоящее время большое значение в теории теорем вложения. Для одной переменной в периодическом случае при  $\Theta = p$  эти условия следуют из результатов А. А. Конюшкова и П. Л. Ульянова.

Определенные выше классы  $H_p^{(r)}$  функций одной переменной распространяются на многие переменные в виде классов  $H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}$  ( $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$ ). Функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  класса  $H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}$  принадлежит по переменной  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) к классу  $H_{p_j}^{r_j}$  равномерно в известном смысле относительно остальных переменных. Для классов  $H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}$  С. М. Никольским получены прямые и обратные им теоремы аппроксимации тригонометрическими многочленами и целыми функциями экспоненциального типа.

Функции класса  $H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}$  имеют смешанные производные, порядок которых во всяком случае не выше наибольшего из чисел  $r_j$ . В этом смысле можно говорить, что у функций  $f \in H_{\vec{p}}^{(\vec{r})}$  доминируют несме-

шанные производные. Но возможно определение классов функций многих переменных с доминирующей смешанной производной. Такие классы полностью (С. М. Никольский) определяются не теоремами аппроксимации, а теоремами о представлении многочленами. Этим вопросам посвящены также исследования Н. С. Бахвалова, Я. С. Бугрова и др.

*Проблема моментов.* Эта проблема заключается в изучении последовательности чисел (моментов) вида

$$S_k = \int_a^b U_k(x) d\sigma(x) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (45)$$

где  $U_k(x)$  образуют заданную последовательность функций. После исследований Стильеса, который изучил степенную проблему моментов, соответствующую случаю  $U_k(x) = x^k$ , большое внимание уделялось вопросу об условиях, которым должна удовлетворять наперед заданная последовательность чисел  $S_k$  для того, чтобы существовала функция  $\sigma(x)$  ограниченной вариации (часто просто неубывающая функция), для которой равенства (45) выполнялись бы при всех  $k = 1, 2, \dots$  Исследования в этом направлении принадлежат С. Н. Бернштейну, Н. И. Ахиезеру, Я. Л. Геронимусу, М. Г. Крейну и др.<sup>28</sup>

С. Н. Бернштейну принадлежат также фундаментальные работы (1926 г.) по континуальной проблеме моментов,

$$f(x) = \int_0^\infty e^{xt} d\sigma(t),$$

приведшей его к теории абсолютно монотонных и регулярно монотонных функций. К этим вопросам относится исследование В. К. Дзядыка (1961 г.), разработавшего методы наилучшей аппроксимации таких функций в метрике  $L$ .

### **Теория дифференцируемых функций многих переменных (теоремы вложения)**

Теория дифференцируемых функций многих переменных возникла в 30-х годах в математической физике. Первые фундаментальные результаты в этой теории принадлежат С. Л. Соболеву (1937 г.). Полученные им теоремы вложения являются основными в ней. К этому времени значительную роль в математической физике начали играть функциональные методы. Понятие функционального пространства стало главным во многих ее построениях. В таких дисциплинах, как классическое вариационное исчисление или теория интегральных уравнений, еще в начале нашего столетия обычно базировались на понятиях функционального пространства. Та или иная теория или задача рассматривалась в одном случае в классе непрерыв-

<sup>28</sup> Отметим исследования по теории моментов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова, которых интересовал другой вопрос — предельные значения интегралов.

ных функций, в другом — в классе функций с интегрируемым квадратом, в третьем — в классе функций, производная которых интегрируема в данной степени, и т. д.

Постепенно в этом подходе наметился качественный скачок — один и тот же вопрос оказывалось плодотворным рассматривать в связи с различными функциональными пространствами. Прямую вариационную задачу мы часто решаем в классе функций, имеющих производные данного порядка с интегрируемым квадратом на данной области. Они удовлетворяют определенным граничным условиям и с этой точки зрения принадлежат еще и к другому классу функций, заданных на границе области и удовлетворяющих там определенным дифференциальным свойствам. Если мы нашли функцию, решающую задачу, то может возникнуть вопрос, какие непрерывные производные она имеет, т. е. к какому классу функций, имеющих равномерно непрерывные на области частные производные, она принадлежит. В этом примере одна и та же функция (решение вариационной задачи) принадлежит к трем классам (пространствам). Возникает вопрос о связи между ними. Простейшая связь заключается во вложении одного класса (пространства) в другой. Пусть  $E_1$  и  $E_2$  — линейные нормированные пространства. Будем говорить, что  $E_1$  вкладывается в  $E_2$  и писать  $E_1 \rightarrow E_2$ , если  $E_1 \subset E_2$  и существует не зависящая от  $x \in E_1$  константа  $c$ , такая, что

$$\|x\|_{E_2} \leq c \|x\|_{E_1},$$

где  $\|\cdot\|_{E_1}$  и  $\|\cdot\|_{E_2}$  — нормы соответственно в  $E_1$ ,  $E_2$ .

Классы  $W_p^{(r)}$  (целые  $r$ ). С. Л. Соболев рассматривал классы функций  $W_p^{(r)}(g)$ , заданных на области  $g$   $n$ -мерного действительного пространства  $R_n$  и имеющих на  $g$  все обобщенные частные производные  $f^{(\vec{k})}$  порядка  $r$  ( $r$  — целое неотрицательное), интегрируемые в  $p$ -й степени на  $g$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ). Для них определяется норма

$$\|f\|_{W_p^{(r)}(g)} = \|f\|_{L_p(g)} + \sum_{|\vec{k}|=r} \|f^{(\vec{k})}\|_{L_p(g)} \\ (\vec{k} = (k_1, \dots, k_n), \quad |\vec{k}| = \sum k_j), \quad (46)$$

где

$$\|\psi\|_{L_p(g)} = \left( \int_g |\psi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение обобщенной производной, предложенное Соболевым, заключается в следующем. Пусть  $g \subset R_n$  — открытое множество, Измеримая функция  $\psi$ , локально интегрируемая на любом открытом множестве  $\omega \subset \bar{\omega} \subset g$ , называется обобщенной производной от  $f$  порядка  $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n)$  и обозначается в виде

$$\psi = \frac{\partial^{\vec{k}} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}},$$

если для любой финитной на  $g$  функции  $\varphi$  справедливо равенство

$$\int_g \psi g dx = (-1)^{|\vec{k}|} \int_g f \varphi^{(\vec{k})} dx.$$

Функция  $\varphi$  называется здесь финитной на  $g$ , если она бесконечно дифференцируема на  $R_n$  и равна нулю вне некоторого зависящего от  $\varphi$  ограниченного замкнутого множества, принадлежащего к  $g$ . Определение обобщенной производной по Соболеву стало исходным при определении более общего понятия обобщенной функции (распределения).

С. Л. Соболев доказал теоремы вложения для классов  $W_p^{(r)}(g)$  в случае, когда  $g$  является областью звездной относительно некоторого шара или суммой таких областей. При этом он базировался на введенном им представлении функций  $f \in W_p^l$  интегралами типа потенциала. Сформулируем для простоты его основные теоремы в случае, когда  $g$  есть все  $n$ -мерное пространство  $R_n$ , а многообразие измерения  $m$  есть гиперплоскость  $R_m$ . Чтобы в дальнейшем не повторяться, сформулируем их с дополнениями В. И. Кондрашева и В. П. Ильина.

При условиях

$$1 \leq m \leq n, \quad 1 < p < p' < \infty, \\ 0 \leq k = l - \frac{n}{p} + \frac{m}{p'} \quad (47)$$

имеет место вложение

$$W_p^{(l)}(R_n) \rightarrow W_{p'}^{([k])}(R_m), \quad (48)$$

где  $[k]$  — целая часть  $k$ . Иначе говоря, если  $f \in W_p^{(l)}(R_n)$ , то имеет смысл след  $f$  на  $R_m$ ,

$$f|_{R_m} = \varphi \in W_{p'}^{([k])}(R_m),$$

и выполняется неравенство

$$\|\varphi\|_{W_{p'}^{([k])}(R_m)} \leq c \|f\|_{W_p^{(l)}(R_n)}, \quad (49)$$

где  $c$  — не зависит от  $f$ .

Здесь и всюду в дальнейшем след понимается в смысле предела в среднем. В рассматриваемых вопросах это эквивалентно понятию следа в смысле сходимости почти всюду или понятию следа как предела следов непрерывных функций, аппроксимирующих данную функцию в метрике рассматриваемого пространства.

Дополнение В. И. Кондрашева (1945 г.) относится к случаю  $k=0$ , а В. П. Ильина (1954 г.) — к случаю, когда  $k$  есть любое целое неотрицательное число ( $p < p'$ ). Вложение (48) не может быть улучшено в терминах классов  $W_p^{(l)}$  (с целыми  $l$ ).

Теоремы Соболева дают возможность установить по дифференциальным свойствам функции, выраженным в метрике  $L_p(R_n)$ , ее дифференциальные свойства, выраженные в метрике  $L_{p'}(R_m)$  при наличии соотношений (47). Кондрашев (1945 г.) усилил эти теоремы, показав, что входящие в правые части вложений классы  $W_{p'}^{([k])}$  могут

быть уточнены: частные производные  $[k]$ -го порядка, входящие в этот класс, удовлетворяют некоторым условиям Гельдера в соответствующей метрике.

Классы  $H_p^{(\vec{r})}$ . Следующим этапом в развитии рассматриваемой теории являются теоремы вложения Никольского, установленные им в 1951 г. для  $n$ -мерных классов, которые он обозначил  $H_p^{(\vec{r})}(g)$ ,  $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$ ,  $r_j \geq 0$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Пусть  $g$  — открытое множество в  $R_n$  и  $r_j = r_j + \alpha_j$  ( $\bar{r}_j$  — целое,  $0 < \alpha_j \leq 1$ ). По определению  $f \in H_p^{(\vec{r})}(g)$ , если  $f \in L_p(g)$ :

$$\left\| \Delta_{hx_j} \frac{\partial^{\bar{r}_j}}{\partial x_j^{\bar{r}_j}} f(x) \right\|_{L_p(g|h)} \leq M |h|^{\alpha_j} \quad \text{для } 0 < \alpha_j < 1 \quad (50)$$

и

$$\left\| \Delta_{hx_j}^2 \frac{\partial^{\bar{r}_j}}{\partial x_j^{\bar{r}_j}} f(x) \right\|_{L_p(g|h)} \leq M |h| \quad \text{для } \alpha_j = 1. \quad (51)$$

Здесь  $\Delta_{hx_j}^k$  — операция приращения  $k$ -го порядка с шагом  $h$  в направлении  $x_j$  и  $g_\delta$  — множество точек  $x$ , отстоящих от границы  $g$  на расстоянии не меньшем, чем  $\delta > 0$ .

С. М. Никольский показал, что при условиях

$$1 \leq m \leq n, \quad 1 \leq p \leq p' \leq \infty, \quad \vec{r} = (r_1, \dots, r_n),$$

$$\kappa = 1 - \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \right) \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} - \frac{1}{p} \sum_{m+1}^n \frac{1}{r_j} > 0 \quad (r_j \geq 0) \quad (52)$$

имеет место вложение

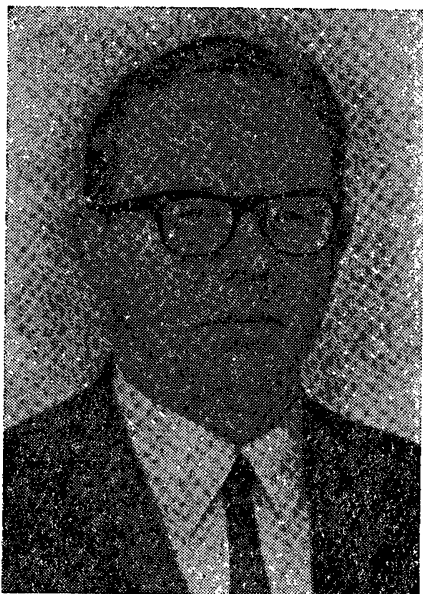
$$H_p^{(\vec{r})}(R_n) \rightarrow H_{p'}^{(\vec{\kappa}r_m)}(R_m), \quad (53)$$

где  $\vec{\kappa}r_m$  — проекция  $\vec{r}$  на  $R_m$ . В 1953 г. он впервые получил точные обратные теоремы вложения. В данном случае обратная теорема заключается в том, что при  $p = p'$  теорема (53) полностью обращается, что можно символически записать

$$H_p^{(\vec{\kappa}r_m)}(R_m) \rightarrow H_p^{(\vec{r})}(R_n),$$

$$\kappa = 1 - \frac{1}{p} \sum_{m+1}^n \frac{1}{r_j} > 0. \quad (54)$$

Это значит, что каждую определенную на  $R_m$  функцию  $\varphi$ , принадлежащую к классу  $H_p^{(\vec{\kappa}r_m)}(R_m)$ , где  $1 \leq m < n$ , можно продолжить на все пространство  $R_n$  так, что продолженная функция  $f$  будет иметь



Л. Д. Кудрявцев.

след  $f|_{R_m} = \varphi$ ,  $f \in H_p^{(\vec{r})}(R_n)$  и будет выполняться неравенство

$$\|f\|_{H_p^{(\vec{r})}(R_n)} \leq c \|\varphi\|_{H_p^{(\vec{r}_m)}(R_m)},$$

где  $c$  — не зависит от  $\varphi$ . На самом деле такое обращение было получено в более сложном случае: доказывалась возмож-

ность определения функции  $f \in H_p^{(\vec{r})}(R_n)$  такой, что она и ее определенные частные производные имеют следы на  $R_m$ , равные заданным функциям  $\varphi$ , принадлежащим к соответствующим классам  $H_p(R_m)$ . Л. Д. Кудрявцев показал (1959 г.), что продолжение  $f$  можно осуществить так, что оно будет бесконечно дифференцируемым на  $R_n - R_m$ , и указал наименьший порядок роста частных производных,

не имеющих следов на  $R_m$ , при стремлении аргумента к  $R_m$ . Обратные теоремы применяются в теории краевых задач. Они являются основой при выяснении дифференциальных свойств решения краевой задачи, если известны дифференциальные свойства соответствующих граничных функций. В теории прямых вариационных методов они указывают, какие условия следует накладывать на граничные функции, чтобы класс допустимых (варьируемых) функций был непустым.

Впоследствии (1958 г.) С. М. Никольский установил более общую теорему вложения:

$$H_p^{(\vec{r})}(R_n) \rightarrow H_p^{(\vec{\rho})}(R_m), \quad (55)$$

где классы  $H_p^{(\vec{r})}$  определяются неравенствами (50) и (51) с заменой в них

$p$  на  $p_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ),  $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$  и  $\vec{p}, \vec{p}', \vec{r}, \vec{\rho}$  должны удовлетворять определенным соотношениям типа (52).

Теоремы вложения Никольского, как показали Никольский и его ученики Т. И. Аманов и П. Пилика, являются окончательными — их нельзя улучшить в терминах классов  $H$ . Это устанавливалось с помощью введения так называемых граничных функций классов  $H$ .

В 1952 г. Никольский распространил свои теоремы (прямую и обратную) на случай, когда роль  $R_m$  играет  $m$ -мерное достаточное число раз дифференцируемое многообразие  $\Gamma_m$ . В этом случае соответствующие теоремы выглядят так:

$$H_p^{(r)}(R_n) \rightarrow H_p^{(r - \frac{n-m}{p})}(\Gamma_m) \rightarrow H_p^{(r)}(R_n) \quad (56)$$

$$(H_p^r = H_p^{(r_1, \dots, r)}).$$

Указанные выше результаты получены Никольским на основе развитых им соответствующим образом методов теории приближения функций многих переменных. В дальнейшем (1953 г.) А. А. Дезин доказал вложения (56) для некоторых  $r$  прямым методом, без привлечения аппарата теории приближений. Никольский получил (1956 г.) также прямые и обратные им теоремы вложения для классов  $H$  и в случае ряда плоских областей с невырожденными углами. Замкнутые теоремы вложения для классов  $W_p^{(l)}$  в случае произвольных плоских областей с углами (как вырожденными, так и невырожденными) установлены Г. Н. Яковлевым (1961 г.)

В разделе «Теория приближения» были определены периодические классы  $W^*$  и  $H^*$ . Для одномерных классов  $W^*$  и некоторых классов  $H^*$  теоремы вложения, связанные с переходом от  $p$  к  $p'$ , были известны еще Харди и Литтлвуду. Конечно, для этих классов проблема следов не возникает.

*Дробные классы  $W_p^{(r)}$  ( $r$  — дробное).* После того как для классов  $H$  были получены обратные теоремы вложения, появилось стремление установить подобные обратные теоремы для классов  $W_p^{(l)}$ . Этот вопрос, первоначально для целых  $l$ , был полностью решен в работах В. М. Бабица и Л. Н. Слободецкого (1956 г.), О. В. Бесова (1959 г.), Ароншайна (1955 г.) и Гальярдо (1957 г.). Решение привело к введению дробных пространств  $W_p^{(r)}(g)$ .

Пусть  $1 \leq p < \infty$ ,  $r > 0$ ,  $r = \bar{r} + \alpha$ ,  $\bar{r}$  — целые и  $0 < \alpha < 1$ . По определению функция  $f$  принадлежит к дробному классу  $W_p^{(r)}(g)$  ( $g \subset R_n$ ), если она принадлежит к классу Соболева  $W_p^{(\bar{r})}(g)$  и если для любой ее частной производной  $f^{(\bar{r})}$  порядка  $\bar{r}$  является конечной величина

$$\|f^{(\bar{r})}\|_{\bar{W}_p^{(\alpha)}(g)} = \left( \int_g \int_g \frac{|f^{(\bar{r})}(x) - f^{(\bar{r})}(y)|}{|x - y|^{n+p\alpha}} dg dg \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}.$$

В классе  $W_p^{(r)}(g)$  вводится норма

$$\|f\|_{W_p^{(r)}(g)} = \|f\|_{L_p(g)} + \sum \|f^{(\bar{r})}\|_{\bar{W}_p^{(\alpha)}},$$

где сумма распространена на всевозможные частные производные от  $f$  порядка  $\bar{r}$ .

Ароншайн, Слободецкий и Бесов показали, что для целых  $r$  справедливо соотношение, аналогичное соотношению (56),

$$W_p^{(r)}(g) \rightarrow W_p^{(\rho)}(\Gamma_m) \rightarrow W_p^{(r)}(g) \quad (g \subset R_m), \quad (57)$$

если только  $\rho = r - \frac{n-m}{p}$  нецелое и  $1 < p < \infty$  или если  $p = 2$ .

Бесов в дальнейшем исследовал до конца случай, когда  $\rho$  целое,



обнаружив, что в этом случае в соотношении (57) надо заменить  $W_p^{(p)}(\Gamma_m)$  на  $B_p^{(p)}(\Gamma_m)$  (см. ниже).

Введение дробных классов  $W$  привело, естественно, к вопросу о том, является ли семейство классов  $W_p^{(r)}$  с произвольными  $r > 0$  полностью замкнутым по отношению к теоремам вложения, как в случае классов  $H$ . Слободецкий показал (1958 г.), что полная замкнутость имеет место при  $p = 2$ , т. е. при  $p = 2$  соотношения (57) верны при любых  $r$  и не обязательно нецелых  $p$ . Дальнейшие исследования показали, что в общем случае ответ на этот вопрос не всегда положительный. Выяснению вопроса весьма способствовали работы Бесова.

**Классы  $B_{p\theta}^{(\vec{r})}$ .** О. В. Бесов ввел классы функций  $B_{p\theta}^{(\vec{r})}(R_n)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ),  $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$ ,  $r_j > 0$ , где  $r_j$  — любые положительные числа,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $B_p^{(\vec{r})} = B_{pp}^{(\vec{r})}$ .

По определению  $f \in B_{p\theta}^{(\vec{r})}(R_n)$ , если она определена на пространстве  $R_n$  и если для нее имеет смысл конечная норма

$$\|f\|_{B_{p\theta}^{(\vec{r})}(R_n)} = \|f\|_{L_p(R_n)} + \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^1 t^{-p\alpha_j-1} \omega_{1+[\alpha_j]}^\theta \left( \frac{\partial^{\vec{r}_j} f}{\partial x_j^{\vec{r}_j}}, t l_j \right)_p dt \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad (58)$$

где

$$\omega_s(\psi, t l_j) = \sup \|\Delta_{h, x_j}^s \psi\|_{L_p(R_n)} \quad (59)$$

есть  $s$ -й модуль непрерывности  $\psi$  в направлении единичного направленного по оси  $x_j$  (координатного) вектора  $l_j$ ,  $r_j = \bar{r}_j + \alpha_j$ ,  $\bar{r}_j$  — целое,  $0 < \alpha_j \leq 1$ . Бесов показал, что его классы подчиняются при фиксированном  $\theta$  теоремам (52), (54), (56), в которых следует только заменить  $H$  на  $B$ . Он показал также, что норму, эквивалентную норме (58), можно ввести на языке наилучших приближений целыми функциями экспоненциального типа.

Таким образом, классы  $B_{p\theta}^{(\vec{r})}$ , как и классы  $H$ , образуют замкнутую систему теорем вложения. Кроме того, классы  $B_{pp}^{(\vec{r})}$  в случае дробных  $r_j$  совпадают с соответствующими дробными классами  $W_p^{(\vec{r})}$ . В остальных случаях совпадение не имеет места — это свидетельствует о нарушении замкнутости классов  $W$  в отношении теорем вложения. Выяснению до конца вопроса, для каких параметров  $r$ ,  $p$ ,  $\rho = r - \frac{n-m}{p}$ ,  $p'$  прямые и обратные теоремы вложения остаются верными в терминах классов  $W_p^{(\vec{r})}$  (вообще дробных), посвящены также работы П. И. Ливоркина и С. В. Успенского (1960 г.).

В. П. Ильин и В. А. Солонников (1961 г.) получили теоремы вложения типа теорем (55) для классов функций  $B_{p\theta}^{(\vec{r})}$ , дифференциальные

свойства которых по разным направлениям рассматриваются в различных метриках  $L_p$ ; ( $j = 1, \dots, n$ ),  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . Их исследования основаны на специальных интегральных представлениях функций указанных классов, предложенных Ильиным. Многие их неравенства, в том числе неравенства, дающие обратные теоремы вложения, установлены для неполных норм функций. Например, правая часть (58) есть неполная норма в метрике  $B_{p\theta}^{(\vec{r})}$ , если из нее выбросить первое слагаемое  $\|f\|_{L_p(R_n)}$ . Замкнутые теоремы вложения о следах для классов  $W_p^{(l)}(g)$  ( $l$  — целое) в случае произвольных областей с вырожденными и невырожденными углами получены Г. Н. Яковлевым (1961 г.).

*Оценка смешанных производных посредством несмешанных.* Существенное продолжение получило исследование вопроса о том, какие смешанные производные имеет функция многих переменных, если известны ее определенные дифференциальные свойства только по каждой из переменных в отдельности (начало свое оно ведет от работ Бернштейна и Монтея). С. М. Никольский получил (1953 г.) общую теорему такого рода для классов функций  $H_p^{(\vec{r})}(R_n)$ , О. В. Бесов, В. П. Ильин и В. А. Солонников — для классов  $\vec{B}_{p\theta}^r(R_n)$ . Ю. К. Солнцев рассмотрел этот вопрос в случае целых классов  $W_p^{(l,l)}(g)$  ( $1 < p < \infty$ ) для областей с достаточно гладкой границей. При  $l < 1$  подобный вопрос изучен В. И. Буренковым. Некоторые отрицательные примеры в случае  $p = \infty$  построены Б. С. Митягиным. В последнее время большие исследования в указанном направлении проведены В. П. Ильиным и О. В. Бесовым для общих областей в предположении, что рассматриваемая функция имеет конечные нормы некоторых заданных производных, не обязательно несмешанных. Отметим также работы К. К. Головкина, исследовавшего эти вопросы в более общих метриках.

*Продолжение функций.* С теоремами вложения тесно связаны теоремы о продолжении функций за пределы области с сохранением дифференциальных свойств. Во многих случаях проще получить неравенство на всем пространстве и, чтобы доказать его для той или иной принадлежащей к нему области, применить метод продолжения функции с сохранением дифференциальных свойств. При доказательстве обратных теорем вложения появляется необходимость продолжить заданную на  $m$ -мерном многообразии функцию, где  $m < n$ , на все  $n$ -мерное пространство так, чтобы продолженная функция принадлежала к заданному классу. Общие методы продолжения функций были разработаны Хестенсом и Уитни. Но этих методов далеко не достаточно для решения необходимых вопросов о продолжении функций классов, упомянутых выше. К рассматриваемому вопросу кроме названных результатов, связанных с обратными теоремами вложения, относятся теоремы В. К. Дзядыка и А. Ф. Тимана (1950 г.) и В. К. Дзядыка (1956 г.) о продолжении с отрезка, теорема С. М. Никольского (1953 г.), доказанная затем также В. М. Бабицем, о распространении функций класса

$W$  за область с достаточно гладкой границей, теоремы Л. Д. Кудрявцева (1959 г.) о продолжении с неограниченных областей функций классов  $W_p^{(r)}$ , О. В. Бесова (1963—1964 гг.), а также В. И. Буренкова (1965 г.) о продолжении функций классов  $B_{p\theta}^r$  за области с липшицевой границей, О. В. Бесова и В. П. Ильина о продолжении функций анизотропных классов.

**Компактность.** Для приложений важно, что ограниченные множества функций  $f$  в пространствах  $W_p^{(r)}$ ,  $B_p^{(r)}$  и  $H_p^{(r)}$  являются компактными в метрике  $L_p$  или даже в метрике классов  $H_p^{r-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Первые общие результаты по этому вопросу для классов  $W_p^{(r)}$  принадлежат В. И. Кондрашеву (1950 г.). Некоторые исследования проведены В. П. Ильиным, Л. Д. Кудрявцевым, С. М. Никольским и др.

**Дальнейшие обобщения теории вложения и другие результаты.** И. Г. Глобенко обобщил (1960 г.) теоремы вложения Соболева (относящиеся к переходу от  $L_p$  к  $L_p'$  в области) на области с вырожденными угловыми точками. В. Г. Мазья получил более общие результаты (1960 г.). Он исследовал с общей точки зрения области, допускающие некоторые теоремы вложения. Кроме того, С. Л. Соболев обобщил (1959 г.) свои теоремы вложения на классы абстрактных дифференцируемых функций, со значениями из банахова пространства. Эти исследования получили развитие в работах В. Б. Короткова (1961 г.) и Гильдермана. Л. Д. Кудрявцев (1959 г.) показал, что если для функции, заданной на произвольной ограниченной открытой области, интеграл Дирихле конечен, то она имеет на границе области граничные значения, устойчиво зависящие от этого интеграла, на основе чего доказал для произвольной области неравенство типа неравенства Фридрихса, а также существование и единственность решения первой краевой задачи для самосопряженного эллиптического уравнения второго порядка. С. В. Успенский установил (1960 г.), что функция  $n$  переменных ( $n \geq 3$ ) с конечным интегралом Дирихле стремится к одному и тому же пределу при стремлении аргумента к бесконечности почти по всем направлениям.

С. Л. Соболев (1963 г.) показал, что заданную на  $n$ -мерном пространстве функцию, обладающую конечной неполной нормой  $W_p^{(l)}$  (в нее не входит первый член правой части равенства (46)), можно аппроксимировать в этой метрике финитными функциями.

**Классы  $L_p^{(r)}$ . Лиувилевские производные.** Еще в прошлом столетии Лиувилль ввел понятие дробного интеграла

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r-1)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{r-1} \varphi(t) dt$$

порядка  $r$ , обобщающее операцию  $r$ -кратного последовательного интегрирования функции  $\varphi$ . В периодическом случае этому понятию соответствует дробный интеграл в смысле Вейля. В дальнейшем возникли

соответствующие понятия в случае многих переменных. Очень удачным аналогом интеграла Лиувилля оказался интеграл

$$f(x) = \int_{R_n} g_r(x-y) \varphi(y) dy \quad (\varphi(y) \in L_p(R_n)), \quad (60)$$

где

$$g_r(x) = \frac{|x|^{\frac{r-n}{2}}}{2^{\frac{n+r-2}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} K_{\frac{n-r}{2}}(|x|)$$

и  $K_\nu(z)$  — функция Макдональда.

Пусть  $L_p^{(r)}(R_n)$  ( $r > 0$ ,  $L_p^{(0)} = L_p$ ) есть класс функций  $f$ , полученных при помощи операции (60) из всевозможных функций  $\varphi \in L_p(R_n)$ . Оказывается, что при целых  $r$  этот класс совпадает с классом Соболева  $W_p^{(r)}(R_n)$ . При дробных  $r$  получаются новые классы. Таким образом, семейство  $L_p^{(r)}$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ,  $r \geq 0$ ) приводит к достаточно развитой классификации дифференцируемых функций, содержащей только целые классы  $W_p^{(r)}(R_n)$ . Эта классификация ( $L_p^{(r)}$ ) является наиболее естественным продолжением целых классов  $W_p^{(r)}$  на дробные  $r$ . Целые классы  $W_p^{(r)}$  связаны также с дробными классами  $W_p^{(r)} = B_{pp}^{(r)}$ , но эта связь не всегда носит совершенный характер. Соотношение (57) верно только в случае, если  $p$  — нецелое или если  $p = 2$ .

Систематические исследования классов  $L_p^{(r)}$  у нас были начаты (1962 г.) П. И. Лизоркиным (за рубежом — Ароншайном, Кальдероном). Недавно он исследовал анизотропные классы  $L_p^{(\vec{r})}$ , получив для них полную систему теорем вложения.

В недавней совместной работе П. И. Лизоркина, Ж. Лионса (Франция) и С. М. Никольского (а также в работе Тайбелсона) показано, что интегральная операция (60) может служить средством нового эквивалентного определения и классов  $H$  и  $B$ , о которых говорилось выше. Установлено, что можно корректно определить нулевой класс  $B_{p0}^{(0)}(R_n)$  ( $B_{p\infty}^{(0)} = H_p^{(0)}$ ), состоящий из обобщенных функций (дистрибуций) и обладающий тем свойством, что если подвергнуть все функции  $\varphi \in B_{p0}^{(0)}(R_n)$  операции (60), которая теперь уже понимается в обобщенном смысле (в смысле свертки), то в качестве  $f$  получаются функции класса  $B_{p0}^{(r)}$ , причем все функции этого класса. В этом смысле функции  $f \in B_{p0}^{(r)}(R_n)$  ( $B_{p\infty}^{(r)} = H_p^{(r)}$ ) имеют интегральное представление (60), где  $\varphi \in B_{p0}^{(0)}(R_n)$ . Кроме того, установлено, что операция (60), где  $r$  надо заменить на  $r - r'$ , осуществляет изоморфизм классов  $B_{p0}^{(r)}$  и  $B_{p0}^{(r')}$  ( $H_p^{(r)}$  и  $H_p^{(r')}$ ) при любых  $r \neq r'$ .

Заметим, что функция  $\varphi$  в равенстве (60) в случае  $r = 2l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) может быть получена из  $f$  при помощи дифференциальной операции

$$(\Delta - E)^l f = \varphi,$$

где  $E$  — тождественный оператор. Таким образом, обратная операции

(60) операция может рассматриваться как некоторая дробная дифференциальная операция.

К исследованиям полигармонических и родственных им операторов  $\Delta^l$ , связанным с обобщением на дробные значения, относятся работы В. П. Ильина (1956 г.), В. П. Глушко и С. Г. Крейна (1958 г.), И. А. Киприянова (1959 г.). В последней несколько отличным путем вводится определение дробных классов и для них доказываются некоторые теоремы вложения.

*Классы с доминирующей смешанной производной.* При определении классов, о которых говорилось выше, основную роль играли производные от функций по каждой из переменных, т. е. несмешанные производные. Смешанные производные, если и участвовали в определении, носили подчиненный характер — их порядок не превышал порядка несмешанных производных. Часто для хороших областей можно доказать, что существование и конечность норм таких смешанных производных является следствием существования и конечности норм несмешанных производных. В последнее время проявляется интерес к классам функций с доминирующей смешанной производной, т. е. функций, порядок заданных смешанных производных у которых выше порядка заданных несмешанных производных. С. М. Никольский доказал (1962 г.) теорему о представлении функций одного такого класса рядами по функциям экспоненциального типа и на основе ее установил соответствующие теоремы вложения. Некоторые из этих результатов получены также Н. С. Бахваловым. Исследованию подобных классов (другими методами) посвящены работы Ю. А. Брудного, А. Д. Джабраилова, П. И. Лизоркина.

*Приложения.* Первое общее исследование, посвященное изучению граничных свойств полигармонической ( $l$ -гармонической) функции класса  $W_p^{(l)}(g)$ , принадлежит С. Л. Соболеву (1938 г.). Он получил необходимые условия, которым удовлетворяет принадлежащая к классу  $W_2^{(l)}(g)$  полигармоническая функция, если ее рассматривать на достаточно гладком многообразии  $\Gamma_m \subset \bar{g}$   $m$  измерений ( $1 \leq m < n$ ). На примере полигармонического уравнения Соболев показал, что при помощи теорем вложения можно получить полную систему краевых условий для краевой задачи. Он впервые сформулировал и решил первую краевую задачу для полигармонического уравнения, когда граница области состоит из многообразий различных размерностей. В дальнейшем (1953 г.) С. М. Никольский получил на основе своих обратных теорем вложения для  $H$ -классов достаточные, с точностью до произвольного  $\varepsilon$  совпадающие с необходимыми условия, которые следует накладывать на граничные функции, чтобы для них существовало принадлежащее к  $W_2^{(r)}(g)$  решение полигармонической задачи и, таким образом, чтобы можно было получить решение вариационным методом.

Ароншайн (1955 г.), при  $l = 1$ , В. М. Бабич и Л. Н. Слободецкий (1956 г.), при  $l \geq 1$ , получили необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют граничные значения принадлежащей к классу

$W_2^{(l)}(g)$  полигармонической функции в случае достаточно гладкой границы. Подобные результаты были получены в случае областей с достаточно гладкой границей с точностью до  $\varepsilon$  для классов  $C_{r,\alpha}$  еще Н. М. Гюнтером, для классов  $H_2^{(r)}$  — Т. И. Амановым (1953 г.) и предельно точные для классов  $H_p^{(r)}$  — О. В. Бесовым (1956 г.), Я. С. Бугровым (1958 г.), Н. И. Мозжеровой (1958 г.), в случае плоской области с углами для классов  $W_2^{(r)}$  — Г. Н. Яковлевым (1961 г.). Ныне в теории дифференциальных уравнений получено много таких результатов для достаточно общих случаев. К этому направлению относятся, в частности, последние общие работы В. А. Солонникова.

Заметим, что если область имеет достаточно гладкую границу, то дифференциальное свойство решения однородного уравнения эллиптического типа с постоянными коэффициентами, оказывается, является вплоть до границы точно таким же, как следует из обратных теорем вложения. Для областей с угловыми точками характерна своя специфика, как показано в исследованиях С. М. Никольского (1956 г.), В. В. Фуфаева (1960 г.), Е. А. Волкова (1962 г.), В. А. Кондратьева, Г. И. Эскина (1963 г.).

Л. Д. Кудрявцев (1959 г.) доказал существование и единственность решения вариационной задачи (при условии существования допустимой функции) в случае самосопряженного эллиптического уравнения второго порядка для произвольного ограниченного открытого множества.

*Весовые классы.* За последнее десятилетие у нас существенно развилась теория весовых пространств функций и теорем вложения для них. Она возникла прежде всего в связи с изучением краевых задач для вырождающихся уравнений эллиптического типа. Фундаментальное исследование таких краевых задач принадлежит М. В. Келдышу (1951 г.).

Весовыми пространствами называются пространства функций, частные производные некоторого порядка которых суммируемы в некоторой степени с некоторым весом. В настоящее время теория весовых пространств наиболее полно изучена в случае веса степенного характера, т. е. в случае, когда весовая функция, при приближении ее аргумента к многообразию, которое может вырождаться в точку, стремится к нулю или к бесконечности, как некоторая степень расстояния до указанного многообразия. Получены отдельные результаты, относящиеся к весовым пространствам и с более общей весовой функцией.

Рассмотрим некоторые приложения теории весовых пространств. При продолжении функций или систем функций с заданными дифференциальными свойствами с некоторого многообразия на все пространство, в соответствии с упоминавшимися обратными теоремами вложения, можно получить функцию, имеющую производные до определенного порядка с конечной нормой в смысле пространств вида  $H_p^r$ ,  $W_p^r$ ,  $B_p^r$ . Естественно, возникает задача получения таких продолжений, которые имеют производные и более высоких порядков, и нахождения минимального порядка роста этих производных при подходе к данному многообразию. Интересно, что часто такими наилучшими продолжениями

являются решения соответствующих граничных задач для соответствующих эллиптических уравнений. Задачи о «наилучших продолжениях» изучены и решены для ряда случаев в терминах весовых пространств Л. Д. Кудрявцевым (1956 г.) и Я. С. Бугровым (1958 г.).

Теория весовых пространств применяется при исследовании обычных невесовых функциональных пространств. Например, при изучении продолжений функций часто оказывается удобнее и проще продолжать функцию в элемент некоторого весового пространства, а затем, используя теоремы вложения весовых пространств в обычные пространства, получить нужные свойства продолженной функции.

Существуют задачи для обычных функциональных пространств, которые могут быть решены только в терминах весовых пространств. К этому кругу вопросов относятся, например, некоторые теоремы вложения для классов функций, определенных на неограниченных областях. Эти теоремы отражают специфику неограниченных областей, связанную с тем, что в них из суммируемости в какой-то степени частных производных не следует суммируемость в этой степени самой функции, как в случае ограниченной области, но вместе с тем следует суммируемость в той же степени с определенным весом.

Весовые пространства применяются и при изучении уравнений с частными производными, например при исследовании дифференциальных свойств решений вплоть до границы, применении вариационного метода в неограниченных областях, отыскании решений, имеющих неограниченную норму в обычных функциональных пространствах, изучении краевых задач для вырождающихся уравнений.

Введем основные определения. Пусть  $G$  — открытое множество в  $R_n$ ,  $\Gamma$  — некоторое многообразие (замкнутое или с краем),  $0 \leq m < n$ ,  $\Gamma \subset \bar{G}$ ,  $r = r(x, \Gamma)$  — расстояние от точки  $x \in R_n$  до  $\Gamma$ . Пусть, далее, функция  $f$  определена на  $G$  вместе со своими обобщенными частными производными до порядка  $l$  включительно ( $l$  — неотрицательное целое число),  $\alpha$  — некоторое вещественное число. Будем рассматривать пространства функций  $L_{p,\alpha}^{(l)}(G|\Gamma)$  и  $W_{p,\alpha}^{(l)}(G|\Gamma)$ , для которых соответственно конечны нормы

$$\|f\|_{L_{p,\alpha}^{(l)}(G|\Gamma)} = \sum_{|k|=l} \|r^\alpha f^{(k)}\|_{L_p(G)}, \quad (61)$$

$$\|f\|_{W_{p,\alpha}^{(l)}(G|\Gamma)} = \sum_{|k| \leq l} \|r^\alpha f^{(k)}\|_{L_p(G)}, \quad (62)$$

$$k = (k_1, \dots, k_n), \quad |k| = \sum_{j=1}^n k_j, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

*Теоремы вложения для весовых классов.* Один из первых естественных вопросов, возникающих при изучении весовых пространств, состоит в следующем: если известно, что производные некоторого порядка  $l$  рассматриваемой функции суммируемы в  $p$ -й степени с данным весом, то что можно сказать о весе, с которым суммируемы в этой же степени производные меньшего порядка. Первоначально с точностью до произ-

вольного  $\varepsilon > 0$  этот вопрос для пространств  $W_{p,\alpha}^{(l)}(G|\Gamma)$  был решен Л. Д. Кудрявцевым (1956 г.), более полно для отдельных случаев — П. И. Лизоркиным (1959 г.), а общем виде — С. В. Успенским (1961 г.). Последний доказал, что если  $G$  — ограничено и, кроме того,  $\alpha - k + \frac{n-m}{p} > 0$ ,  $1 \leq k \leq l$ ,  $1 < p < \infty$ , то

$$W_{p,\alpha}^{(l)}(G|\Gamma) \rightarrow W_{p,\alpha-k}^{(l-k)}(G|\Gamma).$$

Подобные теоремы вложения, т. е. вложения весовых пространств в весовые, для других весовых пространств получены также В. П. Ильиным (1958 г.), В. П. Глушко (1958 г.), С. Г. Крейном (1958), И. А. Киприяновым (1962 г.), Г. Н. Яковлевым (1960 г.), Ю. С. Никольским (1965 г.), Т. С. Пиголкиной (1966 г.) и др.

Следующей является задача отыскания обычных, невесовых, функциональных пространств, к которым принадлежат функции данного весового класса, т. е., более точно, изучение вложений весовых пространств в невесовые. Первоначально Л. Д. Кудрявцев получил вложения пространств типа  $W_{p,\alpha}^{(l)}(G|\Gamma)$  в  $H_p^{(r)}(G)$ , где уже  $r$ , вообще говоря, дробное. В дальнейшем оказалось, что более точные результаты, отличающиеся от указанных на  $\varepsilon > 0$ , можно получить, если рассмотреть вложение весовых пространств в классы  $B_p^{(r)}$ . Например, С. В. Успенский показал, что если  $1 \leq p < \infty$ ,  $0 \leq \alpha \leq l$ ,

то

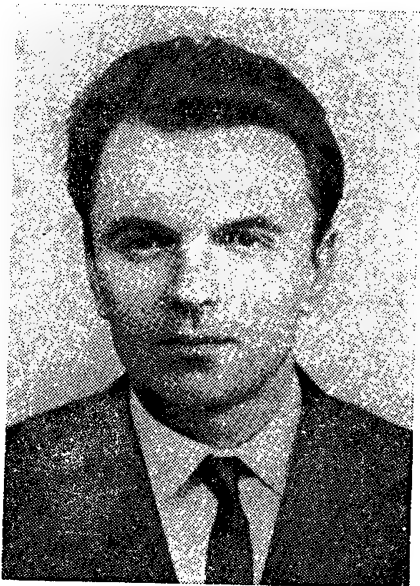
$$W_{p,\alpha}^{(l)}(G|\Gamma) \rightarrow W_p^{(l-\alpha)}(G). \quad (63)$$

Как и в теоремах вложения для обычных, невесовых, пространств, в различных вопросах возникает потребность в изучении следов функций весовых классов, а также методов и свойств продолжений функций из многообразий в весовые классы. Л. Д. Кудрявцев показал (1956 г.), что если  $\Gamma$  —  $m$ -мерное достаточно гладкое многообразие и  $l - \alpha - \frac{n-m}{p} > 0$ , то всякая функция класса  $W_{p,\alpha}^{(l)}(G|\Gamma)$  имеет след на  $\Gamma$ . Далее, естественно, возник вопрос о принадлежности этого следа к определенному функциональному классу и о продолжении функции из этого класса в функцию соответствующего весового пространства. Оба вопроса (прямой и обратный) были решены первоначально в терминах  $H$ -классов Л. Д. Кудрявцевым (1956 г.), а затем А. А. Вашиным ( $p = 2$ ), П. И. Лизоркиным, С. В. Успенским и Г. Н. Яковлевым в терминах  $B$ -классов. Окончательные результаты таковы: пусть  $\Gamma$  —  $m$ -мерное замкнутое многообразие гладкости  $k \geq l + 1$ , лежащее в  $\bar{G}$ ,  $0 \leq m < n$ . Если  $1 < p < \infty$ ,  $\alpha > -\frac{n-m}{p}$ ,  $r = l - \alpha - \frac{n-m}{p} > 0$ , то

$$W_{p,\alpha}^{(l)}(G|\Gamma) \rightarrow B_p^{(r)}(\Gamma). \quad (64)$$

В силу транзитивности вложений прямое вложение (64) при  $\alpha \geq 0$  может быть получено из вложения (63) и соответствующих вложений для  $W$ -классов. Справедлива также обратная теорема вложения, причем она обобщается и на системы функций.





О. В. Бесов.

Представляет интерес (особенно для неограниченных областей) изучение граничных свойств функций класса  $L_{p,\alpha}^{(l)}(G|\Gamma)$ , т. е. классов, в определении норм функций которых не входят нормы самих функций в смысле пространства  $L_p$  (см. равенство (61)). Для полного описания свойств следов функций этих классов используются пространства  $L_p^{(r)}$  (где  $r$  может быть и дробным), которые отличаются от пространств  $B_p^{(r)}$  лишь тем, что в выражение для нормы функции в этих пространствах не входит норма самой функции в  $L_p$  (Л. Д. Кудрявцев, 1964 г.). Г. Н. Яковлев разработал (1961 г.) замкнутую теорию вложений для весовых пространств в случае ограниченных плоских областей с липшицевой границей, в частности с кусочно-гладкой границей. Он доказал также прямые и обратные теоремы вложения для на-

званных областей в случае веса степенного порядка с показателем степени, являющимся функцией точки. Этот случай интересен для приложений, в частности, тогда, когда вырождение происходит на части границы.

Весовые пространства  $W_p^{(l)}(G|\Gamma)$  обобщались в различных направлениях. Например, В. С. Успенский получил некоторые теоремы вложения для следов функций из пространств, элементы которых имеют производные, суммируемые в некоторых степенях с весами степенного характера, вообще говоря, различными у различных производных. А. Д. Джабраилов доказал прямые и обратные теоремы вложения для весовых пространств типа невесовых пространств  $W_p^{(r)}(G|\Gamma)$  дробного порядка  $r$ . Частные случаи подобных пространств возникали при решении ряда задач теории функций и уравнений с частными производными. В. Б. Коротковым и А. Х. Гудиевым доказаны теоремы вложения для весовых пространств абстрактных функций.

Весовые пространства, соответствующие случаю вырождения в точке, изучались В. П. Ильиным (1958 г.), В. П. Глушко (1958 г.), Л. Д. Кудрявцевым (1963 г.) и др. Рассмотрим более подробно случай вырождения в бесконечно удаленной точке, поскольку он важен при изучении теорем вложения в неограниченных областях.

Пусть  $\rho = \rho(x)$  — расстояние точки  $x \in R^n$  от начала координат,  $G$  — заданная область в  $R^n$ ,  $Q^n$  — какой-либо фиксированный  $n$ -мерный шар, лежащий в  $G$ . Функция  $f$  называется функцией класса  $L_{p,\alpha}^{(l)}(G|\infty)$ , соответственно класса  $W_{p,\alpha}^{(l)}(G|\infty)$ , если для нее конечна норма

$$\|f\|_{L_{p,\alpha}^{(l)}(G|\infty)}^{(l)} = \sum_{|k|=l} \left\| \frac{f^{(k)}}{(1+\rho)^\alpha} \right\|_{L_p(G)},$$

соответственно норма

$$\|f\|_{W_{p,\alpha}^{(l)}(G|\infty)} = \|u\|_{L_{p,\alpha}^{(l)}(G|\infty)} + \|u\|_{L_p(Q^n)}.$$

Сформулируем соответствующие результаты для случая  $G = \overset{+}{R}_n = \{x_n > 0\}$ . Пусть  $R_{n-1} = \{x_n = 0\}$ . Как и для рассмотренных выше весовых пространств, здесь представляет интерес изучение вложения одних весовых пространств в другие, в частности определение веса, с которым суммируемы в  $p$ -й степени младшие производные, а также изучение граничных свойств функций. Л. Д. Кудрявцев (1963 г.) показал, что при  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $\alpha > \frac{n}{p} - 1$  и  $l \geq k \geq 0$  ( $l$  и  $k$  — целые) справедливы вложения

$$W_{p,\alpha}^{(l)}(\overset{+}{R}_n|\infty) \rightarrow W_{p,\alpha+k}^{(l-k)}(\overset{+}{R}_n|\infty), \quad (65)$$

$$W_{p,\alpha}^{(l)}(\overset{+}{R}_n|\infty) \rightarrow W_{p,\alpha+1-\frac{1}{p}}^{(l-1)}(R_{n-1}|\infty), \quad (66)$$

в случае же  $0 \leq \alpha \leq \frac{n}{p} - 1$  при  $l = 1$  можно лишь утверждать, что

$$W_{p,\alpha}^{(1)}(\overset{+}{R}_n|\infty) \rightarrow W_{p,\frac{n+\varepsilon}{p}}^{(0)}(\overset{+}{R}_n|\infty), \quad \varepsilon > 0.$$

При  $0 \leq \alpha < \frac{n}{p} - 1$ , как установил В. Р. Портнов (1964 г.), всякая функция класса  $W_{p,\alpha}^{(1)}$ , если аргумент стремится к бесконечности почти по всем радиусам, стремится к одной и той же постоянной (в случае  $\alpha = 0$  это было показано ранее С. В. Успенским). В. Р. Портновым рассмотрены также весовые пространства, подобные определенным выше с весовой функцией более общего вида.

Для полного описания граничных свойств функций классов  $L_{p,\alpha}^{(l)}(\overset{+}{R}_n|\infty)$  и  $W_{p,\alpha}^{(l)}(\overset{+}{R}_n|\infty)$ , естественно, недостаточно вложений типа (66); полностью эти свойства описываются в терминах пространства типа  $B_p^{(r)}$ , но с соответствующим весом. Прямые теоремы вложения этого типа получены Т. С. Пиголкиной (1966 г.).

Ряд теорем вложения для пространства типа  $W_p^{(r)}(R_n|\infty)$  с весовой функцией более общего вида, чем степенной, получен А. С. Джафаровым (1959 г.) и Ю. С. Никольским (1965 г.). Другого типа весовые пространства изучены И. А. Киприяновым (1959 г.). Они определяются как замыкание того или иного класса финитных функций в нормах, которые получаются при помощи различных дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов, связанных с преобразованием Фурье — Бесселя. Установлено, что для ряда указанных дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов, в том числе типа оператора Бесселя, включая и операторы дробного порядка, существуют точные формулы, выражающие норму их значений в  $L_2$  с весом посредством нормы преобразования Фурье — Бесселя функции, к кото-

рой они применяются. При помощи этого метода доказываются теоремы вложения в пространства с другой метрикой, в частности точные прямые и обратные теоремы вложения для следов функций.

*Приложения весовых классов. Дифференциальные уравнения с вырождениями.* Теория вложений весовых пространств применяется прежде всего при решении краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. Краевые задачи для уравнений этого вида, как впервые показал М. В. Келдыш в 1951 г., имеют специфические, качественно новые особенности, состоящие в том, что при определенной степени вырождения часть границы, где это происходит, освобождается от граничных условий. Этот вопрос, однако, относится к области теории уравнений с частными производными, и мы остановимся лишь на некоторых фактах, непосредственно связанных с теоремами вложения для весовых пространств.

Пусть  $G$  — ограниченная область в  $R_n$ ,  $\sigma = \sigma(x)$  — ограниченная достаточно гладкая функция, заданная в  $G$  и удовлетворяющая условию

$$c_1 r(x) \leq \sigma(x) \leq c_2 r(x),$$

где  $r(x)$  — расстояние от точки  $x$  до границы  $\Gamma$  области  $G$ . Рассмотрим уравнение

$$L_\alpha(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sigma^{2\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (67)$$

являющееся уравнением Эйлера для функционала

$$D_\alpha(u) = \int \sigma^{2\alpha} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dG. \quad (68)$$

В случае  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$  корректна обычная постановка решения первой краевой задачи: найти функцию  $u$  в обычном или обобщенном смысле, удовлетворяющую уравнению (67) и такую, что  $u|_\Gamma = \varphi$ , где  $\varphi$  — заданная функция.

Теоремы вложения для весовых пространств позволяют получить необходимые и достаточные условия для того, чтобы существовало обобщенное решение указанной задачи. Эти условия сначала в терминах  $H_2^{(r)}$ -классов, когда необходимые условия отличаются от достаточных на произвольное  $\varepsilon > 0$ , были получены Л. Д. Кудрявцевым. Затем А. А. Вашарин нашел условия в терминах  $W_2^{(r)}$ -классов, являющиеся уже одновременно необходимыми и достаточными. Именно он показал, что для того чтобы существовало обобщенное решение поставленной задачи с конечным интегралом (68), или, что то же, в классе

$W_{2,\alpha}^{(1)}(G|\Gamma)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\varphi \in W_2^{(\frac{1}{2}-\alpha)}(\Gamma)$ . Этот результат обобщает, очевидно, упоминавшийся выше результат Ароншайна, который получается отсюда при  $\alpha = 0$ .

В случае неограниченных областей окончательный результат формулируется иначе, поскольку здесь естественно не накладывать на рассматриваемые функции условие ограниченности их норм в  $L_2$ .

Для случая полупространства  $G = \bar{R}_n^+$ ,  $\Gamma = R_{n-1}$ ,  $\alpha = 0$  Кудрявцев установил следующее: чтобы существовало обобщенное решение первой краевой задачи  $u|_{\Gamma} = \varphi$  для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0$$

в классе функций с конечным интегралом Дирихле

$$\int \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\bar{R}_n^+,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi \in L_2 \left( \frac{1}{2} \right) (R_{n-1}).$$

При  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$  М. И. Вишиком, Л. Д. Кудрявцевым, П. И. Лизоркиным и Г. Н. Яковлевым изучался также случай, когда вырождение происходит не на всей границе, а лишь на ее части. Необходимые и достаточные условия разрешимости первой краевой задачи в этом случае получены Лизоркиным и Яковлевым.

При  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  постановка краевой задачи изменяется. Этот случай с точки зрения теорем вложения также изучался А. А. Вашариным, Л. Д. Кудрявцевым, П. И. Лизоркиным и С. М. Никольским. В частности, при  $\alpha = \frac{1}{2}$  Вашарин и Лизоркин нашли необходимые и достаточные условия для решения первой краевой задачи  $\frac{u}{\ln \frac{M}{y}} \Big|_{\Gamma} = \varphi$  ( $M$ -не-

которая постоянная) для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( y \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

в классе функций с конечным интегралом

$$\iint_G y \ln^2 \frac{M}{y} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u}{\ln \frac{M}{y}} \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{\ln \frac{M}{y}} \right) \right]^2 \right\} dx dy,$$

где область  $G$  лежит в полуплоскости  $y > 0$ .

Первая краевая задача для эллиптического вырождающегося уравнения любого порядка при вырождении по всей границе и непустом классе допустимых функций была исследована С. М. Никольским и П. И. Лизоркиным. Они впервые обосновали корректность

решения указанной краевой задачи при сильном<sup>29</sup> вырождении вдоль всей границы области, на которой решается задача. Существенную роль в этом сыграло полученное ими неравенство

$$\|f\|_{L_p(G)} \leq \left[ \sum_{j=0}^{s-1} \left\| \frac{\partial^j f}{\partial n^j} \right\|_{L_p(\Gamma)} + \sum_{|k|=l} \left\| \frac{f^k}{r^\alpha} \right\|_{L_p(G)} \right],$$

где  $G$  — область с достаточно гладкой границей  $\Gamma$ , а  $s$  — натуральное число, для которого  $s - l - \frac{1}{p'} < \alpha < s - r + \frac{1}{p} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$ . Во всех рассмотренных случаях решение краевой задачи может быть найдено прямым вариационным методом.

Рассмотрим случай неограниченных областей. Пусть

$$A(u, v) = \int \left( a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + cuv \right) dR_n, \quad (69)$$

$$(1 + \rho)^\alpha |a_{ij}| \leq M, \quad \alpha \geq 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$M = \text{const}, \quad c \geq 0,$$

$$A(u) = A(u, u),$$

$$D_\alpha(u) = \int \frac{1}{(1 + \rho)^\alpha} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dR_n,$$

где  $\rho = \rho(x)$  — расстояние точки  $x \in R_n$  до начала координат. Предположим, что существует постоянная  $\kappa > 0$ , такая, что

$$A(u) \geq \kappa D_\alpha(u).$$

Рассмотрим, далее, уравнение Эйлера для функционала (69)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - cu = 0. \quad (70)$$

Пусть функция  $\varphi$  определена на гиперплоскости  $R_{n-1}$ ,  $\mathfrak{A}_\varphi$  — совокупность всех функций  $\varphi$ , таких, что  $A(u) < \infty$  и  $u|_{E^{n-1}} = \varphi$ .

Можно указать необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяет функция  $\varphi$  в случае непустоты класса  $\mathfrak{A}_\varphi$  (Л. Д. Кудрявцев, Ю. С. Никольский, Т. С. Пиголкина). В случае его непустоты в нем всегда существует обобщенное решение уравнения (70). Таким решением является функция, при которой функционал  $A(u)$  достигает минимума. Это обеспечивается тем, что хотя при сделанных предположениях функционал (69) не является, вообще говоря, полуограниченным в обычных функциональных пространствах, что наряду с его полунепрерывностью дало бы возможность применить вариационный метод, он

<sup>29</sup> Вырождение названо авторами сильным, если количество возникающих при этом краевых условий меньше  $l$ , где  $2l$  — порядок дифференциального уравнения.

является таковым в соответствующем весовом пространстве. Например, обычный интеграл Дирихле

$$D(u) = D_0(u) = \int \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dR_n^+$$

обладает следующей «весовой полуограниченностью»:

$$D(u) \geq c \int \frac{u^2 dR_n^+}{(1+\rho)^{n+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \quad u|_{R_{n-1}} = 0.$$

Таким образом, при помощи теорем вложения для весовых пространств вариационный метод оказывается распространенным на полупространство в естественном классе функций, определяемом лишь единственным условием конечности рассматриваемого функционала  $A(u)$  без каких-либо дополнительных ограничений на суммируемость самой функции и ее производных. При таком рассмотрении вопроса класс функций, в котором доказывается существование и единственность решения, определяется естественным образом самим уравнением. Например, для уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  таким классом является пространство  $L_2^{(1)}$ , а для уравнения  $\Delta u - k^2 u = 0$  — пространство  $W_2^{(1)}$ . Указанный случай был рассмотрен Л. Д. Кудрявцевым, более общий случай изучен его учениками Ю. С. Никольским и Т. С. Пиголкиной. С помощью своих теорем вложения И. А. Киприянов также рассмотрел новый класс корректно разрешимых краевых задач для сильно вырождающихся эллиптических уравнений.

## Квазипериодические и почти периодические функции

За последние десятилетия значительное развитие получила теория почти периодических функций, как в аспекте теоретических исследований, так и в направлении многих ее приложений, в частности в области дифференциальных и интегральных уравнений, вопросах устойчивости, теории колебаний, теории аналитических функций и др.

Теории почти периодических функций, созданной датским математиком Г. Бором в 1923 г., предшествовала теория квазипериодических функций, построенная в 1893 г. профессором Дерптского университета П. Бодем. Для уточнения вопросов, относящихся к этой тематике, сформулируем некоторые определения и свойства.

Если  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  есть непрерывная комплекснозначная функция  $n$  переменных, периодическая в отношении каждого аргумента  $x_i$  с соответствующим периодом  $\omega_i$ , т. е.

$$F(x_1 + \omega_1, x_2 + \omega_2, \dots, x_n + \omega_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$\left( \frac{\omega_i}{\omega_k} \text{ (} i \neq k \text{) вообще иррационально} \right)$ , то функция  $\varphi(x) = F(x, x, \dots, x)$

называется квазипериодической в отношении  $x$ . Это определение принадлежит Болю. Квазипериодические функции обладают следующими свойствами, также установленными Болем.

1. Операции сложения и умножения в пространстве квазипериодических функций не выводят из этого пространства.

2. Равномерно сходящаяся последовательность квазипериодических функций при  $-\infty < x < +\infty$  дает в пределе функцию более широкого класса, а именно функцию почти периодическую.

Определение почти периодической функции принадлежит Бору: комплекснозначная функция  $f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) называется почти периодической, если она всюду непрерывна, и, как бы мало не было  $\varepsilon > 0$ , существует относительно плотное множество чисел  $\{\tau\}$  (почти периоды), для которых выполняется неравенство<sup>30</sup>

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Под указанное определение подходят также квазипериодические функции, являющиеся частным случаем почти периодических функций.

Важнейшие свойства почти периодических функций, установленные Бором, таковы:

1. Операции сложения и умножения в пространстве почти периодических функций не выводят из этого пространства.

2. Операция равномерного перехода к пределу для  $-\infty < x < +\infty$  в этом пространстве также не выводит из этого пространства.

3. Справедлива следующая теорема приближения: если  $f(x)$  есть почти периодическая функция и  $\varepsilon > 0$  — произвольно малое число, то существует такая квазипериодическая функция  $\varphi(x)$ , что выполняется неравенство

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad (-\infty < x < +\infty).$$

4. Если  $f(x)$  — почти периодическая функция, то она обладает средним значением, т. е.

$$M\{f\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x + \alpha) dx \quad (\text{равномерно в } \alpha).$$

Отсюда следует, что существует величина  $a(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ , где  $\lambda$  — действительное число.

5. Величина  $a(\lambda)$  отлична от нуля лишь для счетного или конечного множества значений  $\lambda$ . Эти значения ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ ) называются частотами функции  $f(x)$ , или собственными значениями. Если  $f(x)$ , в частности, является периодической функцией с периодом  $\nu$ , то все числа  $\lambda_k$  кратны числу  $\frac{2\pi}{\nu}$ . Числа  $a(\lambda_k)$  именуются коэффициентами Фурье от функции  $f(x)$ . Множество чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  образует так называемый спектр функции  $f(x)$ . Формальный ряд  $\sum_{(k)} a(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}$  есть

<sup>30</sup> Относительно плотным множеством  $\{\tau\}$  называется такое множество (для которого существует число  $L = L(\varepsilon)$ ), что в любом интервале длины  $L$  найдется хотя бы одно число  $\tau$ .

ряд Фурье от почти периодической функции. Существует запись

$$f(x) \sim \sum_{(k)} a(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}.$$

6. Можно записать (обобщенное) равенство Парсеваля

$$M\{|f(x)|^2\} = \sum_{(k)} |a(\lambda_k)|^2.$$

7. Справедлива теорема единственности, состоящая в том, что две почти периодические функции, имеющие одинаковые ряды Фурье, тождественно совпадают.

Из названных свойств почти периодических функций наиболее сложной для доказательства оказалась теорема о возможности приближения почти периодических функций с помощью квазипериодических.

Исследования Бора по почти периодическим функциям позднее были значительно улучшены и упрощены. В частности, Н. Н. Боголюбовым (1928 г.) и Б. М. Левитаном (1953 г.) получены доказательства теоремы аппроксимации, свободные от сложных интегральных операций, имевшихся в работах Бора и Валле-Пуссена.

В 1925 г. В. В. Степанов получил обобщения теории Бора. Несколько позднее вопросы обобщения почти периодических функций исследовали Безикович (1926 г.), Вейль (1926 г.), а затем А. С. Кованько (1931 г.) и Б. М. Левитан (1937 г.).

Бор рассматривал функции в метрическом пространстве с метрикой

$$u(\varphi, \psi) = \sup_{-\infty < x < +\infty} |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

Различные обобщения почти периодических функций состояли в выборе других метрик в более общих пространствах, относящихся к более общим, по сравнению с непрерывными функциями, классам функций, определенных на интервале  $(-\infty, +\infty)$ . В основном, это класс  $L_p$ .

В. В. Степанов для своего определения избрал пространство с метрикой

$$D_{S_p}^l(\varphi, \psi) = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |\varphi(t) - \psi(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1).$$

Согласно этому определению, комплекснозначная функция  $f(x)$  называется почти периодической ( $S_p$  п. п.), если, как бы мало ни было  $\varepsilon > 0$ , существует относительно плотное множество почти периодов  $\{\tau\}$ , таких, что

$$D_{S_p}^l(f(x + \tau), f(x)) < \varepsilon.$$

Свойства, перечисленные нами для функций Бора, полностью переносятся на функции Степанова, однако теорема единственности несколько ослаблена: две функции  $S_p$  п. п., имеющие одинаковые ряды Фурье, совпадают почти всюду. Теорема приближения формулируется так:





Б. М. Левитан.

как бы мало ни было  $\varepsilon > 0$ , существует квазипериодическая функция  $\varphi(x)$ , такая, что  $D_{S_p^l}(\varphi, f) < \varepsilon$ .

Метрикой Вейля является метрика

$$D_{W_p}(\varphi, \psi) = \lim_{l \rightarrow \infty} D_{S_p^l}(\varphi, \psi),$$

однако в определении почти периодичности по Вейлю приходится пользоваться метрикой Степанова, а именно: функция  $f(x)$  называется почти периодической по Вейлю  $W_p$  п.п, если, как бы мало ни было  $\varepsilon > 0$ , существует такое число  $l_0 = l_0(\varepsilon)$  и относительно плотное множество почти периодов  $\{\tau\}$ , что

$$D_{S_p^l}(f(x + \tau), f(x)) < \varepsilon \quad (l > l_0).$$

Все свойства почти периодических функций Бора без изменения переносятся на функции  $W_p$  п.п. Однако теорема приближения осуществляется с помощью метрики  $D_{W_p}$ . А именно: функции  $f(x) \in (W_p \text{ п.п.})$  можно сопоставить такую квазипериодическую функцию  $\varphi(x)$ , что выполняется условие

$$D_{W_p}(f(x), \varphi(x)) < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$  — наперед заданное сколь угодно малое число. Теорема единственности теперь принимает вид: если две функции имеют одинаковые ряды Фурье, то их расстояние в смысле метрики  $D_{W_p}$  равно нулю.

Безикович дал определение почти периодичности функции, базирующееся на метрике

$$D_{B_p}(\varphi, \psi) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |\varphi(x) - \psi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1).$$

Это определение существенно отличается от определения  $S_p$  п.п и  $W_p$  п.п почти периодических функций и претерпело некоторые видоизменения в работах других математиков. В связи с этим мы дадим внешнее определение, основанное на приближении с помощью квазипериодической функции: функция  $f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) называется почти периодической по Безиковичу ( $B_p$  п.п), если, как бы мало ни было  $\varepsilon > 0$ , существует такая квазипериодическая функция  $\varphi(x)$ , что

$$D_{B_p}(\varphi(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Все свойства почти периодических функций Бора, указанные выше, переносятся без каких-либо существенных изменений на функции Безиковича. Если две функции  $B_p$  п.п имеют одинаковые ряды Фурье, то их расстояние в смысле метрики  $D_{B_p}$  равно нулю.

Первоначально рассмотренные обобщения брались лишь для  $p = 1$  и  $p = 2$ , позднее же они были обобщены А. С. Кованько (1930 г.) для любого  $p \geq 1$ .

Следующим обобщением почти периодических функций явились аналоги  $S_p$ ,  $W_p$  и  $B_p$  почти периодических функций в пространстве только измеримых функций. Они были названы почти периодическими функциями соответственно  $\tilde{S}_{п.п.}$ ,  $\tilde{W}_{п.п.}$ ,  $\tilde{B}_{п.п.}$ . Класс  $\tilde{S}_{п.п.}$  введен В. В. Степановым (1925 г.), а классы  $\tilde{W}_{п.п.}$  и  $\tilde{B}_{п.п.}$  — А. С. Кованько (1931 г.).

Функция  $f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) называется почти периодической  $\tilde{S}_{п.п.}$ , если, каковы бы ни были числа  $\varepsilon > 0$  и  $l > 0$ , существует относительно плотное множество почти периодов  $\{\tau\}$ , таких, что  $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$  для всех  $x$ , исключая, быть может, множество  $E$ , для которого

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \frac{1}{l} |E \cap (x, x + l)| < \varepsilon.$$

Операции сложения и умножения не выводят из класса  $\tilde{S}_{п.п.}$ . В рассматриваемом случае теорема приближения приобретает следующую формулировку: каким бы малым ни было  $\varepsilon > 0$ , существует квазипериодическая функция  $\varphi(x)$ , такая, что

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

для всех  $x$ , исключая, быть может, множество  $E_1$ , для которого

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \frac{1}{l} |E_1 \cap (x, x + l)| < \varepsilon \quad (l - \text{любое}).$$

Можно легко проверить, что всякая функция  $S_p$  п.п. является также функцией  $\tilde{S}_{п.п.}$ , следовательно,  $(S_{п.п.}) \subset (\tilde{S}_{п.п.})$ . Наложение определенных условий суммируемости на функцию  $f(x)$  превращает функцию  $\tilde{S}_{п.п.}$  в  $S_{п.п.}$ .

Для функций  $\tilde{W}_{п.п.}$  существует следующее определение: функция  $f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) называется почти периодической функцией  $\tilde{W}_{п.п.}$ , если, как бы мало ни было  $\varepsilon > 0$ , существует число  $l_0 = l_0(\varepsilon)$  и относительно плотное множество почти периодов  $\{\tau\}$  такое, что выполняется неравенство

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$$

для всех  $x$ , за исключением, быть может, множества  $E$ , для которого

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left\{ \frac{1}{l} |E \cap (x, x + l)| \right\} < \varepsilon \quad (l > l_0).$$

Теорема приближения в этом случае формулируется так: как бы мало ни было  $\varepsilon > 0$ , существует число  $l_0 = l_0(\varepsilon)$  и квазипериодическая функция  $\varphi(x)$ , такая, что

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$



А. С. Кованько.

для всех  $x$ , исключая, быть может, множество  $E_1$ , для которого

$$\sup_x \frac{1}{l} |E_1 \cap (x, x + l)| < \varepsilon \quad (l > l_0).$$

Наложение определенных условий суммируемости на функцию превращает ее

в функцию  $W_{p.p.}$ , т. е.  $(W_{p.p.}) \subset (\tilde{W}_{p.p.})$ .

Функция  $f(x)$   $(-\infty < x < +\infty)$  называется почти периодической функцией  $\tilde{W}_{p.p.}$ , если, как бы мало ни было  $\varepsilon > 0$ , существует такое число  $T_0 > 0$ , множество  $E$  и относительно плотное множество почти периодов  $\{\tau\}$ , что

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$$

для  $x \in {}^c E$  и  $x + \tau \in {}^c E$ , причем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |E \cap (-T, +T)| < \varepsilon.$$

Кроме того, как показал Фольнер (1945 г.), функция конечна всюду, исключая множество  $Z$ , такое, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |Z \cap (-T, +T)| = 0.$$

Теорема приближения для этого случая гласит: как бы мало ни было  $\varepsilon > 0$ , существует такое число  $T_0 > 0$  и квазипериодическая функция  $\varphi(x)$ , что

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

для всех  $x$ , исключая множество  $E_1$ , такое, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |E_1 \cap (-T, +T)| < \varepsilon.$$

Функции  $\tilde{W}_{p.p.}$  названы Фольнером  $K_{p.p.}$ .

Дальнейшее обобщение почти периодических функций принадлежит Б. М. Левитану (1937 г.). Оно состоит в следующем: функция  $f(x)$   $(-\infty < x < +\infty)$  называется почти периодической в смысле Левитана ( $L_{p.p.}$ ), если, как бы мало ни было  $\varepsilon > 0$  и как бы велико ни было  $N$ , можно указать действительные числа  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$  и число  $\delta > 0$  такие, что все числа  $\tau$ , удовлетворяющие соотношениям

$$|\mu_k \tau| < \delta \pmod{2\pi} \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

будут  $(\varepsilon, N)$  почти периодами  $f(x)$ , т. е.

$$|f(x \pm \tau) - f(x)| < \varepsilon \quad (-N < x < +N).$$

Кроме того, функция  $f(x)$  всюду непрерывна. Если к этому добавить условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(x)| dx < +\infty,$$

то удастся построить среднее значение и дальше развернуть теорию разложения функций в ряд Фурье. Здесь справедлива более узкая теорема единственности: если две функции имеют одинаковые ряды Фурье, то они тождественно совпадают на всей действительной оси. Теорема приближения для функций  $L_{p,p}$  гласит: если  $f(x) \in (L_{p,p})$ , то существует квазипериодическая функция  $\varphi(x)$ , такая, что  $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$  на некотором интервале  $(-N < x < +N)$ , где  $\varepsilon$  и  $N$  — наперед заданные числа.

Приведенное выше определение функций  $L_{p,p}$  является результатом некоторых видоизменений его как самим Левитаном, так и Б. Я. Левиным и В. А. Марченко.

Остановимся на вопросе о существенности классов обобщенных почти периодических функций. Пусть  $f(x) \in W_p$  п.п. Существует ли функция  $\varphi(x) \in S_{p,p}$ , которая имела бы тот же ряд Фурье, что и функция  $f(x)$ ? В случае отрицательного ответа функция  $f(x)$  называется существенной функцией класса  $W_{p,p}$ , в случае же положительного ответа — несущественной функцией этого класса. Пример такой функции дан Степановым и Левитаном, показавшими тем самым, что класс существенных функций  $W_{p,p}$  не является пустым. Совершенно так же определяются существенные функции  $B_{p,p}$ , путем сравнения их разложения в ряды Фурье с такими же разложениями для функций  $W_p$  п. п. Существование существенных функций  $B_{p,p}$  было доказано Безиковичем. О функциях  $S_{p,p}$  можно лишь сказать, что они существенно отличны от боровских функций. В отношении функций  $L_{p,p}$  вопрос теряет смысл в силу теоремы единственности в теории этих функций.

Весьма интересны вопросы, связанные со свойствами функциональных пространств, порожденных почти периодическими функциями и их обобщениями.

Рассмотрим пространства с метриками  $u(\varphi, \psi)$ ,  $D_{S_p}^I$ ,  $D_{W_p}$ ,  $D_{B_p}$  и др. Как показал Вейерштрасс, пространство с метрикой  $u(\varphi, \psi)$  является полным. В 1936 г. Л. А. Люстерник установил необходимые и достаточные условия компактности систем почти периодических функций в смысле метрики  $u(\varphi, \psi)$ . В частности, он доказал, что система всех сдвигов данной почти периодической функции компактна.

А. С. Кованько установил, что пространство с метрикой  $D_{S_p}^I$  полно. Им найдены необходимые и достаточные условия компактности системы  $S_{p,p}$  в смысле метрики  $D_{S_p}^I$ . В частности, компактной является система всех смещений данной функции  $S_{p,p}$  в смысле метрики  $D_{S_p}^I$ .

Как показал И. Марцинкевич (1939 г.), пространство с метрикой  $D_{B_p}$  также полное. А. С. Кованько получил в разных видах необходимые и достаточные условия компактности систем функций  $B_{p.p.}$  в смысле метрики  $D_{B_p}$ . Он доказал, что пространство с метрикой  $D_{W_p}$  неполное. Если сходимость (в смысле метрики  $D_{W_p}$ ) заменить фундаментальностью, то будут установлены необходимые и достаточные условия компактности систем функций  $W_{p.p.}$  в смысле метрики  $D_{W_p}$  с некоторым усилением условия сходимости.

Для функций  $L_{p.p.}$  можно ввести метрику

$$u_N(\varphi, \psi) = \sup_{|x| < N} |\varphi - \psi|.$$

Это пространство полное. Найдены условия компактности системы функций  $L_{p.p.}$  (А. С. Кованько, Б. Я. Левин, Б. М. Левитан).

Для измеримых почти периодических функций  $\tilde{S}_{p.p.}$ ,  $\tilde{W}_{p.p.}$  и  $\tilde{B}_{p.p.}$  Кованько построил (1940 г.) метрики соответствующих пространств, обозначенные  $\mathfrak{D}_S$ ,  $\mathfrak{D}_W$ ,  $\mathfrak{D}_B$ . Он же показал, что пространства с метриками  $\mathfrak{D}_S$  и  $\mathfrak{D}_B$  полные, а пространство с метрикой  $\mathfrak{D}_W$  неполное.

Основная идея Безиковича в построении его обобщения почти периодичности (класс  $B_{2.p.p.}$ ) состоит в том, что функции этого класса должны удовлетворять теореме Фишера — Рисса: каковы бы ни были

числа  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , такие, что  $\sum_1^\infty |a_k|^2 < \infty$ , и действительные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ , существует функция  $B_{2.p.p.}$ , для которой числа  $a_n$  являются коэффициентами Фурье, а  $\lambda_n$  — показателями (частотами), т. е.

$$f(x) \sim \sum_1^\infty a_k e^{i\lambda_k x}, \quad \sum_1^\infty |a_k|^2 = M \in \{|f|^2\}.$$

Для функций  $S_{2.p.p.}$  и  $W_{2.p.p.}$  такая теорема неприменима, если не наложить некоторых добавочных условий на числа  $a_n$  и  $\lambda_n$ . Для функций  $S_{2.p.p.}$  такие достаточные условия установил Американо (1941 г.), а для функций  $W_{2.p.p.}$  — В. В. Степанов (1948 г.) и А. С. Кованько (1948 г.).

Безикович изложил теорию почти периодических функций двух переменных. Весьма интересное обобщение таких функций принадлежит В. Э. Лянце (1947 г.). Им рассмотрены почти периодические функции двух переменных, почти периоды которых в отношении каждого переменного зависят от другого переменного. Он конкретно изучил случай обратной пропорциональной зависимости и для таких функций установил теорему приближения с помощью некоторых тригонометрических полиномов.

Бор исследовал аналитические функции  $f(x + yi)$ , которые трактовал как функции двух переменных, почти периодические относительно  $y$ , в полосе ( $\alpha < x < \beta$ ). Соответствующая теория тесно связана с рядами Дирихле. Совершенно иной точки зрения придерживался П. А. Бессонов. Он пошел по линии обобщения теории двойко перио-

дических (эллиптических) функций и определил почти периодическую функцию так: мероморфная функция  $f(z)$  называется почти периодической, если произвольно заданным числам  $\varepsilon > 0$  и  $\rho > 0$  можно сопоставить число  $l = l(\rho, \varepsilon) > 0$ , такое, что в любом квадрате со стороной  $l$ , параллельной одной из осей координат, найдется почти период  $\tau$ , при котором выполняется неравенство

$$|f(z + \tau) - f(z)| < \varepsilon$$

для всех  $z$ , исключая, быть может, некоторые кружки радиуса  $\rho$ , описанные из полюсов функций  $f(z)$  и  $f(z + \tau)$ . Примером такой функции может служить сумма двух эллиптических функций с разными сетками периодов. Соответствующая теория тесно связывается с теорией нормальных семейств аналитических функций.

В связи с формальным разложением почти периодической функции в тригонометрический ряд возник, естественно, вопрос о реальном разложении в ряд, т. е. вопрос о том, когда такой ряд является сходящимся и когда его сумма совпадает с данной функцией. Этот вопрос (в смысле достаточных условий) тесно связывается со структурой спектра данной функции, структура же спектра тесно связана с его базисом. Приведем определение последнего.

Пусть дана конечная или счетная система линейно независимых чисел  $v_m$  (эти числа, естественно, мы считаем иррациональными), т. е. таких, что никакая линейная комбинация с рациональными коэффициентами их не равна нулю, если только не все коэффициенты нули. Пусть числа  $\lambda_n$  являются конечными линейными сочетаниями из чисел данного базиса (т. е. множества чисел  $v_m$ ), иными словами, пусть каждое число  $\lambda_n$  можно записать в виде

$$\lambda_n = \sum_{(k)} r_k^{(n)} v_{m_k},$$

где  $r_k^{(n)}$  — рациональные числа.

Очевидно, что для всякого спектра можно подобрать соответствующий базис. Базис же не определен однозначно по данному спектру. Соответственно базису почти периодические функции можно классифицировать так:

- 1) если базис бесконечен, то функция почти периодическая в собственном смысле;
- 2) если базис конечен, то функция квазипериодическая;
- 3) в частности, если базис состоит из одного числа, то функция «предельно периодическая». Такая функция является равномерным пределом последовательности непрерывных периодических функций. В последнем случае это единственное число базиса может быть и рациональным числом.

Рассмотрим вопрос сходимости данного ряда Фурье.

Тригонометрический ряд

$$f(x) \sim \sum a_k e^{i\lambda_k x}$$

сходится абсолютно и равномерно, если числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  линейно независимы или числа  $a_k$  положительны. Эти условия были известны

еще Бору. Позднее появились признаки смешанного типа, т. е. относящиеся как к коэффициентам, так и к частотам. Их установили Б. М. Левитан, Е. А. Бредихина и Н. П. Купцов, а также некоторые другие математики. Левитан исследовал случай, в котором числа спектра  $\lambda_n$  возрастают, причем ряд предполагается лакунарным. Лакунарность определена условием

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} < \Theta < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где  $\Theta$  не зависит от  $n$ . Такие ряды сходятся всюду равномерно. Рассмотрен случай, когда  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица  $\text{Lip } \alpha$  ( $\alpha < 1$ ) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-\alpha} \ln \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0.$$

В этом случае ряд также сходится равномерно. Интересен случай вообще неравномерной сходимости, если  $\lambda_{n+1} - \lambda_n = d > 0$  и в некоторой точке  $x_0$  функция  $f(x)$  оказывается функцией ограниченной вариации. Тогда в этой точке ряд сходится к  $f(x_0)$ . Изучен также случай, когда спектр имеет единственную предельную точку на конечном расстоянии (ее всегда можно свести к нулевой точке).

Е. А. Бредихина установила признак, когда  $\{\lambda_n\}$  монотонно убывают к нулю и  $\lambda_{-n} = \lambda_{+n}$ , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^\alpha \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{\lambda_n - \lambda_{n+1}} = 0.$$

Тогда ряд Фурье всюду сходится. Установлен и такой признак: если спектр функции ограничен, то существует целая аналитическая функция  $F(z)$ , такая, что при действительном  $z$

$$f(z) = F(z).$$

На базе исследований сходимости ряда Фурье выведено заново необходимое и достаточное условие почти периодичности неопределенного интеграла от почти периодической функции.

Опираясь на многие результаты Б. М. Левитана, Бредихина значительно продвинула вопрос исследования сходимости рядов Фурье почти периодических функций. Объектом ее исследования является несколько более узкий класс таких рядов, а именно ряды  $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ , в которых  $\lambda_{-n} = \lambda_n$ . Она рассматривает два основных случая лакунарных рядов:

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \Theta > 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty; \quad \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \geq \Theta > 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0,$$

а также исследует оценки величин, нужных в теории наилучших приближений почти периодических функций:

$$E_n(f) = \inf_{(C_k)} \left\{ \sup_{(x)} \left| f(x) - \sum_{-n}^{+n} C_k e^{i\lambda_k x} \right| \right\},$$

$$e_n f = \inf_{(C_k)} \left\{ \sup_{(x)} \left| f(x) - \sum_{|m_k| < n} C_k e^{i\lambda_{m_k} x} \right| \right\}$$

$$(C_k = 0, \text{ если } a(\lambda_{m_k}) = 0),$$

$$R_n(f) = \sup_{(x)} \left| f(x) - \sum_{|m_k| < n} a(\lambda_{m_k}) e^{i\lambda_{m_k} x} \right|,$$

$$\alpha_n(f) = \sum_{|m_k| > n} |a(\lambda_{m_k})|.$$

Е. А. Бредихиной обобщены результаты С. Б. Стечкина в теории наилучших приближений для периодических функций и указаны новые условия абсолютной сходимости для случая лакунарных рядов. Ею же рассмотрены новые методы суммирования рядов Фурье от почти периодических функций и исследовано одновременное приближение таких функций и их производных. Одной из ее самых последних работ по сходимости тригонометрических рядов является исследование сходимости ряда Фурье от функции  $S_p$  п. п. Таким образом, в работах Бредихиной теория сходимости рядов Фурье распространяется на обобщенные почти периодические функции.

Остановимся еще на одной задаче, связанной со спектром данной функции. Это вопрос расщепления данной почти периодической функции на конечную сумму таковых. А. С. Кованько показал (1961 г.), что если спектр почти периодических функций можно разбить на конечное число частей так, что каждая часть (группа) имеет самостоятельный базис и базисы разных групп попарно не пересекаются, то соответственно этому и сама функция разбивается на части, имеющие каждая соответствующий спектр той или иной группы.

В заключение укажем в общих чертах другие обобщения почти периодических функций, полученные советскими математиками. Б. М. Левитан существенно обобщил понятие почти периода (сдвига), введя вместо оператора сдвига, превращающего  $f(x)$  в  $f(x+a)$ , новый оператор «обобщенного сдвига». В этом направлении получены результаты также Г. С. Арзуманяном, Ю. М. Березанским.

Получены также новые пространства с применением интеграла Перрона и целый ряд многочисленных результатов, значительно расширивших теорию почти периодических функций и их обобщений.

Из основных задач, которые еще предстоит решить в теории почти периодических функций, можно назвать такие:

- 1) исследование сходимости двойных тригонометрических рядов почти периодических функций двух переменных;
- 2) распространение теории обобщенных почти периодических функций  $S_p$ ,  $W_p$ ,  $B_p$ ,  $L$  на функции двух переменных;
- 3) дальнейшее развитие обобщения Бессонова почти периодических функций комплексного переменного;
- 4) обобщения почти периодических функций на группах и абстрактных пространствах.



# БИБЛИОГРАФИЯ

## 1. Общая литература

### Классики марксизма-ленинизма и партийные документы

- Маркс К. К критике политической экономии. — В кн.: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 13.
- Маркс К. Капитал. Кн. 1. — В кн.: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 23.
- Маркс К. Математические рукописи. — Под знаменем марксизма, 1933, № 1.
- Маркс К. и Энгельс Ф. Манифест Коммунистической партии. — В кн.: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 4.
- Энгельс Ф. Анти-Дюринг. — В кн.: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 20.
- Энгельс Ф. Происхождение семьи, частной собственности и государства. — В кн.: Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 21.
- Ленин В. И. набросок плана научно-технических работ. — В кн.: Ленин В. И. Полн. собр. соч. Т. 36.
- Ленин о народном образовании. Статьи и речи. Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, М., 1957.

□

- КПСС в резолюциях и решениях съездов, конференций и пленумов ЦК. Изд. 7-е Ч. 1—4. Госполитиздат, М., 1954—1960.
- КПСС о культуре, просвещении и науке. Сборник документов. Политиздат, М., 1963, 552 с.
- Материалы XXIII съезда КПСС. Госполитиздат, М., 1966, 304 с.
- Программа Коммунистической партии Советского Союза. — В кн.: Материалы XXII съезда КПСС. Госполитиздат, М., 1961, стр. 320—428.

### Общен историческая литература

- Вопросы истории социалистического строительства в Молдавской ССР. «Штиинца», Кишинев, 1962, 168 с.
- Жюгжда Р. Ю. и Смирнов А. С. Литовская ССР. Госполитиздат, М., 1957, 183 с.
- История Азербайджана. В трех томах. Изд-во АН АзССР, Баку, 1963.
- История Белорусской ССР. В двух томах. Под общ. ред. Л. С. Абецедарского. Изд. 2-е. Т. 1—2. Изд-во АН БССР, Минск, 1961.
- История Казахской ССР. Т. 1—2. Изд-во АН КазССР, Алма-Ата, 1963.
- История Киргизии. Т. 1—2. Киргизгосиздат, Фрунзе, 1963.
- История Коммунистической партии Советского Союза. Госполитиздат, М., 1963, 784 с.
- История Латвийской ССР. Т. 2—3. Изд-во АН ЛатвССР, Рига, 1958.

- История Таджикской ССР. Под общ. ред. З. Ш. Раджабова. «Ирфон», Душанбе, 1965, 451 с.
- История Туркменской ССР. Т. 2. Изд-во АН ТССР, Ашхабад, 1957, 718 с. с илл.
- История Узбекской ССР. Т. 2. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1957, 654 с.
- История Эстонской ССР. Под ред. Г. И. Наана. Изд. 2-е. Эстгосиздат, Таллин, 1958, 749 с.
- К а с и м е н к о А. К. История Украинской ССР. «Наукова думка», К., 1965, 488 с. с илл.
- Краткая история СССР. В двух частях. Ч. 2. От Великой Октябрьской социалистической революции до наших дней. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1964, 632 с.
- Очерки социально-экономической и политической истории СССР. Под ред. П. Г. Софинова. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина. М., 1964, 330 с.
- 40 лет Советской Армении. «Айпетрат», Ереван, 1961, 299 с.
- Сорок лет Советской Грузии. [1921—1961]. «Сабчота Сакартвелო», Тбилиси, 1961, 540 с. с илл.

### Наука и техника в СССР

- А б д у л л а е в Х. М. 40 лет советской науки в Узбекистане. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1958, 215 с.
- А з а т я н В. Д. Научный центр Армении. [Из истории АН АрмССР. 1935—1943].— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 35—43.
- Академия наук Союза Советских Социалистических Республик за двадцать лет.— Вестн. АН СССР, 1937, № 10-11, стр. 7—24.
- А л и е в М. М. От филиала АН СССР к республиканской академии. [Академия наук АзССР].— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 25—34.
- А м б а р ц у м я н В. А. Наука в Армении за 40 лет. Армгостехиздат, Ереван, 1960, 67 с.
- А м и р х а н о в Х. И. Развитие научных исследований в Дагестанском филиале АН СССР.— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 126—129.
- А н т р о п о в И. А. Основные даты. [К пятидесятилетию секции научных работников. 1923—1928].— Научн. работн., 1928, № 2, стр. 43—56.
- А р ж а н и к о в Н. С. Для блага народа. Выдающиеся ученые вузов — лауреаты Ленинских премий 1962 г.— Вестн. высш. шк., 1962, № 5, стр. 22—25.
- А р ж а н и к о в Н. С. Новый отряд лауреатов Ленинской премии.— Вестн. высш. шк., 1963, № 6, стр. 48—51.
- А р и ф о в У. Основные направления научных исследований в Узбекистане.— Коммунист Узбекистана, 1962, № 11, стр. 29—37.
- А р и ф о в У. А. Развитие науки в Советском Узбекистане. Госиздат УзССР, Ташкент, 1964, 53 с. с илл.
- А ф а н а с ь е в А. В. и Ч е п е л е в К. Г. Развитие науки в Казахской ССР.— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 44—47.
- А х у н б а е в И. К. X лет Киргизского филиала Академии наук СССР.— Изв. Киргизск. филиала АН СССР, 1954, вып. 2 (12), стр. 3—19.
- А х у н б а е в И. К. Киргизский филиал АН СССР — база для организации Академии наук Киргизской ССР.— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 54—59.
- Б а й к о в А. А. Советская наука за три года войны.— Вестн. АН СССР, 1944, № 7-8, стр. 18—22.
- Б а р д и н И. П. Двадцать пять лет развития научных учреждений Академии наук СССР на периферии.— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 3—24.
- Б а т ы р о в Ш. Б. Перестройка Академии наук Туркменской ССР.— Вестн. АН СССР, 1963, № 9, стр. 45—48.
- Б а т ы р о в Ш. Б. Пути развития науки в Туркменистане.— Вопр. ист. естеств.-возн. и техн., 1965, вып. 18, стр. 92—98.
- Б е з б а х С. А. Учет и согласование научно-исследовательской работы в РСФСР.— Научн. работн., 1928, № 3, стр. 8—13.
- Б е з н о с и к о в Я. Н. Развитие науки в Коми АССР.— Труды Коми филиала АН СССР, 1961, № 1, стр. 3—9.

- Белькинд Л. Д., Конфедератов И. Я. и Шейнберг Я. А. История техники. Госэнергоиздат, М.—Л., 1956, 491 с. с илл.
- Бернал Д. Наука в истории общества. Пер. с англ. Под общ. ред. Б. М. Кедрова, И. В. Кузнецова. ИЛ, М., 1956, 735 с. с илл.
- Бернал Д. Наука и общество. Сб. ст. и выст. Пер. с англ. ИЛ, М., 1953, 299 с.
- Бильтаева Н. М. Влияние русской культуры на развитие просвещения и науки в Бурятии.— Труды Бурятск. комплексн. научно-исслед. ин-та (Сиб. отд. АН СССР), 1959, вып. 1, стр. 54—64.
- Бердыев Т. Б. Развитие науки в советском Туркменистане за 30 лет.— Изв. АН ТуркмССР, 1954, № 6, стр. 3—12.
- Борисов Ю. С. Из истории Ленинских премий.— Ист. СССР, 1957, № 1, стр. 225—232.
- Быков В. Т., Майоров В. М. и Стоценко А. В. Форпост науки на Дальнем Востоке. [О деятельности Дальневост. филиала АН СССР].— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 75—79.
- Бырка Г. И. Из истории подготовки научных и научно-педагогических кадров высшей квалификации в Молдавской ССР в годы строительства социализма (1940—1958).— Изв. АН МолдССР, 1965, № 1, стр. 45—55.
- В Сибирском научном городке. [О работе Сиб. отд. АН СССР].— Вестн. АН СССР, 1961, № 9, стр. 40—47.
- В Советском Союзе. [Работа научн. учреждений].— Соц. реконстр. и наука, 1932, № 1, стр. 221—247; № 3, стр. 195—204; № 4, стр. 206—222.
- В течение жизни одного поколения. Киргизучпедгиз, Фрунзе, 1961, 103 с. с илл.
- Вавилов П. П. Научная деятельность Коми филиала АН СССР.— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 117—125.
- Валескалин П. О подготовке научных работников в РСФСР.— Научн. работн., 1928, № 8-9, стр. 25—31.
- Валескалин П. И. Состояние и развитие научных исследований в Латвии.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1962, вып. 13, стр. 57—63.
- Вельмин В. П. Северо-Кавказская краевая ассоциация научно-исследовательских институтов.— Научн. работн., 1927, № 5-6, стр. 50—58.
- Волгин В. П. Об установлении единой ученой степени.— Научн. работн., 1926, № 7-8, стр. 22—30.
- Волгин В. П. Реорганизация Академии наук.— Вестн. АН СССР, 1931, № 1, стр. 3—12.
- Вопросы истории отечественной науки. Общее собрание Академии наук СССР, посвященное истории отечественной науки, 5—11 января 1949 г. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949, 912 с. с илл.
- Воронов С. Из прошлого и настоящего Академии наук СССР (к корням «неувязок»). [К вопросу о ее реорганизации].— Новый мир, 1930, № 5, стр. 135—149.
- Гаврилов В. Новый устав Академии наук СССР и дальнейшая демократизация руководства научной работой.— Сов. гос. и право, 1959, № 5, стр. 25—36.
- Гизитдинов Х. Х. Победа Октябрьской революции и развитие науки в Узбекистане.— Труды Узбекск. ун-та, 1957, вып. 75, стр. 127—146.
- Говорят президенты. [О достижениях советской науки в период между XXI и XXII съездами КПСС].— Наука и жизнь, 1961, № 10, стр. 2—17.
- Горбачев Т. Ф. Западно-Сибирский филиал АН СССР.— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 60—66.
- Гращенков Н. И. Развитие науки БССР за 30 лет. Гос. изд. БССР, Минск, 1949, 44 с.
- Гросул Я. С. Молдавский филиал АН СССР.— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 155—162.
- Гросул Я. С. Об основных направлениях исследований и структуре Академии наук Молдавской ССР.— Вестн. АН СССР, 1964, № 2, стр. 3—12.
- Гросул Я. С. Развитие научных исследований в Молдавии. [К созданию Акад. наук МолдССР].— Вестн. АН СССР, 1961, № 9, стр. 65—72.
- Гугов Р. Х. К истории организации Кабардинского научно-исследовательского института.— Уч. зап. Кабард. научно-исслед. ин-та, 1957, т. 11, стр. 445—460.

- XX сессия Совета по координации научной деятельности академий наук союзных республик и филиалов.— Вестн. АН СССР, 1962, № 6, стр. 53—55.
- 20 лет Академии наук Узбекистана.— Обществ. науки в Узбекистане, 1963, № 11, стр. 5—14.
- Двадцать лет советской науки. [Спец. номер журн.].— Природа, 1937, № 10, 252 с.
- 25 лет советской науки в Узбекистане [1917—1942]. Сб. Изд-во Уз ФАН СССР, Ташкент, 1942, 310 с.
- Десять лет Академии наук Эстонской ССР (1946—1956). Эстгосиздат, Таллин, 1956, 252 с.
- Десять лет советской науки. 1917—1927. Сб. ст. Госиздат, М.— Л., 1927, 480 с.
- X лет работы Академии наук Латвийской ССР (1946—1956). Изд-во АН ЛатвССР, Рига, 1956, 215 с. с илл.
- Д ж а м б у л а т о в а З. К. Из истории научно-исследовательской работы в Чечено-Ингушетии (1920—1941).— Труды Чечено-Ингушск. научно-исслед. ин-та при Совете Министров ЧИ АССР, 1964, т. 9, стр. 112—126.
- Д з а г у р о в Д. А. Роль Северо-Осетинского научно-исследовательского института в экономическом и культурном развитии СО АССР.— Изв. Сев.-Осет. научно-исслед. ин-та, 1957, т. 20, стр. 286—295.
- Достижения наук в Азербайджане. Изд-во АН АзССР, Баку, 1960, 155 с.
- Е л ю т и н В. П. Для новых успехов Советской науки. [К постановлению ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О мерах улучшения качества диссертационных работ и порядке присуждения ученых степеней и званий»].— Вестн. высш. шк., 1960, № 3, стр. 3—5.
- Е ф р е м е н к о Л. Из жизни научных работников Северо-Кавказского края.— Научн. работн., 1926, № 2, стр. 70—80.
- З а х и д о в Т. З. Десять лет Академии наук Узбекской ССР.— Изв. АН УзССР, 1953, № 6, стр. 3—8.
- З а х и д о в Т. З. Тридцать лет науки в Узбекистане.— Изв. АН УзССР, 1954, № 6, стр. 3—10.
- З в о р ы к и н А. А., О с ь м о в а Н. И., Ч е р н ы ш е в В. И. и Ш у х а р д и н С. В. История техники. Соцэкгиз, М., 769 с.
- З е л е н к о В. А. Реконструкция Всесоюзной академии наук.— Научн. работн., 1930, № 11-12, стр. 50—66.
- И о ф ф е А. Ф. Развитие точных наук в СССР за 25 лет. — В кн.: Юбилейная сессия АН СССР, посвященная 25-летию Великой Октябрьской социалистической революции. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1943, стр. 175—188.
- К а б и л о в А. Я. Самоотверженный труд работников науки и искусства Таджикистана в годы Великой Отечественной войны.— Уч. зап. Ленинабадск. пед. ин-та, 1958, вып. 7, стр. 113—126.
- К а р а к е е в К. К. Наука в Советской Киргизии.— Вестн. АН СССР, 1963, № 8, стр. 52—54.
- К а р а к е е в К. К. Обсуждение деятельности Академии наук Киргизской ССР.— Вестн. АН СССР, 1964, № 5, стр. 11—18.
- К а р а к е е в К. К. Развитие науки в Киргизии.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1964, вып. 17, стр. 68—73.
- К а р а к е е в К. К. Развитие науки в Советском Киргизстане. Изд-во АН КиргССР, Фрунзе, 1962, 126 с. с илл.
- К а р а п е т я н С. К. Наука в Советской Армении.— Вестн. АН СССР, 1940, № 11-12, стр. 101—107.
- К а с п е р о в и ч И. И. Научные и культурные учреждения Белорусской республики.— Научн. работн., 1929, № 1, стр. 43—51.
- К е д р о в Б. М. О классификации наук.— Вопр. философ., 1955, № 2, стр. 49—68.
- К е л д ы ш М. В. К новому прогрессу науки и техники. Речь на Пленуме ЦК КПСС 21 ноября 1962 г.— Вестн. АН СССР, 1962, № 12, стр. 9—14.
- К е л д ы ш М. В. Лауреаты Ленинской премии 1965 г. [В области науки и техники].— Вестн. АН СССР, 1965, № 5, стр. 3—10.
- К е л д ы ш М. В. Новые лауреаты Ленинских премий.— Вестн. АН СССР, 1962, № 5, стр. 3—6.

- К е л д ы ш М. В. Новые успехи науки и техники. [К присуждению Ленинской премии за наиболее выдающиеся работы в области науки и техники].— Наука и техника, 1963, № 6, стр. 2.
- К е л д ы ш М. В. О мерах по улучшению деятельности Академии наук СССР и академий наук союзных республик.— Вестн. АН СССР, 1963, № 6, стр. 3—22.
- К е л д ы ш М. В. Прогресс советской науки и техники. [О лауреатах Ленинской премии 1964 г. в области науки и техники].— Наука и техника, 1964, № 6, стр. 2—4.
- К е л д ы ш М. В. Советская наука и строительство коммунизма. Доклад президента Академии наук СССР о перестройке работы научных учреждений в связи с постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О мерах по улучшению координации научно-исследовательских работ в стране и деятельности Академии наук СССР».— Вестн. АН СССР, 1961, № 7, стр. 14—89.
- К е л д ы ш М. В. Ученые — лауреаты Ленинской премии 1963 г.— Вестн. АН СССР, 1963, № 5, стр. 3—6.
- К е л д ы ш М. В. Ученые — лауреаты Ленинской премии 1964 г.— Вестн. АН СССР, 1964, № 5, стр. 3—10.
- К о л ь ц о в А. В. В первые Октябрьские годы. [О деятельности советских научных учреждений. По материалам Архива Академии наук СССР].— Вестн. АН СССР, 1957, № 10, стр. 151—155.
- К о л ь ц о в А. В. Ученые Ленинграда в годы блокады (1941—1943). Изд-во АН СССР, М., 1962, 144 с.
- К о м а р о в В. Л. База Академии наук на Дальнем Востоке (возникновение, задачи, перспективы).— Вестн. АН СССР, 1932, № 2, стр. 1—10.
- К о с ы г и н А. Н. За тесную связь науки с жизнью. Речь первого заместителя Председателя Совета Министров СССР.— Вестн. АН СССР, 1961, № 7, стр. 90—106.
- К р ж и ж а н о в с к и й Г. М. Перспективы социалистического строительства и научные работники.— Научн. работн., 1929, № 4, стр. 11—16.
- К р о т о в В. А. Изучение производительных сил Восточной Сибири. [О научных исследованиях Вост.-Сиб. филиала АН СССР].— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 67—74.
- К у д р я в ц е в П. С. и К о н ф е д е р а т о в И. Я. История физики и техники. Изд. 2-е, перераб. и доп. «Просвещение», М., 1965, 570 с.
- К у п р е в и ч В. Ф. Развитие исследований в Академии наук Белорусской ССР.— Вестн. АН СССР, 1962, № 6, стр. 63—68.
- К у п р е в и ч В. Ф. Развитие науки в Белоруссии.— Вопр. ист. естествозн. в техн., 1962, вып. 13, стр. 37—43.
- Л а в р е н т ь е в М. А. Важные проблемы организации науки. Речь на Пленуме ЦК КПСС 22 ноября 1962 г.— Вестн. АН СССР, 1962, № 12, стр. 15—18.
- Л а в р е н т ь е в М. А. Развитие науки на Востоке страны. [О Сиб. отд. АН СССР].— Вестн. АН СССР, 1964, № 6, стр. 3—11.
- Л а п и р о в - С к о б л о М. Я. Пути и достижения науки и техники СССР за 10 лет.— Нар. просв., 1927, № 10, стр. 90—95.
- Лауреаты Сталинских премий в области науки. 1939—1949. Материалы к библиографии. Изд-во ЛГУ, Л., 1949, 96 с.
- Л е в ш и н Б. В. Академия наук СССР в годы Великой Отечественной войны.— Ист. СССР, 1961, № 3, стр. 13—27.
- Л е в ш и н Б. В. Документы о первых Ленинских премиях.— Ист. арх., 1957, № 2, стр. 178—179.
- Л е в ш и н Б. В. Из истории деятельности ученых в восточных районах страны (1941—1943 гг.).— Ист. арх., 1961, № 1, стр. 82—99.
- Л у б с а н о в Д. Д.— Наука в Бурятской АССР.— Вестн. АН СССР, 1953, № 10, стр. 46—48.
- М а к с и м о в А. А. К истории Института красной профессуры естествознания.— За марксистско-ленинское естествознание, 1931, № 3-4, стр. 24—43.
- М а м е д а л и е в Ю. Г. Основные этапы развития науки в Азербайджане.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1962, вып. 13, стр. 53—57.
- М а м е д а л и е в Ю. Г. Развитие науки в Азербайджане. Изд-во АН АзССР, Баку, 1960, 140 с.

- Манусевич А. М. и Новоселов П. К. Очерк развития научных исследований в послевоенный период.— Уч. зап. Белорусск. ин-та нар. хоз-ва, 1959, вып. 7, стр. 3—17.
- Матулис Ю. Ю. О деятельности Академии наук Литовской ССР.— Вестн. АН СССР, 1964, № 8, стр. 15—19.
- Меликулов Р. О деятельности ученых Узбекистана в годы Великой Отечественной войны (1941—1945 гг.).— Научн. работы и сообщ. отд. обществ. наук АН УзССР, 1963, кн. 7, стр. 152—156.
- Мкртчян С. С. На службе народу. [О развитии науки в республике за годы Советской власти].— Лит. Армения, 1962, № 11, стр. 3—7.
- Молотов И. А. К истории создания Сибирского отделения АН СССР.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1965, вып. 18, стр. 193—194.
- Мухелишвили Н. И. Наука в Советской Грузии. Краткий обзор. Изд-во АН ГрузССР, Тбилиси, 1961, 88 с.
- Мюрсеп П. В. Работы по истории науки в Эстонии.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1961, вып. 11, стр. 174—176.
- Наука ў Беларускай ССР за 40 год. Акад. навук БССР, Мінск, 1958, 476 с.
- Наука в Казахстане за сорок лет Советской власти. [Сб. ст.]. Изд-во АН КазССР, Алма-Ата, 1957, 455 с. с илл.
- Наука в Киргизии за 20 лет. 1926—1946. [Сб. ст.]. Изд-во КиргФАН СССР, Фрунзе, 1946, 208 с., с портр.
- Наука в Советской Грузии за 25 лет. Изд-во АН ГрузССР, Тбилиси, 1946, 108 с., на груз. яз.
- Наука в Таджикистане. Первая научная сессия к XV-летию Таджикской ССР. Изд-во ТаджФАН СССР, Сталинабад, 1945, 170 с.
- Наука в Узбекистане за 15 лет (1924—1939). Сб. Гос. изд. научн. техн. и соц.-эконом. л-ры УзССР, Ташкент, 1939, 120 с.
- Наука и техника СССР. Сб. ст. 1917—1927. Под ред. А. Ф. Иоффе, Г. М. Кржижановского, А. Е. Ферсмана. Т. 1—3. «Работн. просв.», М., 1927—1928.
- Наука на Дальнем Востоке. [К 40-летию Великой Октябрьской соц. рев.]. Изд-во АН СССР, Владивосток, 1957, 112 с.
- Наука Советского Казахстана. 1920—1960. [Сб. ст.]. Изд-во АН КазССР, Алма-Ата, 1960, 691 с. с илл.
- Научная деятельность и структура Академии наук Латвийской ССР.— Вестн. АН СССР, 1965, № 7, стр. 3—7.
- Научные кадры в СССР. Сборник документов и справочных материалов. Сост. И. С. Цыганов, В. В. Борисова, Г. И. Федькин. Изд-во АН СССР, М., 1959, 304 с.
- Научные советы — новая форма руководства наукой.— Вестн. АН СССР, 1962, № 2, стр. 3—8.
- Несмеянов А. Н. Некоторые проблемы советской науки.— Вестн. АН СССР, 1954, № 5, стр. 3—25.
- Несмеянов А. Н. Новые успехи советской науки и техники. [К присуждению Ленинской премии 1959 г.].— Культура и жизнь, 1959, № 6, стр. 26—28.
- Несмеянов А. Н. Об основных направлениях в работе Академии наук СССР.— Вестн. АН СССР, 1957, № 2, стр. 3—42.
- Несмеянов А. Н. Сорок лет Советской науки. Доклад на Юбилейной сессии АН СССР, посвященной сорокалетию Великой Октябрьской социалистической революции. Изд-во АН СССР, М., 1957, 245 с.; Вестн. АН СССР, 1957, № 11, стр. 17—36.
- Никифоров А. В. и Гринберг И. П. Развитие науки в Молдавии.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1965, вып. 19, стр. 99—103.
- Никоноров К. В. О некоторых итогах деятельности Казанского филиала АН СССР.— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 86—99.
- Нурмухамедов М. Состояние науки в Кара-Калпакии и задачи Каракалпакского филиала Академии наук Узбекской ССР.— Вестн. Каракалпакск. ФАН УзССР, 1960, № 1, стр. 3—10.
- Нущубидзе Ш. И. К вопросу о подготовке научных работников в ССР Грузии.— Научн. работн., 1929, № 3, стр. 19—22.

- О деятельности Академии наук Армянской ССР.— Вестн. АН СССР, 1965, № 6, стр. 21—26.
- О деятельности Академии наук Эстонской ССР.— Вестн. АН СССР, 1965, № 3, стр. 125—127.
- О мерах по улучшению подготовки научных и научно-педагогических кадров. [Изложение постановления ЦК КПСС и Совета Министров СССР].— Сов. пед., 1961, № 8, стр. 14—16.
- О положении на фронте естествознания. (Реферированная стенограмма заседания Президиума Комакадемии 23/XII —1930 и 6/I —1931 гг.).— Вестн. Ком. акад., 1931, № 4, стр. 95—108.
- О состоянии и перспективах развития научной деятельности Академии наук Казахской ССР. [Постановление Президиума АН СССР и Президиума АН КазССР № 873, от 30 дек. 1959 г.].— Вестн. АН КазССР, 1960, № 2, стр. 112—118.
- Об организации в Алма-Ата филиала Академии наук СССР.— Нар. хоз-во Казахстана, 1932, № 4, стр. 61—62.
- Об организации Северокавказского отделения Коммунистической академии.— Вестн. Ком. акад., 1931, № 7, стр. 65—66.
- Об ученых степенях и званиях. Постановление СНК СССР.— Природа, 1937, № 4, стр. 3—5.
- О в ч и н н и к о в П. Н. Расцвет науки в Таджикистане.—Труды АН ТадССР, 1958, т. 90, стр. 49—67.
- О л ь д е н б у р г С. Ф. О развитии научной деятельности в СССР за 10 лет. 1917—1927.— Научн. работн., 1927, № 11, стр. 26—31.
- О с н о с Ю. Из истории Советской науки (1917—1920 гг.).— Ист. журн., 1943, кн. 5-6, стр. 18—25.
- П а л л а д и н О. В. Академія наук Української Радянської Соціалістичної Республіки. 1919—1944. Вид-во АН УРСР, К., 1944, 108 с.
- П а т о н Б. Е. Актуальные задачи украинских ученых.—Вестн. АН СССР, 1963, № 8, стр. 42—48.
- П а т о н Б. Е. О научном профиле учреждений Академии наук Украинской ССР.— Вестн. АН СССР, 1963, № 10, стр. 3—8.
- П а т о н Б. Е. Развитие исследований в Академии наук Украинской ССР.— Вестн. АН СССР, 1962, № 6, стр. 56—62.
- П е й в е Я. В. Наука в Советской Латвии к 40-й годовщине Великой Октябрьской социалистической революции.— Изв. АН ЛатвССР, 1957, № 10, стр. 7—17.
- П е й в е Я. В. Развитие естественных наук в Латвии.— Природа, 1959, № 3, стр. 9—14.
- П е й в е Я. В. Развитие науки в Советской Латвии.— Природа, 1957, № 11, стр. 117—124.
- П е т р о в М. П. Советская наука в Туркмении за 20 лет.— Изв. Туркм. ФАН СССР, 1944, № 2-3, стр. 5—21.
- П е т р о в Ф. Н. Об организации научно-исследовательской работы в СССР.— Наука и искусство, 1926, № 1, стр. 9—14.
- П е т р о с я н Г. Б. Развитие естествознания в Армении.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1964, вып. 17, стр. 61—68.
- П л а у д е К. Академия наук к 20-й годовщине Советской Латвии.— Изв. АН ЛатвССР, 1960, № 7, стр. 9—24.
- П р е д т е ч е н с к и й А. В. и К о л ь ц о в А. В. История Академии наук СССР в трудах советских ученых.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1958, вып. 6, стр. 151—159.
- Р а д ж а б о в З. Ш. Развитие науки в Таджикской ССР (краткий очерк). «Наука», М., 1964, 111 с.
- Развитие науки в Сибирском отделении АН СССР.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1960, № 1, стр. 3—16.
- Р о ж к о в И. С. Наука в Советской Якутии.— Вестн. АН СССР, 1962, № 11, стр. 70—75.
- Р о ж к о в И. С. Наука в Советской Якутии.— Вестн. АН СССР, 1957, № 11, стр. 103—109.
- Розвиток науки в Українській РСР за 40 років. [Зб. ст.]. Вид-во АН УРСР, К., 1957, 261 с.

- Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры. Уч. зап. МГУ, вып. 91, т. 1, кн. 1, 1947, 194 с. с илл.
- Ряппо Я. П. Состояние и организация научной работы на Украине в 1925—26 году.— Научн. работн., 1927, № 4, стр. 26—33.
- Садыхов А. С. Пути развития естественных и технических наук в Узбекистане.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1963, вып. 14, стр. 66—71.
- Салов В. И. Из истории Академии наук СССР в первые годы Великой Отечественной войны (1941—1943).— Ист. зап., 1957, т. 60, стр. 3—30.
- Самойлович А. Реконструкция Всесоюзной Академии наук.— Фронт науки и техники, 1931, № 4-5, стр. 68—74.
- Сатпаев К. И. Академия наук Казахской ССР на новом этапе.— Вестн. АН СССР, 1963, № 12, стр. 26—31.
- Сатпаев К. И. Основные достижения науки в Советском Казахстане.— Вестн. АН КазССР, 1957, № 11, стр. 20—30.
- Сатпаев К. И. Развитие науки в Казахстане.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1962, вып. 13, стр. 44—48.
- Сатпаев К. И. Расцвет науки в Советском Казахстане.— Вестн. АН Каз ССР, 1960, № 10, стр. 5—11.
- Сатпаев К. И. Состояние и основные задачи науки в Казахстане (доклад на Республиканском совещании научных работников 20—21/VII—1961).— Вестн. АН КазССР, 1961, № 8, стр. 15—35.
- Сергиенко С. Р. О научной деятельности Академии наук Туркменской ССР.— Вестн. АН СССР, 1965, № 5, стр. 11—15.
- Сессия Академии наук в Новосибирске. [К организации и началу работ].— Соц. хоз-во Зап. Сибири, 1932, № 5, стр. 3—6.
- Сибирский центр науки.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1962, № 10, стр. 3—12.
- Славенас П. В. Развитие науки в Литве.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1963, вып. 15, стр. 82—86.
- Слодкевич В. С. Задачи научных исследований на территории Карельской АССР.— Изв. Карельск. и Кольск. ФАН СССР, 1957, № 1, стр. 4—11.
- Слодкевич В. С. Некоторые итоги научных исследований в Карельском филиале АН СССР.— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 112—116.
- Страдынь Я. П. Изучение истории науки в Латвии.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1963, вып. 14, стр. 204—206.
- Султанов Ш. Научно-исследовательская деятельность ТФАН СССР в первой послевоенной пятилетке (1946—1950 годы).— Уч. зап. Ленинабадск. пед. ин-та, 1958, вып. 8, стр. 76—100.
- Тедтоев А. А. Просвещение, наука и культура Северной Осетии в годы Великой Отечественной войны.— Уч. зап. Сев.-Осет. пед ин-та, 1958, т. 23, вып. 3, стр. 49—61.
- Топчиев А. В. Ленинские премии в области науки и техники.— Вестн. АН СССР, 1957, № 5, стр. 3—8.
- Топчиев А. В. Над чем работают советские ученые. Госполитиздат, М., 1959, 68 с.
- Топчиев А. В. Строительство коммунизма и наука. Академия наук СССР к сорокалетию Великого Октября. Изд-во АН СССР, М., 1957, 128 с.
- Умаров С. У. Развитие науки в Таджикистане.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1963, вып. 15, стр. 86—91.
- Умаров С. У. Таджикский филиал АН СССР и его роль в создании Академии наук Таджикистана.— Изв. вост. филиалов АН СССР, 1957, № 8, стр. 48—53.
- Ученые Академии наук СССР — лауреаты Ленинских премий.— Вестн. АН СССР, 1960, № 6, стр. 48—51.
- Фаталиев Х. М. Естественные науки в жизни общества. Изд-во МГУ, М., 1956, 167 с.
- Федорченко И. М. Наука и технический прогресс. [О достижениях и задачах АН УССР].— Вестн. АН СССР, 1959, № 11, стр. 58—64.
- Федорченко И. Семилетка и задачи ученых Украины в области естественных и технических наук.— Коммунист Украины, 1959, № 8, стр. 43—53.
- Хавин А. Новая география научного творчества. [О размещении научных центров в СССР].— Новый мир, 1957, № 10, стр. 10—25.



- Х а л и л о в З. И. В братском содружестве. [О развитии науки в АзССР]. — Лич. Азербайджан, 1964, № 3, стр. 121—127.
- Ч у д и н о в Д. К. Состояние и перспективы научно-исследовательской работы в Казахстане. — Нар. хоз-во Казахстана, 1928, № 11-12, стр. 277—290.
- Ш а п е л ь В. В. Ленинские премии 1958 года. — Физ. в shk., 1958, № 4, стр. 8—14.
- Ш е в я к о в Л. Д. Люди науки на Урале в дни войны. Дневник (1941—1943). — Ист. арх. 1961, № 1—4.
- Ш т е й н ф е л ь д Л. П. Научно-исследовательские работы в БАССР. — Хоз-во Башкирии, 1928, № 4-5, стр. 118—122.
- Щ е р б а н ь А. Расцвет науки на Украине за годы Советской власти. — Коммунист Украины, 1957, № 6, стр. 50—58.
- Юбилейный сборник, посвященный двадцатипятилетию Узбекской Советской Социалистической Республики. [1924—1949]. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1949, 507 с.
- Юбилейный сборник, посвященный тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции. Ч. 1—2. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947.

### Вопросы организации высшей школы

- А в д е е в а Н. А. Из истории народного образования на Дальнем Востоке в 1917—1922 гг. — Уч. зап. Хабаровск. пед. ин-та, 1963, т. 12, стр. 32—54.
- А м а н т а е в Ж. Развитие высшего образования и науки в Казахстане в послевоенные годы. — Уч. зап. Казахск. пед. ин-та им. Абая, 1958, т. 15, вып. 1, стр. 83—106.
- Б а л а ш о в А. Д. Реорганизация и укрепление высшей школы в СССР (1928—1934 гг.). — Уч. зап. Акад. обществ. наук, 1957, вып. 29, стр. 184—211.
- Б а р а ш к о в К. И. Высшая техническая школа накануне Великой Октябрьской социалистической революции и в первые годы Советской власти. — Научн. труды Моск. политехн. ин-та, 1957, сб. 9, стр. 95—109.
- Б е л о з е р о в С. Е. Очерки истории Ростовского университета. Изд-во Ростовск. ун-та, Ростов-на-Дону, 1959, 362 с.
- Б о г о с л о в с к и й П. С. По поводу десятилетия Пермского государственного университета (1916—1926). — Экономика. Пермь, 1926, № 6-7 (37-38), стр. 63—66.
- Б р а с л а в с к и й И. Я. Первое десятилетие советской высшей школы (1917—1927 гг.). — Вестн. высш. shk., 1957, № 6, стр. 36—45.
- Б у б н о в А. С. Основные вопросы перестройки высшего образования. — За качество кадров, 1931, № 1—5.
- Б у р ц е в Г. В. Политехнический институт в первые годы Советской власти (1918—1922). — Труды Ленингр. политехн. ин-та, 1957, № 190, стр. 91—124.
- Б ы с т р о в Н. А. Значение первых советских декретов о просвещении и высшей школе, подписанных В. И. Лениным, для перестройки и развития высшего образования на Украине. — Научн. зап. Харьковск. ин-та сов. торговли, 1958, вып. 7, стр. 69—85.
- В а л и е в А. К. Основные этапы развития высшего образования в Узбекистане. — Изв. АН УзССР. Сер. обществ. наук, 1957, № 4, стр. 47—52.
- В е к у а И. Н. Высшая школа в научном центре Сибири. [О Новосиб. ун-те]. — Вестн. АН СССР, 1964, № 6, стр. 12—20.
- В е т е р В. Н. Реформа советской высшей технической школы в годы первой пятилетки (1929—1932 гг.). — Труды Таганрогск. радиотехн. ин-та, 1957, т. 3, ч. 1, стр. 61—78.
- В о л к о в а К. Е. К вопросу об истории развития высшего образования в Узбекской ССР. [1918—1920 гг.]. — Уч. зап. Ташкентск. пед. ин-та ин. яз., 1956, вып. 1, стр. 3—20.
- В о с к о б о й н и к о в Б. Н. Доклады О. Ю. Шмидта о перестройке высшей школы. — Ист. арх., 1961, № 6, стр. 225—226.
- Всесоюзная Коммунистическая партия. Центральный комитет. Пленум. 1928. Июль. Об улучшении подготовки новых специалистов. — Нар. просв., 1928, № 7, стр. 5—9.

- Г е о р г и е в с к и й А. П. Дальневосточный государственный университет. [Возникновение, организация и деятельность].— Научн. нов. Дальн. Вост., 1929, № 3, стр. 1—6.
- Г л а в а ц к и й М. Е. Из истории основания Уральского университета.— Уч. зап. Уральск. ун-та, 1958, вып. 29, стр. 187—200.
- Г о н ч а р о в И. Н. О некоторых особенностях развития высшего образования в годы пятой пятилетки (по материалам Украины).— Труды Харьковск. политехн. ин-та. Сб. научн. работ кафедр обществ. наук, 1957, т. 23, вып. 3, стр. 139—156.
- Д а р к а н б а е в Т. Б. Основные направления и некоторые итоги научно-исследовательской работы Казахского государственного университета им. С. М. Кирова.— В кн.: Казахск. гос. ун-т им. С. М. Кирова к сорокалетию республики. Казучпедгиз, Алма-Ата, 1961, стр. 3—23.
- 20-летие Пермского университета.— Высш. шк., 1936, № 5, стр. 114—116.
- Д в о р к и н а Е. А. Основание университета в Туркестане (1918—1920 гг.).— Труды Среднеазиатск. ун-та. Ист. науки, 1957, вып. 90, кн. 14, стр. 7—35.
- Д в о р к и н а Е. А. Из истории развития университета в 1920—1923 гг. Очерк 2.— Труды Ташкентск. ун-та, 1960, вып. 170, стр. 6—28.
- Д в о р к и н а Е. А. Среднеазиатский государственный университет в конце восстановительного периода, 1924/1925 уч. год. Очерк 3.— Труды Ташкентск. ун-та. Ист. науки, 1962, вып. 199, кн. 40, стр. 89—106.
- Д в о р к и н а Е. А. Среднеазиатский государственный университет (1926—1932).— Научн. труды Ташкентск. ун-та. Ист. науки, 1964, вып. 244, кн. 5, стр. 124—143.
- 200-летний юбилей Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Изд-во МГУ, М., 1955, 132 с. с илл.
- Д ж а н д и л д и н Н. Развитие высшего образования в Казахстане.— Вестн. высш. шк., 1957, № 8, стр. 36—45.
- Днепропетровский горный институт им. Артема. 1899—1949. Днепропетровск, 1949, 101 с.
- Е ф р е м е н к о Л. К вопросу о реорганизации университетов.— Ком. рев., 1931, № 11, стр. 43—48.
- Е ф р е м е н к о Л. М. Северо-Кавказский государственный университет к десятилетию Октябрьской Революции.— Изв. Сев.-Кавказск. гос. ун-та, 1928, т. 1 (13), стр. 3—8.
- З а й ч е н к о П. А. Из истории первого Сибирского университета. [Томский ун-т].— Высш. техн. шк., 1936, № 2, стр. 3—56.
- З а к и р о в К. З. и Е ф и м о в А. С. Узбекский государственный университет. [1927—1957].— Труды Узбекск. ун-та, 1957, вып. 76, стр. 5—29.
- З и м а Б. М. Из истории высшей школы в Киргизской ССР.— Уч. зап. ист. факта Киргизск. ун-та, 1958, вып. 6, стр. 297—335.
- Из истории строительства высшей школы СССР (материалы и документы).— Вестн. высш. шк., 1957, № 11, стр. 54—63.
- История Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина. Под общ. ред. Д. Я. Мартынова. Казань, 1954, 368 с. Історія Київського університету. 1834—1959. Вид-во Київськ. ун-ту, К., 1959, 629 с. з іл.
- История Московского университета. В двух томах. Т. 2. Изд-во Моск. ун-та, М., 1955, 456 с. с илл.
- К XX-летию Донского политехнического института (18 окт. 1907—18 окт. 1927).— Изв. Донск. политехн. ин-та. Новочеркасск, 1928, т. 11, вып. 1, стр. 85—95.
- К а р и м о в Р. Х. К истории создания вузов в Узбекистане (1918—1940 гг.).— Уч. зап. Бухарск. пед. ин-та, 1958, вып. 1, стр. 33—45.
- К а р и м о в Р. Х. Проблема кадров специалистов и строительство высшей школы в Узбекистане в годы первой пятилетки.— Ист. СССР, 1959, № 6, стр. 19—29.
- К а с а т к и н В. О перестройке форм и методов вузовской работы.— Ком. просв., 1931, № 20, стр. 65—71.
- К е р н а ц е н с к а я Т. М. К истории образования Народного комиссариата просвещения РСФСР и управления высшей школой (октябрь 1917 г.—август 1918 г.).— Труды Московск. ист.-архивн. ин-та, 1965, т. 19, стр. 93—123.

- Киевский индустриальный институт. 40 лет. Юбилейный сборник к 40-летию института. Изд. Киевск. индустр. ин-та, К., 1939, 357 с.
- К и к н а д з е Г. И. Наука в высшей школе Грузинской ССР.— Вестн. высш. шк., 1957, № 12, стр. 6—13.
- К о в а н ц е в а Г. М. Строительство высшей школы в Советской Белоруссии после Великой Октябрьской социалистической революции.— Уч. зап. Минск. пед. ин-та, 1957, вып. 8, стр. 275—290.
- К о р б у т М. К. Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина за 125 лет.— Уч. зап. Казанск. гос. ун-та им. В. И. Ульянова-Ленина, 1930, т. 90, вып. 5, стр. 768—778.
- К о р о л е в Ф. Ф. Великая Октябрьская социалистическая революция и высшая школа (1917—1920).— Сов. пед., 1957, № 11, стр. 76—92.
- К р у м и н ь В. А. Высшая школа Латвии.— Вестн. высш. шк., 1965, № 7, стр. 7—10.
- Л а з а р е н к о Е. К. 300 лет Львовского университета. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1961, 84 с.
- Ленинградский ордена Ленина институт инженеров железнодорожного транспорта имени академика В. Н. Образцова. 1809—1959. Трансжелдориздат, М., 1960, 388 с.
- Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени инженерно-строительный институт за 125 лет. 1832—1957. Госстройиздат, Л., 1958.
- Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина. Труды ЛПИ, 1957, № 190, 146 с. с илл.
- Л у т ч е н к о А. И. Высшая школа СССР в годы первой пятилетки.— Вестн. высш. шк., 1957, № 7, стр. 33—43.
- М а р к е в и ч О. П. Наука і наукові працівники в Київському державному університеті за 112 років його існування (1834—1946).— Наук. зап. Київськ. держ. ун-ту, 1946, т. 5, вип. 1, стор. 9—64.
- М и л л е р В. О. Создание и деятельность Высшей школы Латвии. (8 февраля—22 мая 1919 г.).— Изв. АН Латв ССР, 1958, № 12, стр. 39—46.
- Московский ордена Ленина энергетический институт. 1905—1965. «Энергия», М., 1965, 391 с.
- О мерах по дальнейшему развитию высшего и среднего специального образования, улучшению подготовки и использования специалистов. [Изложение постановления ЦК КПСС и Совета Министров СССР].— Вестн. высш. шк., 1963, № 6, стр. 3—6.
- О работе высших учебных заведений и о руководстве высшей школой. Постановление СНК СССР и ЦК ВКП(б) 23 июня 1936 г.— Сов. студ., 1936, № 7, стр. 2—9; Высш. шк., 1936, № 1, стр. 1—3.
- Одесский университет за 75 лет (1865—1940). Сб. ст. Одесса, 1940, 198 с.
- П е с т и М. А. Высшее образование в Эстонии сегодня и завтра.— Вестн. высш. шк., 1965, № 7, стр. 18—21.
- П е т р о в - Г р у м а н т М. Белорусский университет. [1921—1931].— Наши достижения, 1931, № 3, стр. 24—32.
- П е т р о в с к и й И. Г. Московский университет за годы Советской власти.— Вестн. высш. шк., 1957, № 12, стр. 39—49.
- Положение о Всесоюзном комитете по делам высшей школы при СНК Союза ССР. Постановление СНК СССР.— Высш. шк., 1936, № 5, стр. 120—122.
- П о н о м а р е н к о Г. Я. Восстановление и дальнейшее развитие высших учебных заведений на Украине в послевоенный период (1943—1950 гг.).— Труды Донецк. индустр. ин-та. Сер. обществ. наук, 1958, т. 30, вып. 1, стр. 91—105.
- Развитие науки в Ростовском государственном университете. 1915—1965. Изд-во Ростовск. ун-та, Ростов-на-Дону, 1965, 227 с.
- Р а ш и д о в Г. Первый университет в Средней Азии. [Из истории Ташкентск. гос. ун-та им. В. И. Ленина].— Обществ. науки в Узбекистане, 1963, № 4, стр. 52—55.
- Р и е м е р и с Л. Высшее образование в Советской Латвии.— Коммунист Сов. Латвии, 1965, № 9, стр. 21—26.
- Ростовский государственный университет. 1915—1965. Статьи, воспоминания, документы. Изд-во Ростовск. ун-та, Ростов-на-Дону, 1965, 356 с.

- Ряппо Я. П. Система народного образования на Украине (о реформе высш. шк. и орг. научн.-исслед. работы).— Научн. работн., 1926, № 7-8, стр. 53—69.
- Сибирский технологический институт. [К 25-летию юбилею].— Жизнь Сибири, 1927, № 3-4, стр. 107—110.
- Сулейменов Р. Б. Развитие высшего образования в Казахстане в годы второй и третьей пятилеток (1933—1940 гг.).— Изв. АН КазССР. Сер. ист., археол. и этногр., 1961, вып. 2, стр. 3—21.
- Терентьев В. П. Из истории высшего технического образования в УССР.— Сб. научн. трудов Харьковск. горн. ин-та, 1959, т. 8, стр. 83—95.
- Харьковский государственный университет им. А. М. Горького за 150 лет. Изд-во Харьковск. ун-та, Харьков, 1955, 387 с.
- Цехер Л. 10 лет строительства рабфаков.— Нар. просв., 1929, № 3-4, стр. 163—177.
- Широв Л. А. Ленинские декреты — законодательная основа организации высшей школы в СССР.— Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. эконом., философ. и права, 1964, № 5, вып. 1, стр. 94—108.

## История физико-математических наук

### Общие вопросы

- Александров П. С. Советская математическая школа.— В кн.: Вопросы истории отечественной науки. Общее собрание АН СССР, посвященное истории отечественной науки. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1949, стр. 63—85.
- Андрунакиевич В. А. и Бычков В. П. Математическая жизнь в Молдавской ССР.— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 2 (122), стр. 247—258.
- Аржаных И. К вопросу о развитии математики и механики в Узбекистане.— Изв. АН УзССР, 1953, № 6, стр. 102—105.
- Арцимович Л. А. XXII съезд КПСС и задачи советской физики, математики и астрономии.— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 2 (104), стр. 3—11; Усп. физ. наук, 1962, т. 76, вып. 1, стр. 3—10.
- Ахундов А. М. и Карриев А. А. Из истории развития математики в Советском Туркменистане. [К сорокалетию образования ТССР и Коммунистической партии Туркменистана]. Изд. Туркм. политехн. ин-та, Ашхабад, 1964, 52 с. с черт.
- Барон С., Габович Я., Каазик Ю. и др. Математика в Советской Эстонии за последние двадцать лет. Под ред. Ю. Лумисте и Э. Тамме.— Уч. зап. Тартуск. ун-та. Труды по математике и механике, 1964, вып. 150, т. 4, стр. 12—52.
- Бермант А. Ф. О советской математической печати.— Усп. мат. наук, 1937, вып. 3, стр. 254—262.
- Боголюбов Н. Н. Успехи советской математической школы. К Международному конгрессу математиков в Москве.— Вестн. АН СССР, 1966, № 7, стр. 37—42.
- Векуа И. Н. Достижения советских математиков.— Природа, 1957, № 11, стр. 71—78.
- Вопросы истории математики и астрономии в Средней Азии, алгебры, теории чисел, дифференциальных уравнений и механики. Труды Самаркандск. гос. ун-та им. А. Навои. Нов. сер., 1962, вып. 119, 124 с. с черт.
- Выгодский М. Я. Проблемы истории математики с точки зрения методологии марксизма.— Естествознание и марксизм, 1930, № 2-3, стр. 32—48; в кн.: На борьбу за материалистическую диалектику в математике. ГНТИ, М.— Л., 1931, стр. 143—160.
- Вопросы истории физико-математических наук (материалы межвузовской конференции 1960 г.). «Высш. школа», М., 1963, 523 с. с илл.
- Гаврилов А. Ф. Математики — ученые-новаторы.— Природа, 1949, № 4, стр. 3—6.
- Гагаев Б. М. Наши достижения в области математики за 40 лет Советской власти.— Изв. высш. учебн. завед. Матем., 1957, № 1, стр. 3—8.

- Гагаев Б. М. Развитие математики в Казани за 25 лет. — Уч. зап. Казанск. гос. ун-та им. В. И. Ульянова-Ленина, 1947, т. 106, кн. 2, стр. 3—13.
- Гнеденко Б. В. и Погребысский И. Б. О некоторых задачах истории математики. — Укр. мат. журн., 1957, т. 9, № 4, стр. 359—368.
- Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б., Штокало И. З. и Юшкевич А. П. О проблемах истории математики в России и в СССР и о работах в этой области за 1956—1961 гг. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 15, Физматгиз, М., 1963, стр. 11—36.
- Граве Д. О. Математика та її значення в соціалістичному будівництві. ВУАН, К., 1932, 60 с. з іл.
- Григорьян А. Т. Очерки по истории механики в России. Изд-во АН СССР, М., 1961, 290 с.
- Гусейнов А. И. и Агаев Г. Н. К истории развития математических исследований в Азербайджане. — Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1964, № 3, стр. 3—17.
- Двали Р. Р. Достижения естественных и технических наук в Грузии. — Вопр. ист. естествозн. и техн., 1962, вып. 13, стр. 49—53.
- Делоне Б. Н. Математика и ее развитие в России. Изд-во О-ва по распр. полит. и научн. знаний, М., 1948, 20 с.; на укр. яз. — К., 1948, 20 с.
- Егоров Д. Ф. Успехи математики в СССР. Центр. изд-во народов СССР, Л., 1928, 12 с.
- Егоров Д. Ф. Успехи математики в СССР. — В кн.: Наука и техника в СССР (1917—1927). Т. 1. «Работн. просв.», М., 1927, стр. 223—234.
- Жаутыков О. А. Математика в Казахстане за советские годы. — Труды Сектора мат. и мех. АН КазССР, 1958, т. 1, стр. 5—24.
- Жаутыков О. Математические исследования в Казахстане. — Наука и техника, 1964, № 6, стр. 24—25.
- Жаутыков О. А. и Пентковский М. В. Вопросы развития математической науки в Казахстане. — Вестн. АН КазССР, 1960, № 8, стр. 9—19.
- К тридцатилетию Советской математики. — Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 5 (21), стр. 3—8.
- Казанская математическая школа за 30 лет. — Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 6 (22), стр. 3—20.
- Квальвассер В. И. Выдающиеся советские ученые в области прикладной математики. [С. А. Христианович, М. В. Келдыш, П. Я. Полубаринова-Кочина]. — Сб. научн. трудов Куйбышевск. индустр. ин-та, 1955, вып. 5, стр. 3—16.
- Кравец Т. П. Математика. — В кн.: Академия наук Союза Советских Социалистических Республик за десять лет. 1917—1927. Изд-во АН СССР, Л., 1927, стр. 8—10.
- Кузьмин Р. О. Математика в СССР за XX лет. — Природа, 1937, № 10, стр. 9—19.
- Лаврентьев М. А. Пути развития советской математики. — В кн.: Общее собрание Академии наук СССР, посвященное тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, стр. 393—402; Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, № 4, стр. 411—416.
- Лусис А. Я. Работы математиков Советской Латвии за десять лет. — Изв. АН ЛатвССР, 1950, № 11, стр. 109—121.
- Лусис А. Я. Развитие математики в Советской Латвии за последнее десятилетие. — Уч. зап. Латв. ун-та. Физ.-мат. науки, 1958, т. 20, вып. 3, стр. 5—20.
- Математика в СССР за XV лет. Под ред. П. С. Александрова, М. Я. Выгодского, В. И. Гливенко. ГТТИ, М.—Л., 1932, 239 с.
- Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957. В двух томах. Под ред. А. Г. Куроша. Т. 1—2. Физматгиз, М., 1959.
- Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947. Под ред. А. Г. Куроша, А. И. Маркушевича, П. К. Рашевского. ГТТИ, М.—Л., 1948, 1044 с.
- Математика и естествознание в СССР. Очерки развития математических и естественных наук за двадцать лет. [1917—1937]. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1938, 1006 с. с илл.
- Математика и физика. Посвящается 40-летию Великой Октябрьской социалистической революции. — Изв. Крымск. пед. ин-та, 1957 (1958), т. 29, 397 с.

- Математика на Украине за 40 лет Советской власти. — Укр. мат. журн., 1957, т. 9, № 4, стр. 355—358.
- Механика в СССР за 30 лет. 1917—1947. Сб. ст. ГТТИ, М.—Л., 1950, 417 с.
- На борьбу за материалистическую диалектику в математике. Сб. ст. ГНТИ, М.—Л., 1931, 342 с.
- На Ленинградском математическом фронте (сб. докладов). ОГИЗ — Соцэкгиз, М.—Л., 1931, 42 с.
- Наука в СССР за пятнадцать лет (1917—1932). Математика. Механика. Астрономия. ГТТИ, М.—Л., 1932.
- Натансон И. П. Советская молодежь и математика. — Природа, 1938, № 10, стр. 25—28.
- Новые достижения советских математиков. [К присуждению Ленинской премии]. — Природа, 1962, № 12, стр. 46—53.
- Очерки истории математики и механики. [Сб. ст.]. Изд-во АН СССР, М., 1963, 272 с.
- Очерки по истории АН СССР. Физико-математические науки: АН СССР 220 лет. 1725—1945. Изд-во АН СССР, М., 1945, 78 с.
- Понтрягин Л. С. Поэтические будни математики. — Научн.-техн. о-ва СССР, 1966, № 1, стр. 48—51.
- Работы математиков Советской Латвии за последнее семилетие. — Изв. АН ЛатвССР. Сер. физ. и техн. наук, 1965, № 3, стр. 3—26.
- Развитие физико-математических наук в Армении за период Советской власти. — Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, 1957, т. 10, № 5, стр. 3—18.
- Романовский В. И. Математика и механика. — В кн.: 25 лет советской науки в Узбекистане. Изд-во УзФАН СССР, Ташкент, 1942, стр. 60—63.
- Романовский В. И. Математическое исследование. — В кн.: Наука в Узбекистане за 15 лет. [1924—1939]. Гос. изд. техн. и соц.-эконом. лит-ры УзССР, Ташкент, 1939, стр. 49—52.
- Рыбников К. А. История математики. Т. 2. Изд-во Моск. ун-та, М., 1963, 334 с. с илл.
- Советская математика за 20 лет. — Усп. мат. наук, 1938, вып. 4, стр. 3—13.
- 40 лет советской математики. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 5, стр. 601—604.
- 40-летие советской математики. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 3—7.
- Сатувичус В. О работе в области математики в Литовской ССР. — Литовск. мат. сб., 1965, т. 5, № 3, стр. 361—372.
- Страдынь Я. П. Историко-научные исследования в Латвии. — Вопр. ист. естествозн. и техн., 1965, вып. 19, стр. 195—196.
- Успехи советской математики на Украине. — Укр. мат. журн., 1952, т. 4, № 4, стр. I—IV.
- Фесенков В. Г. О некоторых вопросах развития физико-математических наук в Казахстане. — Вестн. АН КазССР, 1947, № 11 (32) — 12 (33).
- Халилов З. И. Развитие математических наук в Азербайджане. — Изв. АН АзССР, 1950, № 7, стр. 61—76.
- Халилов З. И. Развитие математических наук в СССР за 30 лет. — Изв. АН АзССР, 1947, № 10, стр. 41—46.
- Халилов З. И. Развитие физико-математических наук в Советском Азербайджане. — Изв. АН АзССР, 1957, № 10, стр. 25—38.
- Чеботарев Н. Г. Работы казанских математиков в послереволюционный период (1917—1939). — Уч. зап. Казанск. ун-та им. В. И. Ульянова-Ленина, 1941, т. 101, кн. 1, стр. 57—78.
- Шмидт О. Ю. Роль математики в строительстве социализма. — Естествознание и марксизм, 1930, № 2-3, стр. 1—9.
- Штокало Й. З. Нарис розвитку математики на Україні за 40 років Радянської влади. Вид-во АН УРСР, К., 1958, 83 с.
- Штокало Й. З. Розвиток математики в УРСР за 30 років Радянської влади. — У кн.: Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР, № 10, К., 1948, стор. 5—40.
- Эфендиев М. Р. Развитие математики и математического образования в советском Азербайджане. — Труды Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат., 1953, вып. 3, стр. 3—11.

- Юшкевич А. П. История математики. — В кн.: Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947. Сб. ст. Под ред. А. Г. Куроша, А. И. Маркушевича, П. К. Рашевского, ГТТИ, М.—Л., 1948, стр. 993—1010.
- Юшкевич А. П. История математики. — В кн.: Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957. Физматгиз, М., 1959, стр. 953—987.

*Совещания, съезды, конференции*

- Александров П. С. Первая международная топологическая конференция в Москве. — Усп. мат. наук, 1936, вып. 1, стр. 260—262.
- Башмакова И. Г. и Сорокина Л. А. О Межвузовской конференции по истории физико-математических наук. — Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 6 (96), стр. 205—214.
- Бланк Я. П. и Погорелов А. В. Вторая Всесоюзная геометрическая конференция. — Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 4 (124), стр. 216—220.
- Бронштейн И. Н. Всесоюзное совещание преподавателей математики высших технических учебных заведений СССР. — Мат. просв., 1960, вып. 5.
- Всесоюзное совещание по алгебре (13—17 ноября 1939 г.). — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, т. 4, № 1, стр. 127—136.
- Всесоюзное совещание по математической статистике (12—15 ноября 1950 г.). — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1941, т. 5, № 2, стр. 173—186.
- Всесоюзный математический съезд. — Пробл. киберн., 1961, вып. 8, стр. 347—354.
- Гнеденко Б. В. Первое совещание математиков Украины. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 215—220.
- Кованцов Н. И. Первая Всесоюзная геометрическая конференция. — Укр. мат. журн., 1962, т. 14, № 4, стр. 453—455.
- Коновков А. Ф. II Межвузовская (VI Всесоюзная) конференция по истории физико-математических наук. — Вестн. Моск. ун-та. Физ., астроном., 1963, № 6, стр. 95—97.
- Коробов Н. М. Третий Всесоюзный математический съезд. — Мат. просв., 1957, вып. 1, стр. 177—178.
- Кропотов А. И. История математики на IV Всесоюзном математическом съезде. — Вопр. ист. естествозн. и техн., 1962, вып. 13, стр. 185—189.
- Лапко А. Ф. и Люстерник Л. А. Математические съезды и конференции в СССР. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 47—130; 1958, т. 13, вып. 5 (83), стр. 121—166.
- Люстерник Л. А. и Сегал Б. И. Итоги II Всесоюзного математического съезда. — Под знаменем марксизма, 1935, № 1, стр. 149—157.
- Математика в социалистическом строительстве к I Всероссийской конференции по планированию математики. — Мат. сб., 1931, т. 38, вып. 3—4, стр. 2—4.
- Мерзляков Ю. И. Всесоюзный симпозиум по теории групп. — Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 4 (124), стр. 213—215.
- Научная конференция по истории естествознания и техники. [Обзор работы]. — Вопр. ист. естествозн. и техн., 1963, вып. 14, стр. 186—190.
- Отчет о IV Межреспубликанской конференции по истории науки в Прибалтике. 27—29 ноября 1962 г. Изд-во АН ЛатвССР, Рига, 1963, 25 с.
- Петров В. В. Четвертый Всесоюзный математический съезд. — Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 1 (103), стр. 261—264.
- Решение первой Всесоюзной геометрической конференции. — Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 6 (108), стр. 244—246.
- Страдынь Я. Второе межреспубликанское совещание по истории науки в Прибалтике. — Изв. АН ЛатвССР, 1959, № 3, стр. 171—174.
- Страдынь Я. Пятая конференция по истории науки в Прибалтике. — Изв. АН ЛатвССР, 1964, № 9, стр. 111—115.
- Страдынь Я. Третья Межреспубликанская конференция по истории науки в Прибалтике. — Изв. АН ЛатвССР, 1960, № 5, стр. 189—192.
- Страдынь Я. П. Четвертая Межреспубликанская конференция по истории науки в Прибалтике. — В кн.: Из истории техники ЛатвССР. Сб. ст. Т. 5. Изд-во АН ЛатвССР, Рига, 1964, стр. 235—236; Вопр. ист. естествозн. и техн., 1963, вып. 15, стр. 186—189; Изв. АН ЛатвССР, 1963, № 1, стр. 132—137.

- Труды Всероссийского съезда математиков в Москве 27 апр.— 4 мая 1927 г. Госиздат, М.—Л., 1928, 280 с.
- Труды Второго Всесоюзного математического съезда. Ленинград, 24—30 июня 1934 г. Т. 1—2. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1935—1936.
- Труды Первого Всесоюзного съезда математиков (Харьков, 1930 г.). ОНТИ, М.—Л., 1936, 376 с.
- Труды Третьего Всесоюзного математического съезда. Москва. Июнь-июль 1956 г. Т. 1—4. Изд-во АН СССР, М., 1956—1959.
- Труды Четвертого Всесоюзного математического съезда. Ленинград, 3—12 июля 1961 г. Т. 1—2. «Наука», Л., 1963—1964.
- У р а з б а е в Б. М. О Всесоюзном совещании по алгебре и теории чисел.— Вестн. АН КазССР, 1951, № 12 (81), стр. 97—102.
- Ш а т у н о в с к и й Я. Первый математический съезд.— Под знаменем марксизма, 1927, № 5, стр. 180—185.

*Математика в академиях наук, научно-исследовательских учреждениях и высших учебных заведениях*

- А г р о н о м о в Н. Сборник статей и заметок по различным вопросам математики и ее преподавания.— Труды Дальневосточн. ун-та, 1927, т. 15, вып. 1, стр. 1—58.
- А л е к с а н д р о в П. С. Вступительный доклад на торжественном заседании Московского математического общества 20 октября 1964 г.— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 3 (123), стр. 4—9.
- А л е к с а н д р о в П. С. Московское математическое общество.— Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 1 (11), стр. 232—241.
- А л е к с а н д р о в П. С. и Г о л о в и н О. Н. Московское математическое общество. [К 90-летию научной деятельности].— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 9—46.
- А л е к с а н д р о в П. С., Г н е д е н к о Б. В. и С т е п а н о в В. В. Математика в Московском университете в XX в.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 1. Физматгиз, М., 1948, стр. 9—42.
- А н д р о н о в И. К. Итоги сорокалетнего развития математического образования в СССР.— Матем. в шк., 1957, № 5, стр. 6—21.
- Б а б к и н А. Г., К р а в ч е н к о - Б е р е ж н о й Р. А. и М е д в е д е в М. Ю. О работе математической группы в Кольском филиале Академии наук СССР.— Заводск. лаб., 1965, т. 31, № 10, стр. 1280—1281.
- Б а л е з и н С. А. Развитие физико-математических и естественных наук в высшей школе.— Вестн. высш. шк., 1947, № 11, стр. 6—23.
- Б е р е з и н И. С. О кафедре вычислительной математики Московского государственного университета.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 3 (75), стр. 255—261.
- Б е р н ш т е й н С. Н. Постановка преподавания математики во втузах.— Высш. шк., 1937, № 2, стр. 69—73.
- Б е с п а м я т н ы х Н. Д. Математика в Вильнюсском университете (1803—1932 гг.).— Уч. зап. Карельск. пед. ин-та, 1963, т. 14, стр. 49—69.
- В Московском математическом обществе. [Вопросы реорганизации].— Научное слово, 1931, № 1, стр. 108—111.
- В и л е н к и н Н. Я. и Я г л о м И. М. О преподавании математики в педагогических институтах.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 2 (74), стр. 199—209.
- В и ш и к М. И., Н о в и к о в С. П. и П о с т н и к о в М. М. Горьковский математический семинар по гомотопической топологии.— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 6 (120), стр. 237—238.
- В и ш и к М. И. и Ш и л о в Г. Е. О семинаре И. М. Гельфанда по функциональному анализу и математической физике в МГУ.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 2 (80), стр. 253—263.
- Г а г а е в Б. М. Исследования по теории ортогональных функций в Казанском университете.— Уч. зап. Казанск. ун-та им. В. И. Ульянова-Ленина. Труды юбилейной сессии, 1955, т. 115, кн. 10, стр. 23—24.



- Гамкрелидзе Р. В. Семинар Л. С. Понтрягина по математическим проблемам теории колебаний и автоматического регулирования. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 3 (75), стр. 267—272.
- Гахов Ф. Д. Семинар по математическому анализу и механике при Ростовском государственном университете. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 3 (75), стр. 263—266.
- Гливенко В. И. Математические общества Москвы и Ленинграда в 1926 г. — Научн. работн., 1927, № 5-6, стр. 132—134.
- Гнеденко Б. В. К столетию Московского математического общества. — Матем. в шк., 1965, № 2, стр. 95—96.
- Гнеденко Б. О математическом образовании в высших военно-учебных заведениях. — Вестн. противовозд. обороны, 1959, № 12, стр. 14—19.
- Граве Д. и Бреус К. Институт математики АН УРСР до XX роковин Великої Жовтневої революції. — Журн. Ін-ту математики (АН УРСР), К., 1937, № 3, стр. 3—17.
- Груздев В. С. Ученые общества Казани в 1926—27 учебном году. — Научн. работн., 1927, № 5-6, стр. 134—137.
- Гусейнов А. И. Влияние русских ученых на развитие математики в Азгос-университете. — Уч. зап. Азербайдж. ун-та. Сер. физ.-мат. наук, 1964, № 3, стр. 3—23.
- Декларация инициативной группы по реорганизации Математического общества [Московского]. — Научн. работн., 1930, № 11-12, стр. 67—71.
- Данин С. А. и Годес О. М. Отдел математической физики Государственного физико-технического института. — Журн. техн. физ., 1932, т. 2, вып. 1, стр. 60—61.
- Добровольский В. А. Семинар по истории математических наук Института математики АН УССР за пять лет. — Укр. мат. журн., 1962, т. 14, № 1, стр. 113—115.
- Достижения математиков Ростовского государственного университета. — Уч. зап. Ростовск.-на-Дону ун-та. Труды физ.-мат. фак-та, 1959, т. 66, вып. 7, стр. 3—10.
- Егоров Д. Ф. Работа Научно-исследовательского института математики и механики за пятилетие с 1923 по 1928 г. — Изв. Ассоц. научно-исслед. ин-тов при физ.-мат. фак-те МГУ, 1928, т. 1, вып. 3-4, стр. 301—303.
- Заседания Московского математического общества. — Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 3 (65), стр. 179—192; 1957, т. 12, вып. 2 (74), стр. 211—233.
- Зияев К. Г. Кафедра высшей математики за 30 лет. — Сб. научно-исслед. работ Ташкентск. текстильн. ин-та, 1964, вып. 19, стр. 5—19.
- Институт физики и математики к сороковой годовщине Великой Октябрьской социалистической революции. — Труды Ин-та физ. и мат. АН БССР, 1957, вып. 2, стр. I—IV.
- Кравчук М. Ф. Математика та математики в Київському університеті за сто років (1834—1934). — У кн.: Розвиток науки в Київському університеті за сто років. К., 1935, стор. 34—69.
- Кравчук М. Ф. О работах Института математики Академии наук УССР. — Усп. мат. наук, 1937, вып. 3, стр. 249—251.
- Краткий очерк о работе геометрического кружка при Научно-исследовательском институте математики и механики МГУ. — Труды геометрического кружка (Научно-исслед. ин-т мат. и мех. при Первом Моск. гос. ун-те), 1930, № 1, стр. 59—63.
- Кружок физиков-математиков — материалистов при Секции естественных и точных наук Комкадемии. — Естествознание и марксизм, 1929, № 1, стр. 179—181.
- Куклес И. С. Математика и механика в Дальневосточном государственном университете. [1931—1935 гг.]. — Усп. мат. наук, 1936, вып. 1, стр. 274—277.
- Куликовский П. Математический кабинет Киевского машиностроительного института. — За пром. кадры, 1931, № 11-12 (14-15), стр. 57—59; 1932, № 11-12 (26-27), стр. 48—53.
- Куроп А. Г. Московское математическое общество за последнюю треть века (доклад на юбилейном заседании о-ва). — Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 3 (123), стр. 10—18.

- К у р о ш А. Г. и С к о р н я к о в Л. А. Научно-исследовательский семинар кафедры алгебры Московского университета.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 5 (77), стр. 261—269.
- Л а п т е в Б. Л. Математика в Казанском университете в советский период.— Уч. зап. Казанск. ун-та им. В. И. Ульянова-Ленина, 1960, т. 120, кн. 7, стр. 24—66.
- Л е й б м а н Э. Б. Математическое отделение Новороссийского общества естествоиспытателей (1876—1928).— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 14. Физматгиз, М., 1961, стр. 393—440.
- Л ю с т е р н и к Л. А. Выступление на юбилейном заседании Московского математического общества.— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 3 (123), стр. 21—30.
- М а р ч е в с к и й М. Н. История математических кафедр в Харьковском университете за 150 лет его существования.— Зап. Мат. о-ва. Харьков, 1956, т. 24, вып. 4, стр. 70—79.
- М е н ь ш о в Д. Е. Московское математическое общество в период 1910—1920 гг.— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 3 (123), стр. 19—20.
- М о р д у х а й - Б о л т о в с к о й Д. Д. Математика в Ростовском университете.— В кн.: Ростовский-на-Дону университет. Юбилейный сборник. 1915—1940. Ростовиздат, Ростов-на-Дону, 1941, стр. 46—52.
- М о р о з о в а Н. Н. Из истории преподавания математики в Дерптском университете.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та. Выш. алгебра, элементарн. мат., методика мат., 1963, т. 123, вып. 3, стр. 115—121.
- Н е м ы ц к и й В. В. Семинар по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 4 (76), стр. 235—239.
- Н о р д е н А. П. Казанское физико-математическое общество.— Мат. просв., 1957, вып. 1, стр. 179—181.
- Отчеты о деятельности научных кружков ДПИ за 1925—26 год.— Бюл. политехн. о-ва при Донск. политехн. ин-те. Новочеркасск, 1927, № 1, стр. 5—41.
- Очерки по истории физико-математических наук в Казанском университете. Уч. зап. Казанск. ун-та им. В. И. Ульянова-Ленина, 1960, т. 120, кн. 7, 110 с.
- Протоколы очередных заседаний физико-математического общества при Пермском государственном университете.— Журн. Физ.-мат. о-ва при Пермск. ун-те, 1927, № 4, стр. 135—141.
- Р у п а с о в К. А. Московский математический кружок (к 50-летию со дня организации).— Уч. зап. Тамбовск. пед. ин-та, 1957, вып. 11, стр. 39—54.
- С а б и р о в М. С. и И с к а н д е р о в Р. И. Математические исследования Узбекского государственного университета.— Труды Узбекск. ун-та, 1957, вып. 76, стр. 101—124.
- С е г а л Б. И. О работе группы математики Академии наук СССР.— Вестн. АН СССР, 1938, № 1, стр. 52—55.
- С и н ц о в Д. М. Харьковское математическое общество за 50 лет.— В кн.: Труды Первого Всесоюзного съезда математиков. ОНТИ, М.—Л., 1936, стр. 97—105.
- Состав математического общества.— Мат. сб., 1927, т. 34, вып. 1, стр. 1—4; 1928, т. 35, вып. 1, стр. 1—4.
- Т о и д з е Д. М. Математический институт [АН СССР] им. В. А. Стеклова. [Обзор работы за 1932—1937 гг.].— Вестн. АН СССР, 1937, № 10-11, стр. 25—36.
- Т у р ч а н и н о в а З. И. Элементы истории математики в программе втуза. Приморск. кн. изд-во, Владивосток, 1956, 20 с.
- Ф и н и к о в С. П. О научном направлении кафедры дифференциальной геометрии МГУ.— Усп. мат. наук, 1954, т. 9, вып. 4 (62), стр. 3—18.
- Хроника [научной деятельности Казанского университета в области математики].— Уч. зап. Казанск. ун-та им. В. И. Ульянова-Ленина, 1932, т. 4, вып. 1, стр. 87—91.
- Ц л а ф Л. Я. В объединенном научно-методическом семинаре кафедр математики московских втузов.— Мат. просв., 1959, вып. 4, стр. 227—231.
- Ц л а ф Л. Я. Объединенный научно-методический семинар кафедр высшей математики московских втузов.— Мат. просв., 1957, вып. 1, стр. 183—186.

- Чеботарев Н. Г. Основные направления в работе Института математики и механики Харьковского государственного университета. — Усп. мат. наук, 1937, вып. 3, стр. 252—253.
- Штокало И. З. Достижения математических наук в Академии наук УРСР. — Вісн. АН УРСР, 1947, № 8.

*Библиографическая и справочная литература*

- Аксенова Н. Н. Библиография диссертаций, защищенных в Томском государственном университете им. В. В. Куйбышева за 1935—1952 гг. Томск, 1955, 72 с.
- Академия наук СССР. Отделение физико-математических наук. Рефераты научно-исследовательских работ за 1943—1944 годы. Отв. ред. А. Ф. Иоффе. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945, 173.
- Академия наук СССР. Отделение физико-математических наук. Рефераты научно-исследовательских работ за 1945 г. Отв. ред. А. Ф. Иоффе. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1946, 102 с.
- Архив Академии наук СССР. Обзор архивных материалов. Т. 1—5. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1944—1951.
- Библиография изданий Академии наук СССР. Ежегодник. Т. 1—8. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1957—1965.
- Библиография работ научных сотрудников Института физики и математики Академии наук Белорусской ССР за 1953—1958 годы. — Труды Ин-та физ. и мат. АН БССР, 1959, вып. 3, стр. 257—267.
- Библиография трудов научных сотрудников Академии наук Эстонской ССР в области технических и физико-математических наук, опубликованных в 1956—1963 гг. — Изв. АН ЭССР. Сер. техн. и физ.-мат. наук, 1957, т. 6, № 1, прил., стр. I—VIII; 1958, т. 7, № 1, прил., стр. I—XIV; 1959, т. 8, № 1, прил., стр. I—XVI; 1960, т. 9, № 1, прил., стр. I—XVII; Сер. физ.-мат. и техн. наук, 1961, т. 10, № 1, прил., стр. I—XXVI; 1962, т. 11, № 1, прил., стр. III—XXXV; 1963, т. 12, № 2, прил., стр. I—XXIX; 1963, т. 12, № 2, прил., стр. I—XXIX; 1964, т. 13, № 2, прил., стр. I—XXXIII.
- Гурко З. В. и Стулова О. В. Развитие советской науки за 40 лет. Указатель юбилейной литературы 1957—1958 гг. Изд-во АН СССР, М., 1960, 88 с.
- 220 лет Академии наук СССР (1725—1945). Справочная книга. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945, 327 с.
- Докторские и кандидатские диссертации, защищенные в Московском государственном университете с 1934 по 1954 г. Библиогр. указатель. Вып. 1. Мех.-мат., физ., хим. фак-ты. Изд-во Моск. ун-та, М., 1956, 255 с.
- Журавский А. М. Математика и механика в «Записках Ленинградского горного института». — Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1959, т. 40, стр. 41—46.
- Известия Технологического института. 1877—1928. Указатель содержания томов 1—25. Сост. Б. П. Гущин. — Изв. Технол. ин-та им. Ленингр. Совета рабочих, крестьянских и красноармейских депутатов, 1928, т. 2 (26), стр. 413—440.
- Издания Академии наук СССР. 1917—1947. Вып. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947, 60 с.
- Издания Академии наук СССР. 1951—1956. Изд-во АН СССР, М., 1956, 152 с.
- История естествознания. Литература, опубликованная в СССР. Вып. 1 (1917—1947). Изд-во АН СССР, М., 1949, 519 с. Вып. 2 (1948—1950), 1955, 395 с. Вып. 3 (1951—1956), 1963, 430 с.
- Калягина Н. А. Указатель статей к Ученым запискам Казанского университета им. В. И. Ульянова-Ленина за 1900—1950 гг. Казань, 1955, 132 с.
- Картавцов И. М. Утраты русской науки за 1923—1927 гг. (некрологическая справка). — Научн. работн., 1925, № 2, стр. 185—192; № 3, стр. 160—164; 1926, № 1, стр. 143—150; 1927, № 10, стр. 110—119; 1928, № 8-9, стр. 112—119; № 11, стр. 114—120.
- Каталог книг издательства Академии наук СССР. «Наука», М., 1965, 367 с.

- Кирикова Н. Н. и Таубина Е. П. Диссертации, защищенные в Ленинградском ордена Ленина государственном университете. 1934—1954 гг. [Библиогр. указатель]. Изд-во ЛГУ, Л., 1955, 256 с.
- Куликов С. М. О диссертациях по начертательной геометрии и черчению. [Библиогр. указатель].—Труды Моск. научно-метод. сем. по начерт. геом. и инж. графике, 1963, вып. 2, стр. 318—324.
- Леонидов К. С. и Ракова Э. С. Новые издания по прикладному анализу и вычислительной математике.—Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 1 (85), стр. 261—265.
- Летопись периодических изданий СССР. 1955—1960. Орган государственной библиографии СССР. Ч. 1. Журналы, труды, бюллетени. Изд-во Всесоюз. книжн. пал., М., 1963, 1025 с.
- Лукомская А. М. Библиографические источники по математике и механике, изданные в СССР за 1917—1952 гг. Под ред. В. И. Смирнова. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1957, 354 с.
- Лукомская А. М. Библиографические источники по математике и механике, изданные в СССР за 1953—1960 гг. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1963, 248 с.
- Лукомская А. М. Библиография отечественной литературы по математике и физике. Обзор библиогр. источников. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1961, 156 с.
- Люди русской науки. Очерки о выдающихся деятелях естествознания и техники. Физматгиз, М., 1961, 600 с.
- Маслов Д. П. и Филимонов М. Р. Библиография научных работ, опубликованных в изданиях Томского государственного университета им. В. В. Куйбышева за 1889—1950 гг. Математика.—Уч. зап. Томск. ун-та, 1954, № 21, стр. 113—154.
- Маслова О. В. Систематический указатель к изданиям Среднеазиатского государственного университета с 1922 по 1950 г. [Гл. ред. Т. З. Захидов]. Изд-во САГУ, Ташкент, 1952, 118 с.
- Математика в изданиях Академии наук. 1728—1935. Библиогр. указатель. Сост. О. В. Динзе и К. И. Шафрановским. Под. ред. В. И. Смирнова. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1936, 315 с.
- Математика в изданиях Академии наук УзССР. [Перечень изданий]. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1950, 12 с.
- Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 2. Библиография. Физматгиз, М., 1959, 819 с.
- Математика и механика в изданиях Академии наук СССР. Библиография. Вып. 2—3. Изд-во АН СССР, М.—Л. Вып. 2, 1936—1947, 1955, 512 с. Вып. 3, 1948—1952, 1957, 361 с.
- Меликов К. В. Список работ по математическим наукам, опубликованных в СССР за период 1917—1927 гг.—Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва, 1928, т. 2, вып. 1, стр. 5—39; 1929, т. 2, вып. 2, стр. 5—15.
- Оникеев С. П. Систематический указатель научных работ сотрудников Воронежского университета с 1918 по 1953 год. Отв. ред. Б. М. Козо-Полянский и П. Г. Адерихин. Воронеж, 1956, 153 с.
- Орлов В. Б. Издание математической литературы Гостехиздатом за 25 лет. [Обзор].—Мат. просв., 1957, вып. 1, стр. 231—242.
- Основные иностранные библиографические источники по математике и механике (1931—1957). Сост. А. М. Лукомская. Под ред. С. М. Лозинского. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1960, 182 с.
- Периодическая печать СССР. 1917—1949. Библиографический указатель. Журналы, труды и бюллетени по естественным наукам и математике. Изд-во Всесоюз. кн. пал., М., 1956, 220 с.
- Печатные труды преподавательского персонала Донского политехнического института за 1927 г.—Изв. Донск. политехн. ин-та. Новочеркасск, 1928, т. 11, вып. 1, стр. 1—103.
- Сакоч Г. Н. Список книг и статей по математике, изданных на Украине в 1956—1960 гг.—Укр. мат. журн., 1960, т. 12, № 1, стр. 107—111; № 2, стр. 226—229; № 4, стр. 494—497.

- Синцов Д. М. Огляд робіт з геометрії на Україні за 20 років (1917—1937).— Праці Сектора геом. Наук.-дослідн. ін-ту мат. і мех. і каф. геом. Харк. ун-ту. Геометр. зб. X, 1938, вип. 1, стор. 3—8.
- Систематический указатель к изданиям Ростовского-на-Дону государственного университета. 1869—1960. Вып. 1. Физ.-мат. науки. Изд. научн. б-ки, Ростов-на-Дону, 1962, 244 с.
- Систематический указатель статей к периодическим изданиям Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина. 1815—1947. Казань, 1960, 279 с.
- Смышлеев В. К. Указатель научно-методической литературы по математике.— Уч. зап. Марийск. пед. ин-та, 1958, т. 19, вып. 3, стр. 499—519.
- Список диссертаций, которые были защищены в Киевском государственном университете за 1945—1952 гг. Изд-во КГУ, К., 1954, 38 с., на укр. и русск. яз.
- Список докладов, прочитанных в заседаниях Ленинградского физико-математического общества с 1922 по 1927 год.— Журн. Ленинград. физ.-мат. о-ва, 1927, т. 1, вып. 1, стр. 1—2 (прил.).
- Узаков Ю. К. и Зияев К. Г. Обзор литературы по истории математики на узбекском языке.— Сб. научно-исслед. работ Ташкентск. текстильн. ин-та, 1964, вып. 19, стр. 152—160.
- Указатель докторских и кандидатских диссертаций, защищенных в Узбекистане в 1936—1951 гг. Общественные науки, естественные науки, математика. Изд-во САГУ, Ташкент, 1954, 175 с.
- Указатель к журналу «Вестник Коммунистической академии» за 1923—1927 гг.— Вестн. Ком. акад., 1928, вып. 26 (2), стр. 217—238.
- Указатель статей к «Ученым запискам Казанского университета им. В. И. Ульянова-Ленина» за 1900—1950 гг. Казань, 1955, 131 с.
- Указатель статей, опубликованных в «Успехах математических наук» за годы 1936—1960. Т. I—XV.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 6 (102), стр. 11—288.
- Українська математична бібліографія. 1917—1960. Під ред. Й. З. Штокало. Вид-во АН УРСР, К., 1963, 382 с.
- Хоруннов Р. X. Диссертационные работы по начертательной геометрии и графике (1937—1960 гг.). [Алф. указатель].— Труды Ташкентск. ин-та инж. ж.-д. транспорта, 1963, вып. 6, стр. 161—172.
- Чайковський М. Українська математична наукова бібліографія (1894—1929). Одеса, 1931, 46 с.
- Эрман Л. М. и Герасимова М. М. Библиография изданий Академии наук Киргизской ССР за 1957 год.— Изв. АН КиргССР. Сер. естеств. и техн. наук, 1959, т. 1, вып. 1, стр. 145—165.
- Якобсон М. и Пейле Е. Библиография диссертаций, защищенных в Латвийской ССР с 1945 по 1955 г. (первое полугодие).— Изв. АН ЛатвССР, 1955, № 9, стр. 150—160.
- Якобсон М. и Пейле Е. Библиография диссертаций, защищенных в Латвийской ССР с 1955 по 1958 г.— Изв. АН ЛатвССР, 1959, № 12, стр. 177—188.

## 2. Персоналии

### Н. А. Агрономов

- Бекеев А. Агрономов Н. А. [Некролог].— Научн. нов. Дальн. Вост., 1929, № 4-5, стр. 13—16.
- Сборник, посвященный памяти профессора Николая Александровича Агронома. Труды Дальневост. гос. ун-та, 1930, сер. 15, № 6, 82 с.

### А. Д. Александров

- Ефимов Н. В., Залгаллер В. А. и Погорелов А. В. Александр Данилович Александров. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 6 (108), стр. 171—184, с портр.

## ***П. С. Александров***

- Павел Сергеевич Александров. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук Нов. сер., 1946, т. 1, вып. 5-6 (15-16), стр. 231—233.  
Понтрягин Л. С. и Мищенко Е. Ф. Павел Сергеевич Александров.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 4 (70), стр. 183—192, с портр.  
Пятидесятилетие П. С. Александрова.— Матем. в shk., 1946, № 3, стр. 55.  
Павел Сергеевич Александров (к 70-летию со дня рожд. и 50-летию научн. деят.).— Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 4 (130), стр. 4—7.

## ***К. А. Андреев***

См. библиографию ко второму тому настоящего издания.

## ***С. Н. Андрианов***

- Гагаев Б. М. Сергей Николаевич Андрианов. [Некролог].— Изв. высш. учебн. завед. Мат., 1961, № 1, стр. 181—184, с портр.

## ***И. К. Андронов***

- Новоселов С. И. Иван Козьмич Андронов. [К 70-летию со дня рожд.].— Матем. в shk., 1964, № 3, стр. 83—84, с портр.

## ***Н. И. Ахиезер***

- Балтага В., Дринфельд Г. и Левин Б. Наум Ильич Ахиезер. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 2 (42), стр. 191—194, 1 л., с портр.  
Крейн М. Г. и Левин Б. Я. Наум Ильич Ахиезер. [К 60-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 4 (100), стр. 223—234, с портр.  
Присуждение премии им. П. Л. Чебышева 1948 г. [Н. И. Ахиезеру].— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, т. 14, № 1, стр. 101—104.

## ***И. Е. Базилевич***

- Аленицын Ю. Е., Корицкий Г. В. и Левин В. И. Иван Евгеньевич Базилевич. [К 60-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 5 (125), стр. 288—292, с портр.

## ***С. С. Банах***

- С. С. Банах.— В кн.: Банах С. Курс функціонального аналізу. «Рад. школа», К., 1948, 216 с.

## ***Н. К. Бари***

- Келдыш Л. В. и Ульянов П. Л. Нина Карловна Бари (1901—1961).— Матем. в shk., 1965, № 2, стр. 69—72, с портр.  
Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А. Нина Карловна Бари.— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 6 (46), стр. 184—185.  
Меньшов Д. Е., Стечкин С. Б. и Ульянов П. Л. Нина Карловна Бари. [1901—1961. Некролог].— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 1 (103), стр. 121—133, с портр.  
Меньшов Д. Е. и Ульянов П. Л. Памяти профессора Н. К. Бари.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех., 1962, № 1, стр. 74—80, с портр.

## ***С. В. Бахвалов***

- Денисюк И. Н., Лаптева Д. Г. и Хованский Г. С. Памяти С. В. Бахвалова.— В кн.: Номографич. сб., № 2. Изд-во АН СССР, 1964, стр. 3—5.

И в а н и ц к а я В. П. Сергей Владимирович Бахвалов. [1898—1963. Некролог].— Матем. в shk., 1964, № 1, стр. 94—95.

### *И. И. Бентковский*

Бентковский И. И. [Некролог].— ЛЭМИ, 1932, № 1, стр. 12.

### *Е. С. Березанская*

Большен Е. М. Елизавета Савельевна Березанская. [К 70-летию со дня рожд. и 45-летию научно-пед. деят.].— Матем. в shk., 1961, № 2, стр. 75—76, с портр.

### *А. Ф. Бермант*

Курош А. Г., Люстерник Л. А. и др. Анисим Федорович Бермант. [1904—1959. Некролог].— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 5 (89), стр. 117—121, с портр.

### *С. Н. Бернштейн*

- Бернштейн С. Н. Собр. соч. Т. 1—4. Изд-во АН СССР, М., 1952—1964.
- Акинфиева Н. И. Список трудов С. Н. Бернштейна.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, т. 4, № 3, стр. 253—260.
- Ахиезер Н. И. Академик С. Н. Бернштейн и его работы по конструктивной теории функций. Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1955, 112 с.
- Ахиезер Н. И. Работы академика С. Н. Бернштейна по конструктивной теории функций. [К 70-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 1 (41), стр. 3—67.
- Виденский В. С. Сергей Натанович Бернштейн — основатель конструктивной теории функций.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 2 (98), стр. 21—24.
- Гельфонд А. О. и Сарманов О. В. К восьмидесятилетию Сергея Натановича Бернштейна.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, т. 24, № 3, стр. 309—314, с портр.
- Гончаров В. Л. Сергей Натанович Бернштейн (к 70-летию со дня рожд.).— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 3 (37), стр. 172—183, с портр.
- Гончаров В. Л. и Колмогоров А. Н. К шестидесятилетию Сергея Натановича Бернштейна.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, т. 4, № 3, стр. 249—252.
- Записка об ученых трудах С. Н. Бернштейна.— Изв. Рос. акад. наук, 1924, т. 18, № 12—18, стр. 447—448.
- К семидесятилетию Сергея Натановича Бернштейна.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, № 3, стр. 193—198, с портр.
- Колмогоров А. Н. и Сарманов О. В. О работах С. Н. Бернштейна по теории вероятностей (к 80-летию со дня рожд.).— Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. 5, вып. 2, стр. 215—224, с портр.
- Кузьмин Р. О. Математические работы С. Н. Бернштейна.— Усп. мат. наук, 1940, вып. 8, стр. 3—7, с портр.
- Линник Ю. В. О работах С. Н. Бернштейна по теории вероятностей.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 2 (98), стр. 25—26.
- Успенский Я. В. Записка об ученых трудах проф. С. Н. Бернштейна.— В кн.: Зап. об уч. трудах действ. членов АН СССР по отд. физ.-мат. наук, избр. 12 янв. 1929 г. Изд-во АН СССР, Л., 1930, стр. 18—24.
- Харшиладзе Ф. И. О методе суммирования С. Н. Бернштейна.— Мат. сб. Нов. сер., 1942, т. 11, вып. 1-2, стр. 121-148.

### *Н. М. Бескин*

Зетель С. И. и Маргулис А. Я. Николай Михайлович Бескин [К 60-летию со дня рожд.].— Матем. в shk., 1965, № 1, стр. 82, с портр.

### **А. В. Бицадзе**

Канторович Л. В. Андрей Васильевич Бицадзе. [К 50-летию со дня рожд.].— Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 4, стр. 729—730, с портр.

### **Н. Н. Боголюбов**

Митропольский Ю. А. и Тябликов С. В. Николай Николаевич Боголюбов. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 5 (89), стр. 167—180, с портр.

Николай Николаевич Боголюбов. Вступ. ст. Ю. А. Митропольского и В. С. Тябликова. Библиогр. сост. А. П. Елифановой. Изд-во АН СССР, М., 1959, 50 с., с портр.

Штокало Й. З. Микола Миколайович Боголюбов.— Наук. зап. Київськ. ун-ту, 1952, т. 11, вып. 7, Мат. зб., № 6, стор. 117—127, з портр.

### **Г. П. Боев**

Гнеденко Б. и Чудаков Н. Георгий Петрович Боев. [1898—1959. Некролог].— Изв. высш. учебн. завед. Мат., 1960, № 1, стр. 245—248, с портр.

### **В. М. Брадис**

Данилова Е. Ф. Владимир Модестович Брадис. [К 70-летию со дня рожд.].— Матем. в шк., 1961, № 3, стр. 83—85, с портр.

### **Ц. Бурстын**

Бурстын Ц. Математичныя працы. Выд-во АН БССР, Минск, 1932, 76 с.

### **С. С. Бюшгенс**

Фиников С. П. Сергей Сергеевич Бюшгенс. [К 70-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1953, т. 8, вып. 4 (56), стр. 185—192, с портр.

### **В. В. Вагнер**

Либер А. Е., Пензов Ю. Е. и Рашевский П. К. Виктор Владимирович Вагнер. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 6 (84), стр. 221—227, с портр.

### **А. З. Вальфиш**

Ломадзе Г. А. и Чогошвили Г. С. Арнольд Зельманович Вальфиш. [1892—1962. Некролог].— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 4 (112), стр. 119—128, с портр.

### **И. Н. Векуа**

Делоне Б. Н., Виноградов В. С. и Кудрявцев Л. Д. Новый вклад в математику. [К присужд. Ленинской премии 1963 г. И. Н. Векуа за научн. труд «Обобщенные аналитические функции».— Природа, 1963, № 10, стр. 55—56.

Долдзге Д. Илья Несторович Векуа.— Наука и техника. Тбилиси, 1950, № 5, стр. 11—13, на груз. яз.

Илья Несторович Векуа. Вступ. ст. И. И. Данилюка. Библиогр. сост. Г. Н. Филипиной. Изд-во АН СССР, М., 1963, 43 с.

Лаврентьев М. А. и Соболев С. Л. Илья Несторович Векуа. [К 50-ле-



тию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 4 (76), стр. 227—234, с портр.  
Работы И. Н. Векуа.— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 3 (37), стр. 167—169.

### **В. П. Вельмин**

Штокало И. З., Калужнин Л. А., Благовещенский Ю. В. и Боголюбов А. Н. Владимир Петрович Вельмин. [К 80-летию со дня рожд.].— Укр. мат. журн., 1965, т. 17, № 5, стр. 137—138, с портр.

### **Б. А. Венков**

Малышев А. В. и Фаддеев Д. К. Борис Алексеевич Венков. [К 60-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 4 (100), стр. 235—240, с портр.

### **И. М. Виноградов**

Виноградов И. М. Избр. труды. [Отв. ред. Ю. В. Линник]. Изд-во АН СССР, М., 1952, 436 с.

Академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его 60-летию. Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, т. 38, 387 с.

Действительный член Академии наук СССР Иван Матвеевич Виноградов. Изд. АН СССР, М., 1938, 15 с.

Делоне Б. Н. К шестидесятилетию Ивана Матвеевича Виноградова.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1951, т. 15, № 5, стр. 385—394, с портр.

Линник Ю. В. и Постников А. Г. Иван Матвеевич Виноградов. [К 70-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 2 (104), стр. 201—214, с портр.

Марджанишвили К. К. Иван Матвеевич Виноградов. [К 60-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 5 (45), стр. 190—196, с портр.

Постников А. Г. К семидесятилетию Ивана Матвеевича Виноградова.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 5, стр. 621—628, с портр.

Сборник статей. Посвящается акад. Ивану Матвеевичу Виноградову к его семидесятилетию. Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1961, т. 64, 347 с.

Успенский Я. В. Записки об ученых трудах проф. И. М. Виноградова.— В кн.: Зап. об уч. трудах действ. членов АН СССР по отд. физ.-мат. наук, избр. 12 янв. 1929 г. Изд-во АН СССР, Л., 1930, стр. 34—40.

Чествование академика И. М. Виноградова.— Вестн. АН СССР, 1951, № 10, стр. 73—75.

### **А. К. Власов**

См. библиографию ко второму тому настоящего издания.

### **Б. З. Вулих**

Акилов Г. П., Владимиров Д. А. и др. Борис Захарович Вулих. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 6 (114), стр. 242—243.

### **А. Ф. Гаврилов**

Александр Феликсович Гаврилов. [К 70-летию со дня рожд. и 45-летию научно-пед. деят.].— Вестн. связи, 1958, № 1, стр. 34, с портр.

### **Б. М. Гагаев**

Салехов Г. С. и Хованский А. Н. Б. М. Гагаев.— Усп. мат. наук, 1949, т. 4, вып. 3 (31), стр. 117—179.

**Ф. Р. Гантмахер**

Феликс Рувимович Гантмахер. [Некролог].— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 2. (122), стр. 149—157, с портр.

**Ф. Д. Гахов**

Чикин Л. А. Федор Дмитриевич Гахов. [К 50-летию со дня рожд.].— Уч. зап. Ростовск.-на-Дону ун-та. Труды физ.-мат. фак-та, 1959, т. 43, вып. 6, стр. 3—6.

**И. М. Гельфанд**

Вишик М. И., Колмогоров А. Н., Фомин С. В. и Шилов Г. Е. Израиль Моисеевич Гельфанд. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 3 (117), стр. 187—205, с портр.

**А. О. Гельфонд**

Линник Ю. В. и Маркушевич А. И. Александр Осипович Гельфонд. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 5 (71), стр. 239—248.

**Н. А. Глаголев**

Бахвалов С. В. Научные работы Н. А. Глаголева.— В кн.: Номографич. сб. Изд-во МГУ, М., 1951, стр. 5—6.  
Бахвалов С. В. Нил Александрович Глаголев. [1888—1945]. Изд-во Моск. ун-та, М., 1961, 31 с., с портр.  
Бахвалов С. В. Нил Александрович Глаголев (1888—1945).— Усп. мат. наук. Нов. сер., 1946, т. 1, вып. 2 (12), стр. 43—47.  
Гребенча М. К. Нил Александрович Глаголев.— Матем. в шк., 1946, № 1, стр. 3—6.  
Ивницкий Т. Г. Научное творчество Н. А. Глаголева в области проективной геометрии.— Уч. зап. Харьк. пед. ин-та физ. восп. Сер. мат., 1960, т. 34, вып. 3, стр. 49—60.

**В. И. Гливенко**

Колмогоров А. Н. Валерий Иванович Гливенко (1897—1940). Некролог.— Усп. мат. наук, 1941, вып. 8, стр. 379—383, с портр.

**Б. В. Гнеденко**

Гихман И. И., Колмогоров А. Н. и Королюк В. С. Борис Владимирович Гнеденко. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 4 (106), стр. 191—200, с портр.  
Колмогоров А. Н. О работах Б. В. Гнеденко по теории вероятностей. [К 50-летию со дня рожд.].— Теория вероятностей и ее применения, 1962, т. 7, вып. 3, стр. 323—329, с портр.

**В. В. Голубев**

Владимир Васильевич Голубев (к 60-летию со дня рожд.).— Усп. мат. наук. Нов. сер., 1946, т. 1, вып. 1 (11), стр. 229—231.

**Г. М. Голузин**

Смирнов В. И. и Бермант А. Ф. Геннадий Михайлович Голузин. [Некролог].— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 3 (49), стр. 97—102, с портр.

**Ю. А. Гольдовский**

Степанов В. Ю. А. Гольдовский и С. С. Левин. [Некролог].— Мат. сб., 1932, т. 39, вып. 1-2, стр. 127—128.

**Д. Н. Горячев**

Несторович Н. Д. Н. Горячев. [К 40-летию научно-пед. и обществ. деят.].— Труды Ин-та мат. и естествознан. при Сев.-Кавказск. гос. ун-те, 1930, т. 16, стр. 5—8.

**Д. А. Граве**

См. библиографию ко второму тому настоящего издания.

**Д. Г. Гребенюк**

Д. Г. Гребенюк. [Биогр. справка].— Труды Ин-та мат. и мех. АН УзССР, 1957, вып. 21, стр. 5—6, с портр.

Кельберт С. Л. Об исследованиях по проблеме П. Л. Чебышева. [О работах Д. Г. Гребенюка по проблеме функций, наименее отклоняющихся от нуля].— Изв. АН УзССР, 1956, № 3, стр. 89—95.

Узаков Ю. К. К 70-летию профессора Д. Г. Гребенюка.— Сб. научно-исслед. работ Ташк. текст. ин-та, 1956, вып. 3, стр. 144—146.

**Г. А. Грузинцев**

Бернштейн С. Григорий Олексійович Грузинцев. [Некролог].— Зап. Харк. мат. т-ва та Укр. ін-ту мат. наук, 1929, № 3, стор. 5—10.

**Н. М. Гюнтер**

Смирнов В. И. и Соболев С. Л. Н. М. Гюнтер.— Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук, 1948, № 96, вып. 15, стр. 5—22.

Смирнов В. И. и Соболев С. Л. Николай Максимович Гюнтер. [Биогр. очерк].— В кн.: Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам мат. физ. Гостехиздат, М., 1953, стр. 393—405.

Стеклов В. А., Лазарев П. П. и Белополюцкий А. А. Записка об ученых трудах Н. М. Гюнтера.— Изв. Рос. акад. наук, 1924, т. 18 № 12—18, стр. 441—442.

**Б. Н. Делоне**

Борис Николаевич Делоне. [К 70-летию со дня рожд.].— Кристаллография, 1960, т. 5, вып. 3, стр. 339—340, с портр.

К шестидесятилетию Бориса Николаевича Делоне.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, № 4, стр. 297—302.

Фаддеев Д. К. Борис Николаевич Делоне.— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 6 (39), стр. 159—163.

Чествование члена-корреспондента АН СССР Б. Н. Делоне.— Вестн. АН СССР, 1950, № 5, стр. 86—88.

Член-корреспондент Академии наук СССР, доктор математических наук Б. Н. Делоне. Сост. Н. И. Акинфиева. Изд. АН СССР, М., 1938, 10 с.

Шафаревич И. Р. Борис Николаевич Делоне. [К 70-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 3 (99), стр. 239—244, с портр.

**И. Я. Депман**

Андронов И. К., Гайдук Ю. М., Каллинг Р. Профессор Иван Яковлевич Депман (к 70-летию со дня рожд. и 50-летию научно-пед. деят.).— Матем. в шк., 1961, № 1, стр. 75—76, с портр.

Г а й д у к Ю. М. И. Я. Д е п м а н (к 75-летию со дня рожд.).— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1962, вып. 12, стр. 249.

**Г. И. Джанелидзе**

Г е о р г и й И у с т и н о в и ч Д ж а н е л и д з е. [1916—1964].— Изв. АН СССР. Мех. и машиностр., 1964, № 1, стр. 3—8, с портр.

**А. Н. Динник**

Д и н н и к А. Н. Избр. труды. Т. 1—3. Изд-во АН УССР, К., 1952—1956.

**А. А. Дородницын**

Б е л о ц е р к о в с к и й О. М., К и б е л ь И. А., М о и с с е е в Н. Н. и др. Анатолий Алексеевич Дородницын. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1964, т. 16, вып. 2 (98), стр. 189—196, с портр.

**Я. С. Дубнов**

В а г н е р В. В. и Л о п ш и ц А. М. Яков Семенович Дубнов. [1887—1957 Некролог].— Труды Сем. по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геом. мех. и физ. Изд-во Моск. ун-та, 1961, вып. 11, стр. 1—17, с портр.  
Л о п ш и ц А. М. Яков Семенович Дубнов — ученый, педагог, человек. [1887—1957].— Мат. просв., 1960, вып. 5, стр. 3—16, с портр.

**В. Е. Дьяченко**

Б р е у с К. и П о л о ж и й Г. Вадим Евгеньевич Дьяченко.— Укр. мат. журн., 1954, т. 6, № 3, стр. 367—368, с портр.

**Н. П. Еругин**

Б а с о в В. П., Б о г д а н о в Ю. С. и С м и р н о в М. М. Николай Павлович Еругин. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 2 (80), стр. 247—251, с портр.

**Н. В. Ефимов**

А л е к с а н д р о в А. Д. и П о г о р е л о в А. В. Николай Владимирович Ефимов. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 6 (96), стр. 175—180, с портр.

**А. М. Журавский**

Профессор А. М. Журавский. [К 70-летию со дня рожд. и 45-летию научно-пед. деят.].— Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1964, т. 43, вып. 3, стр. 3—8.

**Д. Н. Зейлигер**

См. библиографию ко второму тому настоящего издания.

**В. П. Зубов**

В. П. Зубов (1899—1963).— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1963, вып. 14, стр. 218—219.

**И. И. Ибрагимов**

Д ж а ф а р о в А. С. и М а м е д о в Р. Г. Ибрагим Ибишевич Ибрагимов. [К 50-летию со дня рожд.].— Изв. АН АзССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук, 1962, № 5, стр. 129—133.

Джафаров А. С. и Мамедов Р. Г. К пятидесятилетию со дня рожд. И. И. Ибрагимова.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 1 (109), стр. 241.

### **М. В. Игнатъев**

Вайнштейн А. Л. и Урысон М. И. Памяти М. В. Игнатъева.— Уч. зап. по статистике, 1961, т. 6, стр. 271—279, с портр.

Урысон М. И. Михаил Васильевич Игнатъев. [1894—1959. Некролог].— Вопр. антропологии, 1960, вып. 3, стр. 136—140, с портр.

### **А. Ю. Ишлинский**

Александр Юльевич Ишлинский (к 50-летию со дня рожд.).— Изв. АН СССР. Мех. и машиностр., 1963, № 5, стр. 3—10, с портр.

Савин Г. Н., Соколов Ю. Д. и Путята Т. В. Александр Юльевич Ишлинский. [К 50-летию со дня рожд.].— Укр. мат. журн., 1963, т. 15, № 3, стр. 299—302, с портр.

### **И. Н. Кавун**

Иван Никитич Кавун (1874—1935).— Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1937, т. 5, стр. 5—10.

### **В. Ф. Каган**

В. Ф. Каган (к 30-летию научно-пед. деят.).— Научн. слово, 1929, № 5, стр. 99—101.

Дубнов Я. С. и Лопшиц А. М. Вениамин Федорович Каган.— Труды Сем. по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геом., мех. и физ. Изд-во МГУ, 1956, вып. 10, стр. 3—11, с портр.

Дубнов Я. С. и Рашевский П. К. В. Ф. Каган.— Труды Сем. по векторн. и тензорн. анализу. Изд-во МГУ, 1949, вып. 7, стр. 16—30.

Ефимов Н. В., Лопшиц А. М. и Рашевский П. К. Вениамин Федорович Каган.— Усп. мат. наук, 1949, т. 4, вып. 2 (30), стр. 5—14.

Рашевский П. К. Вениамин Федорович Каган.— Усп. мат. наук, 1953, т. 8, вып. 5 (57), стр. 131—138, с портр.

### **Г. Кангро**

Барон С., Юримьяэ Э., Реймерс Э. и Сырмус Т. К пятидесятилетию со дня рождения проф. Г. Кангро.— Уч. зап. Тартуск. ун-та. Труды по мат. и мех., 1964, т. 4, вып. 150, стр. 3—11, с портр.

### **Л. В. Канторович**

Акилов Г. П. и др. Леонид Витальевич Канторович. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 4 (106), стр. 201—215, с портр.

Леонид Витальевич Канторович. [К 50-летию со дня рожд.].— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 1, стр. 5—6, с портр.

Фихтенгольц Г. М. Лауреат Сталинской премии. 1949. Проф. Л. В. Канторович.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1949, № 4, стр. 160—161.

### **Л. В. Келдыш**

Александров П. С. и Ляпунов А. А. Людмила Всеволодовна Келдыш (к 50-летию со дня рожд.).— Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 2 (64), стр. 217—223, с портр.

Мацкина Р. Ю. Людмила Всеволодовна Келдыш.— Матем. в шк., 1965, № 2, стр. 75—78, с портр.

### **М. В. Келдыш**

- Избрание академика М. В. Келдыша президентом Академии наук СССР.— Вестн. АН СССР, 1961, № 6, стр. 3—13.  
Мстислав Всеволодович Келдыш. [К 50-летию со дня рожд.].— Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Мех. и машиностр., 1961, № 1, с портр.  
Президент Академии наук СССР академик М. В. Келдыш. [Краткая биограф. справка].— Вестн. АН СССР, 1961, № 6, стр. 14—15, с портр.; Природа, 1961, № 6, стр. 1—2, с портр.; Матем. в шк., 1961, № 4, стр. 70—71, с портр.

### **Н. А. Кильчевский**

- Савин Г. Н., Путята Т. В. и др. Николай Александрович Кильчевский.— Укр. мат. журн., 1959, т. 11, № 4, стр. 431—433, с портр.

### **А. С. Кованько**

- Костовский А. Н. Александр Сергеевич Кованько (к 60-летию со дня рожд.).— Усп. мат. наук, 1954, т. 9, вып. 2 (60), стр. 215—221, с портр.

### **А. Н. Колмогоров**

- Александров П. С. Андрей Николаевич Колмогоров. [К 60-летию со дня рожд.].— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех., 1963, № 3, стр. 3—6, с портр.  
Александров П. С. и Гнеденко Б. В. А. Н. Колмогоров как педагог.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 5 (113), стр. 115—120.  
Александров П. С. и Хинчин А. Я. Андрей Николаевич Колмогоров (к 50-летию со дня рожд.).— Усп. мат. наук, 1953, т. 3, вып. 3 (55), стр. 176—200, с портр.  
Анфилов Г. Ученый, учитель. [К 60-летию со дня рожд. А. Н. Колмогорова].— Огонек, 1963, № 48, стр. 11—13.  
Гнеденко Б. В. О работах А. Н. Колмогорова по теории вероятностей.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 5 (113), стр. 5—11.  
Гнеденко Б. В. и Смирнов Н. В. О работах А. Н. Колмогорова по теории вероятностей. [К 60-летию со дня рожд.].— Теория вероятностей и ее применения, 1963, т. 8, вып. 2, стр. 167—174, с портр.  
К пятидесятилетию Андрея Николаевича Колмогорова.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1953, т. 1, № 3, стр. 187—188, с портр.  
Колмогоров А. Н. Как я стал математиком.— Огонек, 1963, № 48, стр. 12—13, с портр.  
Список печатных работ А. Н. Колмогорова, опубликованных в 1953—1962 гг.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 5 (113), стр. 121—123.

### **Г. В. Колосов**

- Мусхелишвили Н. Гурий Васильевич Колосов.— Усп. мат. наук, 1938, вып. 4, стр. 279—281.

### **П. Г. Конторович**

- Конторович Петр Григорьевич. [К 60-летию со дня рожд.].— Мат. зап. Уральск. мат. о-ва, 1965, т. 5, тетр. 1, стр. 3—4.  
Мальцев А. И. и Плоткин Б. И. Петр Григорьевич Конторович. [К 60-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 4 (124), стр. 202—212, с портр.

### **В. И. Костин**

- Депман И. Я. Василий Иванович Костин (1910—1953).— Матем. в шк., 1955, № 3, стр. 77, с портр.

## **А. П. Котельников**

См. библиографию ко второму тому настоящего издания.

## **Н. Е. Кочин**

- Николай Евграфович Кочин. [1901—1944]. Вступ. ст. А. А. Дородницына, И. А. Кибея и Л. И. Седова. Библиогр. сост. Н. И. Акинфиевой. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, 36 с., с портр.
- Николай Евграфович Кочин.— Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1945, № 3, стр. 109—114.
- Николай Евграфович Кочин (1900—1945).— Усп. мат. наук. Нов. сер., 1946, т. 1, вып. 1 (11), стр. 27—29.
- Николай Евграфович Кочин. [Некролог].— Прикл. мат. и мех., 1945, т. 9, вып. 1, стр. 3—12.

## **П. Я. Кочина**

- Пелагея Яковлевна Кочина. [К 60-летию со дня рожд.].— Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Мех. и машиностр., 1959, № 3, стр. 7—14, с портр.

## **Н. С. Кошляков**

- Николай Сергеевич Кошляков. [1891—1958. Некролог].— Инж.-физ. журн., 1959, т. 2, № 4, стр. 120—125, с портр.
- Смирнов В. И. и Линник Ю. В. Николай Сергеевич Кошляков. [1891—1958. Некролог].— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 3 (87), стр. 115—122, с портр.

## **М. Ф. Кравчук**

- Замітка про праці Михайла Кравчука. К., 1929, 20 с.

## **М. Г. Крейн**

- Колмогоров А. Н. и Красносельский М. А. Марк Григорьевич Крейн. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 3 (81), стр. 213—224, с портр.

## **М. А. Крейнс**

- Александров П. С., Вайнштейн И. А. и Розовский М. С. Михаил Александрович Крейнс. [К 60-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 2 (116), стр. 183—190, с портр.

## **А. Н. Крылов**

См. библиографию ко второму тому настоящего издания.

## **Н. М. Крылов**

- Крылов Н. М. Избр. труды в трех томах. Изд-во АН УССР, К., 1949—1961. Академик Н. М. Крылов.— Укр. мат. журн., 1955, т. 7, № 1, стр. 3—4, с портр.
- Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Николай Митрофанович Крылов.— Укр. мат. журн., 1960, т. 12, № 2, стр. 205—208.
- Исакова О. В. Николай Митрофанович Крылов. Вступ. ст. Н. Н. Боголюбова. Изд-во Всесоюзн. книжн. пал., М., 1945, 31 с.
- Крылов А. Н. Записка об ученых трудах Н. М. Крылова.— В кн.: Зап. об уч. трудах действ. членов АН СССР по отд. физ.-мат. наук, избр. 12 янв. 1929 г. Изд-во АН СССР, Л., 1930, стр. 93—97.

Крылов А. Н. и Лазарев П. П. Записка об ученых трудах Н. М. Крылова.— Изв. АН СССР. Отд. физ.-мат. наук, 1928, № 8-10, стр. 610—615.  
Николай Митрофанович Крылов. [1879—1955. Некролог].— Укр. мат. журн., 1955, т. 7, № 3, стр. 347—359, с портр.; Вестн. АН СССР, 1955, № 6, стр. 71.

#### **В. А. Кудрявцев**

Всеволод Александрович Кудрявцев. [Некролог].— Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ.-мат. и естеств. наук, 1953, № 12, вып. 81, стр. 129.

#### **Р. О. Кузьмин**

Венков Б. А. и Натансон И. П. Родион Осиевич Кузьмин. [Некролог].— Усп. мат. наук, 1949, т. 4, вып. 4 (32), стр. 148—156, с портр.  
Венков Б. А. Памяти Р. О. Кузьмина. [Некролог].— Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. Покровского. Физ.-мат. фак-т, 1955, т. 14, вып. 1, стр. 5—8.  
Смирнов В. И. Родион Осиевич Кузьмин.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, № 5, стр. 385—388.

#### **А. А. Кулаков**

Александр Антипович Кулаков. [1898—1946. Некролог].— Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 2 (18), стр. 185—187.

#### **В. Д. Купрадзе**

В. Д. Купрадзе. [К 60-летию со дня рожд.].— Труды Грузинск. политехн. ин-та. Мат., мех., физ., 1963, № 8, [вып.] 3, стр. V—VIII, с портр.; на груз. и русск. яз.  
Гвеленсiani С. Математик. [Об акад. В. Д. Купрадзе]. Очерк.— Лит. Грузия, 1965, № 9, стр. 71—74.

#### **А. Г. Курош**

Александров П. С. и Глушков В. М. Александр Геннадиевич Курош. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 1 (79), стр. 219—224, с портр.

#### **П. П. Куфарев**

Суворов Г. Д. Павел Парфентьевич Куфарев (к 50-летию со дня рожд.).— Труды Томск. ун-та, 1959, т. 144, стр. 149—155, с портр.

#### **М. А. Лаврентьев**

Академик М. А. Лаврентьев. [К 60-летию со дня рожд.].— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1960, № 10, стр. 3—4, с портр.  
Анфилов Г. Мой дом в Золотой долине. [О пред. Сиб. отд. АН СССР М. А. Лаврентьеве].— Огонек, 1965, № 4, стр. 11—13, с портр.  
Бикадзе А. В., Маркушевич А. И. и Шабат Б. В. Михаил Алексеевич Лаврентьев. [К 60-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 4 (100), стр. 211—221, с портр.  
Гайдук Ю. М. Академик Михаил Алексеевич Лаврентьев. К 60-летию со дня рожд. и 40-летию научно-пед. деят.— Матем. в shk., 1961, № 1, стр. 71—74, с портр.  
Ишлинский А. Ю. Деятельность Михаила Алексеевича Лаврентьева в Академии наук УССР.— Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1960, № 3, стр. 16—19.



- К шестидесятилетию академика М. А. Лаврентьева.— Сиб. мат. журн., 1960, т. 1, № 3, стр. 297—302, с портр.
- К е л д ы ш М. В. К пятидесятилетию Михаила Алексеевича Лаврентьева.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1951, т. 15, № 1, стр. 3—8.
- Л ю с т е р н и к Л. А. и Ш у р а - Б у р а М. Р. Михаил Алексеевич Лаврентьев (к 50-летию со дня рожд.).— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 1 (41), стр. 190—192, с портр.
- Михаил Алексеевич Лаврентьев (к 60-летию со дня рожд.).— Прикл. мат. и мех., 1960, т. 24, вып. 6, стр. 969—978, с портр.
- Михаил Алексеевич Лаврентьев. [К 60-летию со дня рожд.].— Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1960, № 3, стр. 3—15, с портр.
- Чествование академика М. А. Лаврентьева.— Вестн. АН СССР, 1951, № 4, стр. 60—62.
- Ш т о к а л о И. З., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. и Ф и л ь ч а к о в П. Ф. Михаил Алексеевич Лаврентьев. [К 60-летию со дня рожд.].— Укр. мат. журн., 1960, т. 12, № 4, стр. 490—491, с портр.

### *О. А. Ладыженская*

- Б и р м а н М. Ш., З е н к е в и ч И. Г. и Ф а д д е е в Д. К. Ольга Александровна Ладыженская.— Матем. в shk., 1965, № 5, стр. 78—80, с портр.

### *М. Д. Ладыженский*

- М. Д. Ладыженский. [1931—1965. Некролог].— Прикл. мат. и мех., 1965, т. 29, вып. 4, стр. 643; Инж. журн., 1965, т. 5, вып. 3, стр. 599, с портр.

### *И. А. Лаппо-Данилевский*

- Л у з и н Н. Н. Иван Александрович Лаппо-Данилевский. [1896—1931. Некролог].— Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук, 1931, № 6, стр. 829—832.
- Ф е д о р о в Л. Памяти И. А. Лаппо-Данилевского.— Природа, 1931, № 9, стр. 924—928.

### *Б. Л. Лаптев*

- Н о р д е н А. П. и Ш а п у к о в Б. Н. Борис Лукич Лаптев. К 60-летию со дня рожд.— Изв. высш. учебн. завед. Мат., 1965, № 2, стр. 201—202, с портр.

### *К. Я. Латышева*

- П а в л ю к И. А. Клавдия Яковлевна Латышева. [Некролог].— Укр. мат. журн., 1956, т. 8, № 3, стр. 342—344, с портр.
- П а в л ю к И. А. Клавдия Яковлевна Латышева. [1897—1956. Некролог].— Научн. зап. Киевск. ун-та. Мат. сб., 1957, т. 16, вып. 2, № 9, стр. 159—162, с портр.

### *Б. Я. Левин*

- А х и е з е р Н. И. и Е ф и м о в Н. В. Борис Яковлевич Левин. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 2(74), стр. 237—242, с портр.

### *С. С. Левин*

- С т е п а н о в В. Ю. А. Гольдовский и С. С. Левин. [Некролог].— Мат. сб., 1932, т. 39, вып. 1-2, стр. 127—128.

### **Б. М. Левитан**

Ахиезер Н. И. и Марченко В. А. Борис Моисеевич Левитан. [К 50-летию со дня рожд.].—Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 3 (123), стр. 227—234, с портр.

### **В. Л. Левшин**

Доктор физико-математических наук проф. Вадим Леонидович Левшин. Сост. Т. О. Вреден-Кобецкая и Е. И. Окулич. Изд-во АН СССР, М., 1938 (стеклограф. изд.).

### **Л. С. Лейбензон**

Лейбензон Л. С. Собр. трудов. Т. 1—4. Изд-во АН СССР, М., 1951—1955.  
Андреев Р. С. Л. С. Лейбензон — создатель уравнения материального баланса.—Труды Моск. нефт. ин-та, 1956, вып. 16, стр. 14—22.

К десятилетию со дня смерти Леонида Самойловича Лейбензона.—Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Мех. и машиностр., 1961, № 3, стр. 3—4, с портр.

Л. С. Лейбензон. [Некролог].—Вестн. АН СССР, 1951, № 4, стр. 47; Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1951, № 6, стр. 940, с портр.; Азерб. нефт. хоз-во, 1951, № 7, стр. 24, с портр.

Леонид Самуилович Лейбензон (1879—1951). Изд-во АН СССР, М., 1957, 52 с.

Седов Л. И. Основные даты жизни и деятельности Л. С. Лейбензона.—Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 4 (50), стр. 127—134, с портр.

Яблонский В. С. Жизнь и деятельность Леонида Самуиловича Лейбензона.—Труды Моск. нефт. ин-та, 1956, вып. 16, стр. 5—8.

### **М. М. Лепский**

Марк Моисеевич Лепский. [1910—1961. Некролог].—Бюл. Всесоюзн. астроном.-геодез. о-ва, 1963, № 33, стр. 51—52.

### **Ю. В. Линник**

Ибрагимов И. И., Малышев А. В. и Петров В. В. Юрий Владимирович Линник. [К 50-летию со дня рожд.].—Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 2 (122), стр. 221—236, с портр.

Кузьмин Р. О. Лауреат Сталинской премии 1947 г. профессор Ленинградского ун-та Ю. В. Линник.—Вестн. Ленингр. ун-та, 1947, № 7, стр. 108—110.

Прохоров Ю. В. О работах акад. Ю. В. Линника по теории вероятностей и математической статистике. [К 50-летию со дня рожд.].—Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, вып. 1, стр. 117—129, с портр.

### **С. М. Лозинский**

Мысовская И. П. и Натансон И. П. Сергей Михайлович Лозинский. [К 50-летию со дня рожд.].—Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 6 (120), стр. 207—212, с портр.

### **Л. Г. Лойцянский**

Забродский С. С., Смольский Б. М. и Шильман З. П. Лев Герасимович Лойцянский. [К 60-летию со дня рожд. и 40-летию научно-пед. деят.].—Инж.-физ. журн., 1961, т. 4, № 2, стр. 116—118, с портр.

### **А. С. Локшин**

Динник А. Проф. А. С. Локшин.—Прикл. мат. и мех., 1936, т. 3, вып. 1, стр. 7—15.

### *Н. Н. Лузин*

- Лузин Н. Н. Собр. соч. в трех томах. Изд-во АН СССР, М., 1953—1959.
- Академик Николай Николаевич Лузин. [Некролог].— Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1950, № 6, стр. 938—939.
- Академик Николай Николаевич Лузин.— Матем. в shk., 1950, № 3, стр. 1—2.
- Бари Н. К. и Люстерник Л. А. О книге Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд» и его работах по метрической теории функций.— В кн.: Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. Гостехиздат, М.—Л., 1951, стр. 32—45.
- Бари Н. К. и Люстерник Л. А. Работы Н. Н. Лузина по метрической теории функций.— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 6 (46), стр. 28—46.
- Голубев В. В. и Бари Н. К. Биография Н. Н. Лузина.— В кн.: Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. Гостехиздат, М.—Л., 1951, стр. 11—31.
- Гольцман В. К. и Кузнецов П. И. Работы Н. Н. Лузина по дифференциальным уравнениям и вычислительным методам.— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 2 (48), стр. 17—30.
- Два документа к биографии Н. Н. Лузина.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 8. Физматгиз, М., 1955, стр. 55—76.
- Егоров Д. Ф. Отзыв о диссертации Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд», представленной для получения степени магистра чистой математики.— Усп. мат. наук, 1953, т. 8, вып. 2 (54), стр. 105—110.
- Записка об ученых трудах проф. Н. Н. Лузина.— В кн.: Зап. об уч. трудах действ. членов АН СССР по отд. гум. наук, избр. 12 янв. и 13 февр. 1929 г. Изд-во АН СССР, Л., 1930, стр. 48—64.
- Келдыш Л. В. и Новиков П. С. Работы Н. Н. Лузина в области дескриптивной теории множеств.— Усп. мат. наук, 1953, т. 8, вып. 2 (54), стр. 93—104.
- Кузнецов П. И. Николай Николаевич Лузин. [К 15-летию со дня смерти].— Матем. в shk., 1965, № 3, стр. 82—86.
- Лазарев П. и Иоффе А. Записка об ученых трудах Н. Н. Лузина.— Изв. АН СССР, 1927, т. 21, № 18, стр. 1429—1431.
- Лузин Н. Н.— Архив АН СССР. Обзор архивных материалов, 1965, т. 5, стр. 13—16.
- Минковский В. Л. О методико-математических воззрениях Н. Н. Лузина.— Матем. в shk., 1963, № 6, стр. 65—68.
- Московская школа теории функций и Н. Н. Лузин.— В кн.: История естествознания в России. Т. 2. Изд-во АН СССР, М., 1960, стр. 180—194.
- Николай Николаевич Лузин.— В кн.: Люди русской науки. Физматгиз, М., 1961, стр. 335—346.
- Николай Николаевич Лузин. Сост. А. П. Епифанова. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, 30 с.
- Николай Николаевич Лузин (к 60-летию со дня рожд.).— Усп. мат. наук. Нов. сер., 1946, т. 1, вып. 1 (11), стр. 226—228.
- Памяти Н. Н. Лузина.— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 4 (38), стр. 15—18.
- Романов Н. А. История одного искания. [О встречах с Н. Н. Лузиным и И. П. Павловым].— Природа, 1966, № 7, стр. 77—87.
- Сретенский Л. Н. Замечания к посмертной работе Н. Н. Лузина об интегрировании уравнений изгибания поверхности на главном основании.— Усп. мат. наук, 1953, т. 8, вып. 2 (54), стр. 75—82.
- Федоров В. С. Труды Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного.— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 2 (48), стр. 7—16.

### *Я. И. Лукомский*

- Лебедева Н. К. и Лурье А. Л. Я. И. Лукомский. [1906—1961. Некролог].— Уч. зап. по статистике, 1963, т. 7, стр. 313—320, с портр.
- Яков Ильич Лукомский.— Вестн. статистики, 1961, № 1, стр. 93.

### ***А. И. Лурье***

Анатолий Исаакович Лурье. — Прикл. мат. и мех., 1961, т. 25, вып. 4, стр. 593—599, с портр.

### ***Л. А. Люстерник***

Александров П. С. и др. Лазарь Аронович Люстерник. [К 60-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 2 (92), стр. 215—230, с портр.

Колмогоров А. Н. Лазарь Аронович Люстерник. — Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 1 (35), стр. 234—235.

### ***Е. С. Ляпин***

Вагнер В. В., Глускин Л. М. и Айзенштат А. Я. Евгений Сергеевич Ляпин. [К 50-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 1 (121), стр. 244—245.

### ***И. Г. Малкин***

Иоэль Гильевич Малкин. [1907—1958]. — Изв. высш. учебн. завед. Мат., 1959, № 5, стр. 223—226.

### ***А. И. Мальцев***

Курош А. Г. Анатолий Иванович Мальцев. [К 50-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 6 (90), стр. 203—211, с портр.

Смирнов С. В. Академик Анатолий Иванович Мальцев. — Матем. в shk., 1964, № 6, стр. 77—78, с портр.

### ***А. А. Марков***

Линник Ю. В. и Шанин Н. А. Андрей Андреевич Марков. [сын]. — Усп. мат. наук, 1954, т. 9, вып. 1 (59), стр. 145—149, с портр.

Нагорный Н. М. и Шанин Н. А. Андрей Андреевич Марков, [К 60-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 3 (117), стр. 207—223, с портр.

### ***А. И. Маркушевич***

Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф. и Шабат Б. В. Алексей Иванович Маркушевич. [К 50-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 6 (84), стр. 213—220, с портр.

### ***В. А. Марченко***

Бершак М. Талантливый математик. [О лауреате Ленинской премии чл.-корр. АН УССР В. А. Марченко]. — Наука и техника, 1962, № 7, стр. 12, с портр.

### ***Д. Е. Меньшов***

Александров П. С. и Ульянов П. Л. Дмитрий Евгеньевич Меньшов. [К 70-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 5 (107), стр. 161—173, с портр.

Бари Н. К. и Люстерник Л. А. Дмитрий Евгеньевич Меньшов. [К 60-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 3 (49), стр. 145—150, с портр.

- Б а р и Н. К. и Л ю с т е р н и к Л. А. Дмитрий Евгеньевич Меньшов. — Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 6 (22), стр. 240—242.
- Б а р и Н. К. и Л ю с т е р н и к Л. А. Работы Д. Е. Меньшова по тригонометрическим рядам. — Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 4 (44), стр. 187—189.

### *С. Н. Мергелян*

- А н д р е е в К. Комсомолец — член-корреспондент Академии наук СССР. [О С. Н. Мергеляне]. — Техника молодежи, 1954, № 2, стр. 11—12, с портр.

### *С. Г. Михлин*

- Б а к е л ь м а н И. Я., Б и р м а н М. Ш. и Л а д ы ж е н с к а я О. А. Соломон Григорьевич Михлин. [К 50-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 5 (83), стр. 215—221, с портр.

### *Н. И. Мусхелишвили*

- Академику Н. И. Мусхелишвили (приветствие к 60-летию со дня рожд.). — Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1951, № 7, стр. 961, с портр.; Прикл. мат. и мех., 1951, т. 15, вып. 3, стр. 265—278, с портр.
- В е к у а И. Н. Академик Николай Иванович Мусхелишвили. [К 70-летию со дня рожд.]. Изд-во Сиб. отд. АН СССР, Новосибирск, 1961, 56 с., с портр.
- В е к у а И. Н. Николай Иванович Мусхелишвили. [К 70-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 2 (98), стр. 169—188, с портр.
- Г о к и е л и Л. П. Николай Иванович Мусхелишвили. [К 70-летию со дня рожд. и 45-летию научн. и обществ. деят.]. — Матем. в shk., 1961, № 4, стр. 72—74, с портр.
- К е л ь д ы ш М. В. и С о б о л е в С. Л. Николай Иванович Мусхелишвили. [К 60-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 2 (42), стр. 185—190.
- Николай Иванович Мусхелишвили. [К 70-летию со дня рожд.]. — Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Мех. и машиностр., 1961, № 2, стр. 3—4, с портр.
- Николай Иванович Мусхелишвили. — Труды Грузинск. политехн. ин-та, 1962, № 1, стр. 5—10, с портр.
- О ш е р о в и ч В. З. К семидесятилетию академика Н. И. Мусхелишвили. — Инж. - физ. журн., 1961, т. 4, стр. 120—123, с портр.
- С а в и н Г. Н. Николай Иванович Мусхелишвили. [К 70-летию со дня рожд.]. — Укр. мат. журн., 1961, т. 13, № 1, стр. 119—123, с портр.
- С о б о л е в С. Л. Николай Иванович Мусхелишвили. — Вестн. АН СССР, 1938, № 11-12, стр. 41—44.
- Ч е т а е в Н. Г. Выдающийся исследователь в области прикладной математики и механики академик Н. И. Мусхелишвили (к 60-летию со дня рожд.). — Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1951, № 7, стр. 963—968, с портр.

### *Н. Н. Назаров*

- К у ч м а р М. И. Николай Николаевич Назаров. [К 10-летию со дня смерти]. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 4 (76), стр. 125—134, с портр.
- Р о м а н о в с к и й В. И. Николай Николаевич Назаров. — В кн.: Н а з а р о в Н. Н. Математический анализ и механика. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1948, стр. 5—8, с портр.
- Р о м а н о в с к и й В. И. Николай Николаевич Назаров. — Бюл. АН УзССР, 1947, № 8, стр. 27—30.
- Р о м а н о в с к и й В. И. Николай Николаевич Назаров. — Труды Ин-та мат. и мех. АН УзССР, 1948, вып. 4, стр. 5—11.

### **М. А. Наймарк**

Крейн М. Г. и Шолов Г. Е. Марк Аронович Наймарк. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 2 (92), стр. 231—236, с портр.

### **Е. А. Нарышкина**

Соболев С. Л. Е. А. Нарышкина.— Усп. мат. наук, 1941, вып. 8, стр. 384—385,

### **И. П. Натансон**

Вулих Б. З., Гавурин М. К. и Лозинский С. М. Исидор Павлович Натансон. [1906—1964. Некролог].— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 1. (121), стр. 171—175, с портр.

Канторович Л. В. и Фаддеев Д. К. Исидор Павлович Натансон.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 4 (70), стр. 193—196, с портр.

Лозинский С. М. и Смирнов В. И. Памяти Исидора Павловича Натансона.— Сб. научн. тр. Ленингр. мех. ин-та, 1965, № 50, стр. 5—14.

### **А. И. Некрасов**

Александр Иванович Некрасов. [1883—1957. Некролог].— Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1957, № 6, стр. 3.

А. И. Некрасов. [1883—1957. Некролог].— Вестн. АН СССР, 1957, № 7, стр. 68.

Сежер-Зенькович Я. И. Александр Иванович Некрасов. [К 75-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 1 (91), стр. 153—162, с портр.

### **В. В. Немыцкий**

Вайнберг М. М., Виноград Р. Э. и Демидович Б. П. Виктор Владимирович Немыцкий. [К 60-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 1 (97), стр. 201—212, с портр.

### **Н. М. Несторович**

Николай Михайлович Несторович. [Некролог].— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 4 (70), стр. 117—118, с портр.

### **А. Г. Николаева**

Памяти А. Г. Николаевой. [1922—1957].— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1959, т. 53, стр. 266.

### **С. М. Никольский**

Дзядык В. К., Колмогоров А. Н. и Кудрявцев Л. Д. Сергей Михайлович Никольский. [К 60-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 5 (125), стр. 275—287, с портр.

Колмогоров А. Н. и Стечкин С. Б. Сергей Михайлович Никольский. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 2 (68), стр. 239—244.

### **П. С. Новиков**

Адян С. И. Проблема алгоритма. [К присужд. Ленинской премии П. С. Новикову].— Наука и жизнь, 1957, № 8, стр. 13—14.

К шестидесятилетию Петра Сергеевича Новикова.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 5, стр. 629—634, с портр.

- Л я п у н о в А. А. Петр Сергеевич Новиков. [К 50-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 2 (48), стр. 193—196.
- Л я п у н о в А. А. и Я б л о н с к и й С. В. Крупный вклад в математику. [К присужд. Ленинской премии П. С. Новикову]. — Природа, 1957, № 8, стр. 54—56.
- Ч и с т я к о в В. Д. Ленинские премии 1957 г. по математике. [О П. С. Новикове]. — Матем. в shk., 1958, № 3, стр. 1—3, с портр.
- Щ е г о л ь к о в Е. А. Петр Сергеевич Новиков. [К 60-летию со дня рожд.]. — Матем. в shk., 1961, № 6, стр. 66—69, с портр.

### *А. П. Норден*

- Александр Петрович Норден. [К 60-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 5 (119), стр. 171—179, с портр.

### *Н. В. Оглоблин*

- О г л о б л и н Н. В. Автобиография. — Изв. Крымск. пед. ин-та, 1936, т. 4, стр. 9—13.
- Профессор Николай Васильевич Оглоблин. [Некролог]. — Изв. Крымск. пед. ин-та, 1936, т. 4, стр. 5—7.

### *Б. Н. Окунев*

- М а н д р ы к а А. П. Б. Н. Окунев. — Вопр. ист. естествозн. и техн., 1963, вып. 14, стр. 212—217.

### *О. А. Олейник*

- Г а л ь п е р н С. А. и С м и р н о в а Г. Н. Ольга Арсеньевна Олейник. — Матем. в shk., 1965, № 2, стр. 78—80, с портр.

### *Н. Н. Парфентьев*

- Николай Николаевич Парфентьев (1877—1943. Библиогр. указ. Вступ. ст. В. А. Яблокова). Казань, 1955, 40 с., с портр.

### *К. П. Персидский*

- Б а г а у т д и н о в Г., Г а г а е в Б. и Л а п т е в Б. Константин Петрович Персидский. [К 60-летию со дня рожд.]. — Изв. высш. учебн. завед. Мат., 1963, № 6, стр. 172—173, с портр.
- Б а г а у т д и н о в Г. Н. и Ж а у т ы к о в О. А. К шестидесятилетию Константина Петровича Персидского. — Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 6 (114), стр. 241.
- Ж а у т ы к о в О. А. К. П. Персидский. — Усп. мат. наук, 1954, т. 9, вып. 1 (59), стр. 151—154, с портр.; Вестн. АН КазССР, 1953, № 11, стр. 46—50.
- Шестидесятилетие академика АН КазССР К. П. Персидского. — Вестн. АН КазССР, 1963, № 10, стр. 95—96, с портр.

### *И. Г. Петровский*

- А л е к с а н д р о в П. С., М ы ш к и с А. Д. и О л е й н и к О. А. Иван Георгиевич Петровский (к 60-летию со дня рожд.). — Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 3 (99), стр. 219—238, с портр.
- Г а л ь п е р н С. А. и О л е й н и к О. А. Иван Георгиевич Петровский. [К 60-летию со дня рожд.]. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех., 1961, № 1, стр. 3—8.

- Иван Георгиевич Петровский. Вступ. ст. Е. М. Ландиса и О. А. Олейник. Библиогр. сост. А. П. Епифановой. Изд-во АН СССР, М., 1957, 43 с., с портр.
- К о к и н Л. Семинар Петровского.— Огонек, 1965, № 22, стр. 8—9, с портр.
- К о л м о г о р о в А. Н. Иван Георгиевич Петровский. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 3 (43), стр. 160—164.
- Р ы б н и к о в К. А. Иван Георгиевич Петровский. [К 60-летию со дня рожд.].— Матем. в shk., 1961, № 3, стр. 80—83, с портр.
- С о б о л е в С. Л. К пятидесятилетию Ивана Георгиевича Петровского.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1951, т. 15, № 3, стр. 201—204.

#### *А. И. Плеснер*

- Л ю с т е р н и к Л. А. и др. Абрам Иезекиилович Плеснер. [К 60-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 1 (97), стр. 213—218, с портр.

#### *А. В. Погорелов*

- П р у д н и к о в В. Е. Алексей Васильевич Погорелов.— Матем. в shk., 1950, № 4, стр. 44—45.

#### *Л. С. Понтрягин*

- А л е к с а н д р о в П. С. и М и щ е н к о Е. Ф. Лев Семенович Понтрягин. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 3 (87), стр. 195—202, с портр.
- Л ю с т е р н и к Л. А. Лев Семенович Понтрягин.— Вестн. АН СССР, 1938, № 11-12, стр. 38—40.
- Член-корреспондент Академии наук СССР Лев Семенович Понтрягин. Сост. Н. И. Акинфиева и М. И. Чижова. М., 1939 (стеклограф, изд.).
- Ш а т у л и н А. Л. Победа воли. [К присужд. Ленинской премии 1962 г. Л. С. Понтрягину].— Культура и жизнь, 1963, № 1, стр. 12—14.

#### *Г. Н. Попов*

- В о р о н е ц А. Г. Н. Попов.— Физ., хим., мат., техн. в сов. shk., 1931, № 1, стр. 94.

#### *И. И. Привалов*

- С т е п а н о в В. Иван Иванович Привалов (1891—1941).— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1941, т. 5, № 6, стр. 389—394.

#### *Г. В. Пфейффер*

- К р а в ч у к М. та ін. Академік Ю. В. Пфейффер (з нагоди 35-ліття науково-пед. діяльн.).— Вісті Укр. акад. наук, 1935, № 8-10, стр. 63—68.

#### *А. М. Размадзе*

- Р а з м а д з е А. М. Избр. труды. Изд-во АН ГрузССР, Тбилиси, 1952, 173 с., на груз. яз.
- Андрей Размадзе. Докл., прочит. на публ. засед., посвящ. памяти А. Размадзе, 21 окт. 1944 г., к 15-й годовщине со дня смерти. Гос. изд-во ГрузССР, Тбилиси, 1945, 56 с.
- Г о к и е л и Л. П. Андрей Михайлович Размадзе. Изд-во Тбилисс. ун-та, Тбилиси, 1954, 26 с., на груз. яз.
- Г о к и е л и Л. Андрей Размадзе.— Наука и техника. Тбилиси, 1949, № 10, стр. 11—14, на груз. яз.



### ***Х. А. Рахматуллин***

- У р а з б а е в М. Т. Выдающийся ученый-механик. К 50-летию со дня рожд. акад. АН УзССР Х. А. Рахматуллина.— Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук, 1959, № 3, стр. 3—7.
- Халил Ахметович Рахматуллин. К 50-летию со дня рождения и 25-летию научно-педагогической деятельности.— Инж. сб. Ин-та мех. АН СССР, 1960, т. 27, стр. 3—4.

### ***П. К. Рашевский***

- Н о р д е н А. П., Р о з е н ф е л ь д Б. А. и Я г л о м И. М. Петр Константинович Рашевский. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 1 (79), стр. 225—231, с портр.

### ***Е. Я. Ремез***

- Г н е д е н к о Б. В. и П о г р е б ы с с к и й И. Б. Евгений Яковлевич Ремез. [К 60-летию со дня рожд.].— Укр. мат. журн., 1956, т. 8, № 2, стр. 218—222, с портр.

### ***Н. П. Романов***

- С а р ы м с а к о в Т. А. и Л и н н и к Ю. В. Николай Павлович Романов. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 3, стр. 251—253, с портр.

### ***В. И. Романовский***

- Р о м а н о в с к и й В. И. Избр. труды. Т. 1—2. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1959—1964.
- Всеволод Иванович Романовский.— Соц. наука и техн., 1936, № 10, стр. 146—150.
- В. И. Романовский. [Некролог].— Изв. АН УзССР, 1954, № 5, стр. 121—124, с портр.
- Н а з а р о в Н. Н. Работы В. И. Романовского в области математического анализа.— Сборник, посвященный тридцатилетию научной и педагогической деятельности профессора Всеволода Ивановича Романовского. Труды Среднеазиатского ун-та. Сер. 5-а. Мат., 1939, вып. 19-32, стр. 13—25.
- Н и к о л а е в А. Всеволод Иванович Романовский.— Там же, стр. 9—12.
- С а р ы м с а к о в Т. А. Всеволод Иванович Романовский.— Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 1 (63), стр. 79—88, с портр.
- С а р ы м с а к о в Т. А. Всеволод Иванович Романовский.— Изв. АН УзССР, 1950, № 1, стр. 93—100; Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 3 (37), стр. 184—186.
- С а р ы м с а к о в Т. А. Всеволод Иванович Романовский.— Труды Ин-та мат. и мех. АН УзССР, 1956, вып. 17, стр. 3—11, с портр.
- Сборник, посвященный тридцатилетию научной и педагогической деятельности профессора Всеволода Ивановича Романовского. Труды Среднеазиатского ун-та. Сер. 5-а. Мат. Вып. 19-32. Ташкент, 1939, 248 с., с портр.
- Список работ В. И. Романовского.— Труды Ин-та мат. и мех. АН УзССР, 1953, вып. 10, ч. 1, стр. 5—12, с портр.

### ***И. Н. Рукавицын***

- Иннокентий Николаевич Рукавицын. [Некролог].— Уч. зап. Иркутск. пед. ин-та, 1960, вып. 17, стр. 5—7.

### **Н. А. Рынин**

- М у р а т о в Х. Переписка К. Э. Циолковского с Н. А. Рыниным.— Вестн. воздушн. флота, 1954, № 10, стр. 72—74.  
Ф а р т и к о в И. П. Н. А. Рынин (к 40-летию научно-пед. деят.).— Природа, 1937, № 1, стр. 117.

### **Г. Н. Савин**

- И ш л и н с к и й А. Ю., П а р а с ю к О. С. и Ш е в е л о В. Н. Гурий Николаевич Савин.— Укр. мат. журн., 1957, т. 9, № 2, стр. 225—229, с портр.

### **Т. А. Сарымсаков**

- С и р а ж д и н о в С. Х. Тапшмухамед Алиевич Сарымсаков. [К 50-летию со дня рожд.].— Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1965, № 5, стр. 84—85, с портр.

### **Л. И. Седов**

- Г о л ь д е н б е р г Г. Чествование академика Леонида Ивановича Седова (к 50-летию со дня рожд. и 30-летию научно-пед. и обществ. деят.).— Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех., астроном., физ., хим., 1957, № 4, стр. 251—255.  
Леонид Иванович Седов.— Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1957, № 12, стр. 4—6, с портр.

### **М. Н. Сергеев**

- Михаил Николаевич Сергеев. [1883—1963. Некролог].— Геодезия и картография, 1964, № 1, стр. 77—78, с портр.  
Михаил Николаевич Сергеев. [Некролог].— Изв. высш. учебн. завед. Геодезия и аэрофотосъемка, 1963, вып. 5, стр. 153—154, с портр.

### **Д. М. Синцов**

- См. библиографию ко второму тому настоящего издания.

### **Е. Е. Слуцкий**

- С л у ц к и й Е. Е. Избр. труды. Под ред. Б. В. Гнеденко и Н. В. Смирнова. Изд-во АН СССР, М., 1960, 292 с., с портр.  
К о л м о г о р о в А. Н. Евгений Евгеньевич Слуцкий.— Усп. мат. наук, 1948, т. 3, вып. 4 (26), стр. 143—151.  
С м и р н о в Н. Евгений Евгеньевич Слуцкий.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, т. 12, № 5, стр. 417—420.

### **В. И. Смирнов**

- А л е к с а н д р о в П. С., В е к у а И. Н., К е л д ы ш М. В. и Л а в р е н т ь е в М. А. Владимир Иванович Смирнов. [К 70-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 197—205, с портр.  
Владимир Иванович Смирнов. Вступ. ст. С. Л. Соболева. Библиогр. сост. А. П. Епифановой. Изд-во АН СССР, М.-Л., 1949, 44 с., с портр.  
Е р у г и н Н. П. Лауреат Сталинской премии 1948 г. академик Владимир Иванович Смирнов.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1948, № 9, стр. 122—123.  
Л а д ы ж е н с к а я О. А. и Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. Владимир Иванович Смирнов. [К 70-летию со дня рожд.].— Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. и астроном., 1957, № 7, вып. 2, стр. 5—14, с портр.  
Р а д о в с к и й М. И. Владимир Иванович Смирнов. [К 75-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 6 (108), стр. 185—190.  
Р а д о в с к и й М. И. Воспитатель отечественных математиков. 75 лет со дня рождения акад. В. И. Смирнова.— Природа, 1962, № 7, стр. 85—86, с портр.

- Соболев С. Л. Владимир Иванович Смирнов. [К 60-летию со дня рожд. и 35-летию научн. деят.].— Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 6 (22), стр. 238—239.
- Соболев С. Л. К семидесятилетию Владимира Ивановича Смирнова.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 4, стр. 449—456, с портр.
- Соболев С. Л. и Фихтенгольц Г. М. Академик В. И. Смирнов.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1947, № 6, стр. 155—157.

#### *Н. В. Смирнов*

- Гнеденко Б. В. и др. О работах Н. В. Смирнова по математической статистике. [К 60-летию со дня рожд.].— Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. 5, вып. 4, стр. 436—440, с портр.

#### *А. С. Смогоржевский*

- Добровольский В. А. и Зморович В. А. Александр Степанович Смогоржевский. [К 70-летию со дня рожд.].— Укр. мат. журн., 1966, т. 18, № 5, стр. 94—96, с портр.

#### *С. Л. Соболев*

- Виноградов И. М. Сергей Львович Соболев.— Вестн. АН СССР, 1938, № 11-12, стр. 35—37.
- Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Сергей Львович Соболев. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 3 (87), стр. 203—214, с портр.
- Сергей Львович Соболев. [Библиогр.]. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949, 40 с.

#### *Ю. Д. Соколов*

- Путята Т. В. и Фрадлин Б. Н. Юрий Дмитриевич Соколов. [К 60-летию со дня рожд.].— Укр. мат. журн., 1956, т. 8, № 2, стр. 223—230.
- Юрий Дмитриевич Соколов. [К 70-летию со дня рожд.].— Укр. мат. журн., 1966, т. 18, № 4, стр. 94—101.

#### *Л. Н. Сретенский*

- Леонид Николаевич Сретенский. [К 60-летию со дня рожд.].— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех., 1962, № 2, стр. 77—80, с портр.
- Леонид Николаевич Сретенский.— Прикл. мат. и мех., 1962, т. 26, вып. 3, стр. 393—401, с портр.
- Леонид Николаевич Сретенский. [К 60-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 1 (109), стр. 191—204, с портр.

#### *В. А. Стеклов*

- См. библиографию ко второму тому настоящего издания.

#### *В. В. Степанов*

- Александров П. С. Вячеслав Васильевич Степанов. [Некролог].— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 5 (39), стр. 3—10.
- Александров П. С. и Немыцкий В. В. Вячеслав Васильевич Степанов. [1889—1950]. Изд-во Моск. ун-та, М., 1956, 59 с., с портр.
- Вячеслав Васильевич Степанов.— Прикл. мат. и мех., 1950, т. 14, вып. 6, стр. 565—572, с портр.

**М. Ф. Субботин**

Мерман Г. А. Очерк математических работ Михаила Федоровича Субботина. [К 65-летию со дня рожд.].— Бюл. Ин-та теорет. астроном. АН СССР, 1959, т. 7, № 3, стр. 233—255.

**Г. К. Суслев**

См. библиографию ко 2-му тому настоящего издания.

**А. К. Сушкевич**

Антон Казимирович Сушкевич. [1889—1961. Некролог].— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 2 (104), стр. 165, с портр.

Глушкин Л. М. и Ляпин Е. С. Антон Казимирович Сушкевич. [К 70-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 1 (85), стр. 255—260, с портр.

**В. А. Тартаковский**

Линник Ю. В., Ляпин Е. С. и Якубович В. А. Владимир Абрамович Тартаковский. [К 60-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 5 (101), стр. 225—230, с портр.

**П. Н. Тверской**

Юдин М. Н. Павел Николаевич Тверской. Профессор, доктор физ.-мат. наук.— Метеорология и гидрология, 1946, № 3, стр. 87—88.

Яновский Б. М. Профессор П. Н. Тверской.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1946, № 3, стр. 118—120.

**А. А. Темляков**

Айзенберг Л. А., Баврин И. И. и Луканкин Г. Л. Алексей Александрович Темляков. К 60-летию со дня рождения.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та. Мат., 1964, т. 137, вып. 8, стр. 3—6.

**И. Ю. Тимченко**

См. библиографию ко второму тому настоящего издания.

**А. Н. Тихонов**

Александров П., Самарский А. и Свешников А. Андрей Николаевич Тихонов. [К 50-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 6 (72), стр. 235—245, с портр.

**Е. А. Торопов**

Столяров Н. А. Константин Александрович Торопов.— Матем. в шк., 1955, № 1, стр. 70—71.

**Л. А. Тумаркин**

Александров П. С. и Колмогоров А. Н. Лев Абрамович Тумаркин. [К 60-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 4 (118), стр. 219—221, с портр.

## **П. С. Урысон**

- Александров П. С. П. С. Урысон.— Мат. просв., 1935, № 4, стр. 3—5.  
Александров П. С. П. С. Урысон и его место в математической науке.—  
В кн.: П. С. Урысон. Труды по топологии и другим областям математики.  
Т. 1. Ч. 1. Гостехиздат, М.—Л., 1951, стр. 9—42.  
Александров П. С. Павел Самуилович Урысон.— Усп. мат. наук, 1950,  
т. 5, вып. 1 (35), стр. 196—202, с портр.  
Александров П. С. Создатель советской топологии — П. С. Урысон.—  
Вестн. АН СССР, 1950, № 4, стр. 88—90.

## **К. А. Ушаков**

- Гембаржевский М. Я., Федяевский К. К. и Сабинин Г. Х.  
К 50-летию научной деятельности профессора Константина Андреевича Уша-  
кова.— Пром. аэродинамика, 1962, вып. 24, стр. 5—8, с портр.

## **Д. К. Фаддеев**

- Венков Б. А. и Шафаревич И. Р. Дмитрий Константинович Фаддеев  
(к 50-летию со дня рожд.).— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 1 (79), стр. 233—  
238, с портр.

## **В. С. Федоров**

- Владимир Семенович Федоров. [К 70-летию со дня рожд.].— Усп. мат. наук, 1964,  
т. 19, вып. 1 (115), стр. 191—196, с портр.  
Кованько А. С. Владимир Семенович Федоров. [К 40-летию научно-пед. де-  
ят.].— Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 4 (66), стр. 193—196, с портр.

## **С. П. Фиников**

- Базылев В. Т. и Васильева М. В. Сергей Павлович Фиников. [Некро-  
лог].— Матем. в шк., 1964, № 3, стр. 85—86, с портр.  
Васильев А. М. и Лаптев Г. Ф. Сергей Павлович Фиников. [1883—  
1964].— Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1964, № 3, стр. 92—96.  
Васильев А. М. и Лаптев Г. Ф. Сергей Павлович Фиников. [1883—1964.  
Некролог].— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 4 (118), стр. 155—162, с портр.  
Лаптев Г. Ф. Сергей Павлович Фиников (к 70-летию со дня рожд.).— Усп.  
мат. наук, 1954, т. 9, вып. 3 (61), стр. 245—252, с портр.

## **Г. М. Фихтенгольц**

- Александров А. Д. и др. Григорий Михайлович Фихтенгольц (некролог).—  
Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. и астроном., 1959, № 19, вып. 4, стр. 158—  
159, с портр.  
Канторович Л. В. и Натансон И. П. Григорий Михайлович Фихтен-  
гольц. [К 70-летию со дня рожд.].— Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. и  
астроном., 1958, № 7, вып. 2, стр. 5—13, с портр.  
Канторович Л. В. и Натансон И. П. Григорий Михайлович Фих-  
тенгольц. [1888—1959. Некролог].— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 5 (89),  
стр. 123—128, с портр.  
Смирнов В. И., Канторович Л. В. и Натансон И. П. Григорий  
Михайлович Фихтенгольц.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1948, № 6, стр. 133—135,  
с портр.; Усп. мат. наук, 1948, т. 3, вып. 5 (28), стр. 179—181.

## **Ф. И. Франкль**

- Ф. И. Франкль. [Некролог].— Инж. журн., 1961, т. 1, вып. 1, стр. 191—192,  
с портр.

### **А. А. Фридман**

- Гаврилов А. Ф. Воспоминания о Фридмане. (К переписке А. А. Фридмана). — Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР, 1959, т. 22, стр. 389—400.
- Гаврилов А. Ф. Памяти А. А. Фридмана. — Усп. физ. наук, 1926, т. 6, вып. 1, стр. 73—75.
- Гюнтер Н. М. Памяти А. А. Фридмана. Речь, произнесенная председателем Ленинградского физико-математического общества. — Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва, 1926, т. 1, вып. 1, стр. 5—11.
- Полубаринова-Кочина П. Я. Александр Александрович Фридман. [К 75-летию со дня рожд.]. — Усп. физ. наук, 1963, т. 80, вып. 3, стр. 345—352.
- Смирнов В. И. Выдающийся геофизик и математик. Жизнь и творчество А. А. Фридмана. — Природа, 1963, № 11, стр. 93—96.

### **З. И. Халилов**

- Агаев Г. Н. Заид Исмаилович Халилов (к 50-летию со дня рожд.). — Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 5 (101), стр. 231—237, с портр.
- Агаев Г. Н. О научной и научно-педагогической деятельности академика З. И. Халилова. [К 50-летию со дня рожд. и 30-летию научно-пед. деят.]. — Изв. АН АзССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук, 1961, № 2, стр. 3—12.

### **А. Я. Хинчин**

- Александр Яковлевич Хинчин (к 50-летию со дня рожд.). — Усп. мат. наук. Нов. сер., 1946, т. 1, вып. 2 (12), стр. 192—193.
- Березанская Е. С. и Маргулис А. Я. Александр Яковлевич Хинчин. [1894—1959. Некролог]. — Матем. в шк., 1960, № 1, стр. 77—79, с портр.
- Гнеденко Б. В. Александр Яковлевич Хинчин. [1894—1959. Некролог]. — Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. 5, вып. 1, стр. 3—6, с портр.; Мат. просв., 1961, вып. 6, стр. 3—6.
- Гнеденко Б. В. Александр Яковлевич Хинчин. [К 60-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 3 (65), стр. 197—212.
- Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н. Александр Яковлевич Хинчин. [1894—1959. Некролог]. — Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 4 (94), стр. 97—110, с портр.

### **А. К. Хумал**

- Пятидесятилетие А. К. Хумала. — Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ.-мат. наук, 1958, т. 7, № 1, стр. 75—76, с портр.

### **М. Л. Цетлин**

- Михаил Львович Цетлин. [Некролог]. — Проблемы передачи информации, 1966, т. 2, вып. 3, стр. 102, с портр.

### **С. А. Чаплыгин**

- Полное собрание сочинений Сергея Алексеевича Чаплыгина. В 3-х томах. Изд-во АН СССР, Л., 1933—1935.
- Чаплыгин С. А. Избр. труды по механике и математике. Гостехиздат, М., 1954, 567 с.
- Аржанников Н. С. С. А. Чаплыгин (к 90-летию со дня рожд.). — Вопр. ист. естествозн. и техн., 1960, вып. 10, стр. 42—48.
- Галеркин Б. Г. и др. Памяти академика С. А. Чаплыгина. — Вестн. АН СССР, 1942, № 9-10, стр. 86—90.

- Г о л у б е в В. В. Академик Сергей Алексеевич Чаплыгин. Его жизнь, научная и общественная деятельность. — В кн.: Общее собрание АН СССР, 14—17 февр. 1944 г. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1944, стр. 57—73; Вестн. АН СССР, 1944, № 3, стр. 50—65.
- Г о л у б е в В. В. Сергей Алексеевич Чаплыгин. 1869—1942. Изд-во МГУ, М., 1951, 56 с.
- Г о л у б е в В. В. Сергей Алексеевич Чаплыгин. Бюро новой техники. М., 1947, 118 с.
- Записка об ученых трудах проф. С. А. Чаплыгина. Сост. А. Н. Крыловым. — В кн.: Зап. об. уч. трудах действ. членов АН СССР по отд. физ.-мат. наук, избр. 12 янв. 1929 г. Изд-во АН СССР, Л., 1930, стр. 146—152.
- К о с м о д е м ь я н с к и й А. А. Сергей Алексеевич Чаплыгин (1869—1942). — В кн.: Люди русской науки. Т. 1, ГТТИ, М.—Л., 1948, стр. 250—259.
- К р ы л о в А. Н. К сорокалетию научной деятельности акад. С. А. Чаплыгина. — Вестн. АН СССР, 1931, № 4, стр. 25—28.
- Н е к р а с о в А. И. Работы С. А. Чаплыгина по аэродинамике. — В кн.: Юбил. сб., посв. 30-летию Великой Октябрьской соц. рев. Ч. 2. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947, стр. 524—544.
- Сергей Алексеевич Чаплыгин. [К 10-летию со дня смерти]. Бюро научн. информ. М., 1952, 92 с.
- С т е к л о в В. А., Л а з а р е в П. П. и Б е л о п о л ь с к и й А. А. Записка об ученых трудах С. А. Чаплыгина. — Изв. Акад. наук, 1924, т. 18, № 12—18, стр. 444—445.
- V e t c h i n k i n V. Review of papers by N. Joukovsky and S. Chaplygin which lay the basis on the wind theory. — Прикл. мат. и мех., 1941, т. 5, вып. 2, стр. 161—164.
- V e t c h i n k i n V. S. A. Chaplygin's works on the induced drag theory. — Прикл. мат. и мех., 1941, т. 5, вып. 2, стр. 149—160.

#### *Н. Г. Чеботарев*

- Чеботарев Н. Г. Собр. соч. Т. 1—3. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949—1950.
- Д е л о н е Б. Николай Григорьевич Чеботарев. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, т. 12, № 4, стр. 337—340, с портр.
- М о р о з о в В. В. и Ф а м и н а Л. А. Николай Григорьевич Чеботарев. Под общ. ред. К. П. Ситникова. Татгосиздат, Казань, 1945, 49 с.
- Н. Г. Чеботарев. [Некролог]. — Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 6 (26), стр. 68—71.
- Н. Г. Чеботарев. [Некролог]. — Уч. зап. Казанск. ун-та им. В. И. Ульянова-Ленина, 1949, т. 109, кн. 4, стр. 3—5.
- Николай Григорьевич Чеботарев (к 50-летию со дня рожд.). — Усп. мат. наук. Нов. сер., 1946, т. 1, вып. 2 (12), стр. 189—191.
- Памяти Н. Г. Чеботарева (1894—1947). Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1964, 132 с.
- У р а з б а е в Б. Выдающийся русский алгебраист Николай Григорьевич Чеботарев. — Вестн. АН КазССР, 1952, № 7 (88), стр. 74—80.
- Ч е б о т а р е в Н. Г. Математическая автобиография. — Усп. мат. наук, 1948, т. 3, вып. 4 (26), стр. 3—66, с портр.

#### *С. Н. Черников*

- М а л ь ц е в А. И. и Ч а р и н В. С. Сергей Николаевич Черников. [К 50-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 5 (107), стр. 177—181, с портр.

#### *А. А. Чернышев*

- Записка об ученых трудах А. А. Чернышева. — В кн.: Зап. об уч. трудах действ. чл. АН СССР по отд. мат. и естеств. наук., избр. в 1931—1932 гг. Изд-во АН СССР, Л., 1933, стр. 125—127.
- Памяти академика А. А. Чернышева. 1882—1940. — Электричество, 1940, № 6, стр. 59—61.

### **Н. Г. Четаев**

- К о л о б о в А. М. Николай Гурьевич Четаев. — Инж.-физ. журн., 1963, т. 6, № 6, стр. 137—140, с портр.  
Николай Гурьевич Четаев. — Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Мех. и машиностр., 1959, № 6, стр. 3—6, с портр.  
Николай Гурьевич Четаев. [1902—1959]. Биограф. очерк. — Прикл. мат. и мех., 1960, т. 24, вып. 1, стр. 3—5.  
Памяти Николая Гурьевича Четаева. (1902—1959). — Труды Казанск. авиац. ин-та, 1959, т. 45, стр. 1—4, с портр.

### **Н. С. Четвериков**

- К 80-летию Николая Сергеевича Четверикова. — Экономика и мат. методы, 1965, т. 1, вып. 6, стр. 964—965.

### **Н. Ф. Четверухин**

- К о т о в И. И. Николай Федорович Четверухин. [К 60-летию со дня рожд. и 35-летию научно-пед. деят.]. — Матем. в shk., 1952, № 2, стр. 78—82, с портр.  
К о т о в И. И. Николай Федорович Четверухин. [К 70-летию со дня рожд. и 45-летию научно-пед. деят.]. — Матем. в shk., 1961, № 6, стр. 69—71, с портр.

### **В. Г. Чичигин**

- Б а р а н о в а Г. П. и М о н а с т ы р ш и н И. О. Василий Григорьевич Чичигин. [1889—1960. Некролог]. — Матем. в shk., 1960, № 3, стр. 63—64, с портр.

### **Г. С. Чогошвили**

- А л е к с а н д р о в П. С. и Б е р и к а ш в и л и Н. А. Георгий Северьянович Чогошвили. — Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 5 (125), стр. 293—296, с портр.

### **Ф. З. Чочиев**

- Ф. З. Чочиев. [1911—1964. Некролог]. — Уч. зап. Юго-осет. пед. ин-та, 1963, т. 9, стр. 233—234.

### **Н. Г. Чудаков**

- Л а н с к о й Д. Н. и Л и н н и к Ю. В. Николай Григорьевич Чудаков. [К 60-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 2 (122), стр. 237—240, с портр.  
Л и н н и к Ю. В. и Р о д о с с к и й К. А. Николай Григорьевич Чудаков. [К 50-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 3 (65), стр. 213—215, с портр.

### **А. Л. Шагинян**

- Арташес Липаритович Шагинян. [К 50-летию со дня рожд.]. — Изв. АН АрмССР. Физ.-мат. науки, 1957, т. 10, № 1, стр. 3—8.

### **Г. М. Шапиро**

- Г. М. Шапиро. — Труды Сем. по векторн. и тензорн. анализу. М.—Л., 1948, вып. 6, стр. 9—11.



### **С. О. Шатуновский**

- Бахмутская Э. Я. О ранних работах С. О. Шатуновского по основаниям математики.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 16. Физматгиз, М., 1965, стр. 207—216; Ист. и методология естеств. наук, 1966, вып. 5, стр. 80—85.
- Чеботарев Н. Г. Самуил Осипович Шатуновский.— Усп. мат. наук, 1940, вып. 7, стр. 316—321.

### **И. Р. Шафаревич**

- Максимов Л. Задача решалась 130 лет. [К биограф. советск. математика И. Р. Шафаревича].— Культура и жизнь, 1959, № 8, стр. 27—28.

### **П. А. Широков**

- П. А. Широков.— Труды Сем. по векторн. и тензорн. анализу. М.—Л., 1948, вып. 6, стр. 6—8.
- Петр Алексеевич Широков. 1895—1944. Библиогр. указ. Сост. Л. А. Фоминой и М. Г. Могилевской. Казань, 1955, 32 с., с портр.

### **О. Ю. Шмидт**

- Шмидт О. Ю. Избр. труды. Математика. Изд-во АН СССР, М., 1959, 315 с., с портр.
- Бреус К. А. Отто Юльевич Шмидт. [К 75-летию со дня рожд.].— Укр. мат. журн., 1966, т. 18, № 5, стр. 3—6, с портр.
- Калашников А. Г. К 70-летию со дня рождения академика О. Ю. Шмидта.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1961, № 9, стр. 1241—1242.
- Курош А. Г. Отто Юльевич Шмидт.— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 5 (45), стр. 197—199.
- Курош А. Г. Отто Юльевич Шмидт. [Некролог].— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 6 (74), стр. 227—233, с портр.
- Лактионов А. Ф. Академик Отто Юльевич Шмидт. [К 70-летию со дня рожд.].— Изв. АН СССР. Сер. геогр., 1962, № 2, стр. 95—103.
- Лебедев Т. С. Памяти Отто Юльевича Шмидта.— Труды Ин-та геол. наук АН УССР. Сер. геофиз., 1958, вып. 2, стр. 200—203.
- Левин Б. Ю. Отто Юльевич Шмидт.— Земля и Вселенная, 1966, № 5, стр. 48—58.
- Отто Юльевич Шмидт.— В кн.: Люди русской науки. Физматгиз, М., 1961, стр. 400—411.
- Отто Юльевич Шмидт.— Жизнь и деятельность. Сб. Изд-во АН СССР, М., 1959, 470 с. с илл.
- Подвигина Е. П. Крупнейший ученый и государственный деятель. 70 лет со дня рождения О. Ю. Шмидта.— Природа, 1961, № 10, стр. 120—124.
- Подвигина Е. П. и Виноградов Л. К. Академик и герой. [Об О. Ю. Шмидте]. Госполитиздат, М., 1960, 31 с.
- Щербakov Д. И., Левин Б. Ю. Борец за материалистическую науку. К годовщине со дня смерти О. Ю. Шмидта.— Природа, 1957, № 9, стр. 40—46.

### **В. Л. Шмұльян**

- Крейн М. Г. Витольд Львович Шмұльян. [К 50-летию со дня рожд. и 20-летию со дня смерти].— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 2 (122), стр. 131—133, с портр.
- Райков Д. А. О работах В. Л. Шмұльяна по топологии линейных пространств.— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 2 (122), стр. 135—147.

### **Л. Г. Шнирельман**

Соколов И. Г. Памяти Льва Генриховича Шнирельмана. — 'Вопр. элем. и высш. мат.', 1952, вып. 1, стр. 15—23, с портр.

### **И. Я. Штаерман**

И. Я. Штаерман. — Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Мех. и машиностр., 1962, № 6, стр. 189—193, с портр.

Илья Яковлевич Штаерман. [1891—1962. Некролог]. — Строит. мех. и расчет сооруж., 1963, № 2, стр. 48, с портр.

### **И. З. Штокало**

Соколов Ю. Д. и Погребысский И. Б. Иосиф Захарович Штокало. [К 60-летию со дня рожд.]. — Укр. мат. журн., 1958, т. 10, № 1, стр. 105—106, с портр.

### **А. П. Юшкевич**

Маркушевич А. И. и Яновская С. А. Адольф Павлович Юшкевич. [К 50-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 4 (70), стр. 197—200, с портр.

### **Х. Я. Яксон**

Кангро Г. Профессор Херманн Яксон. — Уч. зап. Тартуск. ун-та. Труды по мат. и мех., 1965, вып. 177, т. 5, стр. 3—5, с портр.

### **В. А. Яблоков**

Василий Андреевич Яблоков. [К 70-летию со дня рожд.]. — Изв. высш. учебн. завед. Мат., 1962, № 4, стр. 173—174, с портр.

### **С. А. Яновская**

Башмакова И. Г. Софья Александровна Яновская. — Матем. в shk., 1965, № 2, стр. 72—74, с портр.

К 70-летию С. А. Яновской. — Научн. докл. высш. shk. Философ. науки, 1966, № 3, стр. 153.

Софья Александровна Яновская. [К 60-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 3 (69), стр. 219—222, с портр.

Софья Александровна Яновская. [К 70-летию со дня рожд.]. — Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 3 (129), стр. 239—247, с портр.

## **3. Литература к главам**

### **К главе V. Теория чисел**

Андрианов А. И. Об аналитической арифметике квадратичных форм с нечетным числом переменных в связи с теорией модулярных форм. — ДАН СССР, 1962, т. 145, № 2, стр. 241—244.

Андрианов А. И. Обобщение одной теоремы М. Эйхлера из теории кватернарных квадратичных форм. — ДАН СССР, 1961, т. 141, № 1, стр. 9—12.

Андрианов А. И. Представление чисел некоторыми квадратичными формами в связи с теорией эллиптических кривых. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, т. 29, стр. 227—238.

- Анфертьева Е. А. О формулах преобразования Виноградова — Корпута. — ДАН СССР, 1948, т. 60, № 4, стр. 541—544.
- Барбан М. Б. «Большое решето» Ю. В. Линника и предельная теорема для числа классов идеалов мнимого квадратичного поля. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, т. 26, № 4, стр. 573—580.
- Барбан М. Б. «Плотность» нулей  $L$ -функций Дирихле и задача о сложении простых и «почти простых» чисел. — Мат. сб., 1963, т. 61 (103), вып. 4, стр. 418—425.
- Барбан М. Б., Линник Ю. В., Чудаков Н. Г. О распределении простых чисел в коротких прогрессиях  $\text{mod } p$ . — ДАН СССР, 1964, т. 154, № 4, стр. 751—753.
- Боревич З. И. и Шафаревич И. Р. Теория чисел. «Наука», М., 1964, 568 с.
- Бороздкин К. Г. К вопросу о постоянной И. М. Виноградова. — Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь—июль 1956 г.), 1956, т. 1, стр. 3.
- Бредихин Б. М. Бинарные аддитивные проблемы неопределенного типа. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, т. 27, № 2, стр. 439—462; № 3, стр. 577—612; № 4, стр. 777—794.
- Бредихин Б. М. Улучшение остаточного члена в проблеме Харди—Литтлвуда. — Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., astron., 1962, № 19, стр. 133—137.
- Бухштаб А. А. Новые улучшения в методе эратосфенова решета. — Мат. сб., 1938, т. 4 (46), вып. 2, стр. 375—387.
- Вальфиш А. З. К теории аддитивных чисел. — Труды Тбилисс. мат. ин-та, 1938, т. 5, стр. 197—254; 1940, т. 8, стр. 69—107; 1941, т. 9, стр. 75—96.
- Вальфиш А. З. Целые точки в многомерных шарах. Изд-во АН ГрузССР, Тбилиси, 1959, 460 с.
- Венков Б. А. Метрика Лобачевского и метрика Вороного. — Труды Третьего Всесоюзного мат. съезда (Москва, июнь—июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 14—21.
- Венков Б. А. Об арифметике кватернионов. — Изв. Рос. акад. наук. Сер. 6, 1922, т. 16, стр. 205—246; Изв. АН СССР, 1925, т. 19, стр. 535—562; Сер. 7, Отд. физ.-мат. наук, 1929, стр. 489—504.
- Венков Б. А. Об арифметической группе автоморфизмов неопределенной квадратичной формы. — Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук. Сер. мат., 1937, № 1, стр. 139—170.
- Венков Б. А. Об одной монотонной функции. — Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат., 1949, т. 16, № 1, стр. 3—19.
- Венков Б. А. Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройных квадратичных форм. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1945, т. 9, № 6, стр. 429—494.
- Венков Б. А. О неопределенных квадратичных формах с целыми коэффициентами. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, т. 38, стр. 30—41.
- Венков Б. А. О приведении положительных квадратичных форм. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, т. 4, № 1, стр. 37—52.
- Венков Б. А. О числе классов бинарных квадратичных форм отрицательных определителей. — Изв. АН СССР. Отд. физ.-мат. наук. Сер. 7, 1928, № 3-5, стр. 375—392, 455—490.
- Виноградов А. И. Обобщение формулы Клостермана. — ДАН СССР, 1962, т. 146, № 4, стр. 754—756.
- Виноградов А. И. Об одной «почти бинарной» задаче. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1956, т. 20, № 6, стр. 713—750.
- Виноградов А. И. Применение  $\xi(s)$  Римана к решету Эратосфена. — Мат. сб., 1957, т. 41 (83), вып. 3, стр. 415—416.
- Виноградов А., Делоне Б., Фукс Д. О рациональных приближениях к иррациональным числам с ограниченными неполными частными. — ДАН СССР, 1958, т. 118, № 5, стр. 862—865.
- Виноградов А. И., Делоне Б. Н., Фукс Д. Б., Сандакова Н. И. Теория стереоэдров. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1961, т. 64, стр. 28—51.

- Виноградов И. М. Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого многочлена. — Изв. АН СССР. Сер. 6, 1927, т. 21, стр. 567—578.
- Виноградов И. М. К вопросу о верхней границе для  $G(n)$ . — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, № 5, стр. 537—642.
- Виноградов И. М. К вопросу о числе целых точек в шаре. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, т. 27, № 5, стр. 957—968.
- Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1947, т. 23, 111 с.
- Виноградов И. М. Новая оценка  $G(n)$  в проблеме Варинга. — ДАН СССР. 1934, т. 4 (5), № 5-6, стр. 249—253.
- Виноградов И. М. Новая оценка функции  $\mathfrak{F}(1 \nmid it)$ . — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, т. 22, № 2, стр. 161—164.
- Виноградов И. М. Новое решение проблемы Варинга. — ДАН СССР, 1934, т. 2 (6), № 6, стр. 337—341.
- Виноградов И. М. Новые асимптотические выражения. — ДАН СССР, 1934, т. 1, № 1, стр. 49—51.
- Виноградов И. М. Новые оценки сумм Вейля. — ДАН СССР, 1935, т. 3 (8), № 5, стр. 195—198.
- Виноградов И. М. Новые приложения тригонометрических сумм. — ДАН СССР, 1934, т. 1, № 1, стр. 10—14.
- Виноградов И. М. Новый вариант вывода теоремы Варинга. — Труды Физ.-мат. ин-та АН СССР, 1935, т. 9, стр. 5—16.
- Виноградов И. М. Новый метод в аналитической теории чисел. — Труды Физ.-мат. ин-та АН СССР, 1937, т. 10, стр. 3—122.
- Виноградов И. М. Новый подход к оценке суммы значений  $\chi(p \nmid k)$ . — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1952, т. 16, № 3, стр. 197—210.
- Виноградов И. М. Новый способ для получения асимптотических выражений арифметических функций. — Изв. Рос. акад. наук. Сер. 6, 1917, т. 11, стр. 1347—1378.
- Виноградов И. М. Об одном асимптотическом равенстве теории квадратичных форм. — Журн. Физ.-мат. о-ва. Пермь, 1918, т. 1, стр. 18—28.
- Виноградов И. М. О верхней границе  $G(n)$  в проблеме Варинга. — Изв. АН СССР. Сер. 7. Отд. мат. и естеств. наук, 1934, № 10, стр. 1455—1470.
- Виноградов И. М. О границе наименьшего невычета  $n$ -й степени. — Изв. АН СССР. Сер. 6, 1926, т. 20, стр. 47—58.
- Виноградов И. М. О дробных частях целого многочлена. — Изв. АН СССР. Сер. 6, 1926, т. 20, стр. 585—600.
- Виноградов И. М. О распределении индексов. — ДАН СССР. Сер. А, 1926, стр. 73—76.
- Виноградов И. М. О распределении квадратичных вычетов и невычетов. — Журн. Физ.-мат. о-ва. Пермь, 1916, т. 2, стр. 3—16.
- Виноградов И. М. О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя. — Сообщ. Харьк. мат. о-ва, т. 16, № 1-2, стр. 10—38.
- Виноградов И. М. Особый случай оценки тригонометрических сумм. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, т. 22, № 1, стр. 3—14.
- Виноградов И. М. О теореме Варинга. — Изв. АН СССР. Сер. 7. Отд. физ.-мат. наук, 1928, стр. 393—400.
- Виноградов И. М. О функции  $\xi(s)$ . — ДАН СССР, 1958, т. 118, № 4, стр. 631.
- Виноградов И. М. Оценки тригонометрических сумм. — Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук. Сер. мат., 1938, № 5-6, стр. 505—524.
- Виноградов И. М. О числе целых точек внутри круга. — Изв. АН СССР. Сер. 7. Отд. мат. и естеств. наук, 1932, стр. 313—336.
- Виноградов И. М. О числе целых точек в области трех измерений. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, т. 27, № 1, стр. 3—8.
- Виноградов И. М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел. — ДАН СССР, 1937, т. 15, № 6-7, стр. 291.
- Виноградов И. М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида  $p \nmid k$  по простому модулю. — Мат. сб., 1938, т. 3 (45), вып. 2, стр. 311—320.

- Виноградов И. М. Распределение по простому модулю простых чисел с заданным значением символа Лежандра.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, т. 18, № 2, стр. 105—112.
- Виноградов И. М. Тригонометрические суммы, содержащие значение многочлена.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 2, стр. 145—170.
- Виноградов И. М. Улучшение асимптотических формул для числа целых точек в области трех измерений.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1955, т. 19, № 1, стр. 3—10.
- Виноградов И. М. Уточнение некоторых теорем теории простых чисел.— ДАН СССР, 1942, т. 37, № 4, стр. 135—137.
- Виноградов И. М. Элементарное доказательство одного общего предложения из аналитической теории чисел.— Изв. Политехн. ин-та. Л., 1925, т. 29, стр. 3—12.
- Виноградов И. М. Элементарное доказательство одной общей теоремы аналитической теории чисел.— Изв. АН СССР. Сер. 6, 1925, т. 19, стр. 785—796.
- Гельфонд А. О. О разбиении натурального ряда на классы группой линейных подстановок.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, т. 18, № 4, стр. 297—306.
- Гельфонд А. О. О седьмой проблеме Гильберта.— ДАН СССР, 1934, т. 2, № 1, стр. 1—6.
- Гельфонд А. О. О совместных приближениях алгебраических чисел рациональными дробями.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1941, т. 5, № 1, стр. 99—104.
- Гельфонд А. О. О функциях целочисленных в точках геометрической прогрессии.— Мат. сб., 1933, т. 40, вып. 1, стр. 42—47.
- Гельфонд А. О. О целочисленности аналитических функций.— ДАН СССР, 1951, т. 81, № 3, стр. 341—344.
- Гельфонд А. О. Распределение дробных долей и сходимость функциональных рядов с пропусками.— Уч. зап. Моск. ун-та. Мат., 1951, вып. 148, т. 4, стр. 60—68.
- Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. Гостехиздат, М., 1952, 224 с.
- Голод Е. С., Шафаревич И. Р. О башне полей классов.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 2, стр. 261—272.
- Делоне Б. Н. Алгоритм разделенных параллелограммов.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1947, т. 11, № 6, стр. 505—538.
- Делоне Б. Н. Геометрия положительных квадратичных форм.— Усп. мат. наук, 1937, вып. 3, стр. 16—62; 1938, вып. 4, стр. 102—164.
- Делоне Б. Н. Доказательство основной теоремы теории стереоэдров.— ДАН СССР, 1961, т. 138, № 6, стр. 1270—1272.
- Делоне Б. Н. О числе представлений числа двойничной кубической формы отрицательного определителя.— Изв. Рос. акад. наук. Сер. 6, 1922, т. 16, стр. 253—272.
- Делоне Б. Н. Решение неопределенного уравнения  $x^3q + y^3 = 1$ .— Изв. Рос. акад. наук. Сер. 6, 1922, т. 16, стр. 273—280.
- Делоне Б. Н., Рышков С. С. Решение задачи о наименее плотном решетчатом покрытии четырехмерного пространства равными шарами.— ДАН СССР, 1963, т. 152, № 3, стр. 523—524.
- Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К. Теория иррациональностей третьей степени.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1940, т. 11, 340 с.
- Демушкин С. П. Группа максимального  $p$ -расширения локального поля.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 3, стр. 329—346.
- Демушкин С. П. О  $\alpha$ -расширениях локального поля.— Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 4, стр. 951—955.
- Ибрагимов И. А. Одна теорема из метрической теории цепных дробей.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1961, № 1, стр. 13—24.
- Карацуба А. А., Коровов Н. М. О теореме о среднем.— ДАН СССР, 1963, т. 143, № 2, стр. 245—248.
- Киселев А. А. Выражение числа классов идеалов вещественных квадратичных полей через числа Бернулли.— ДАН СССР, 1948, т. 61, № 5, стр. 777—779.
- Киселев А. А., Славутский И. Ш. Преобразование формул Дирихле и арифметическое вычисление числа классов идеалов квадратичных полей.—

- Труды Четвертого Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 105—112.
- К о г о н и я П. Г. О структуре множества чисел Маркова.— Труды Тбилисск. мат. ин-та, 1953, т. 19, стр. 121—133.
- К о р о б о в Н. М. Дробные доли показательной функции.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, т. 38, стр. 87—96.
- К о р о б о в Н. М. О границе нулей функции Римана  $\zeta(s)$ .— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 2 (80), стр. 243—245.
- К о р о б о в Н. М. О некоторых вопросах равномерного распределения.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, т. 14, № 3, стр. 215—238.
- К о р о б о в Н. М. О некоторых задачах чебышевского типа.— ДАН СССР, 1953, т. 89, № 3, стр. 397—400.
- К о р о б о в Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. Физматгиз, М., 1963, 224 с.
- К у б и л ю с И. П. Вероятностные методы в теории чисел. Гос. изд-во полит. и научн. лит. ЛитССР, Вильнюс, 1962, 221 с.
- К у б и л ю с И. П. О некоторых задачах геометрии простых чисел.— Мат. сб., 1952, т. 31 (73), вып. 3, стр. 507—542.
- К у б и л ю с И. О применении метода И. М. Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел.— ДАН СССР, 1949, т. 67, № 5, стр. 783—786.
- К у з ь м и н Р. О. Об одной задаче Гаусса.— ДАН СССР. Сер. А, 1928, стр. 378—380.
- Л а п и н А. И. Общий закон взаимности и новое обоснование теории полей классов.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, т. 18, № 4, стр. 335—378.
- Л а п и н А. И. О подполях гиперэллиптических полей. I.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 5, стр. 953—988.
- Л е в и н Б. В. Распределение «почти простых» чисел в полиномиальных последовательностях.— Мат. сб., 1963, т. 61 (103), вып. 4, стр. 389—407.
- Л и н н и к Ю. В. Асимптотико-геометрические и эргодические свойства множества целых точек на сфере.— Мат. сб., 1957, т. 43 (85), вып. 2, стр. 257—276.
- Л и н н и к Ю. В. Асимптотическое распределение приведенных бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 2, стр. 3—23; № 5, стр. 3—32; № 8, стр. 15—127.
- Л и н н и к Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Изд-во Моск. ун-та, 1961, 207 с.
- Л и н н и к Ю. В. О суммах Weyl'я.— ДАН СССР, 1942, т. 34, № 7, стр. 201—203.
- Л и н н и к Ю. В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха—Виноградова.— Мат. сб., 1946, т. 19 (61), вып. 1, стр. 3—8.
- Л и н н и к Ю. В. Некоторые применения неевклидовых геометрий к теории характеров Дирихле, аналоги эргодических теорем.— Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 91—99.
- Л и н н и к Ю. В. О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, т. 4, № 4-5, стр. 363—402.
- Л и н н и к Ю. В. Элементарное решение проблемы Waring'a по методу Шнирельмана.— Мат. сб., 1943, т. 12 (54), вып. 2, стр. 225—230.
- М а л ы ш е в А. В. Асимптотический закон для представления чисел некоторыми положительными тернарными квадратичными формами.— ДАН СССР, 1953, т. 93, № 5, стр. 771—774.
- М а л ы ш е в А. А. К теореме Минковского.— Главка о лучевом теле.— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 2 (48), стр. 168—171.
- М а л ы ш е в А. В. О представлении целых положительных чисел квадратичными формами.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1962, т. 65, 212 с.
- М а н и н Ю. И. Об арифметике рациональных поверхностей.— ДАН СССР, 1963, т. 152, № 1, стр. 46—49.
- М а н и н Ю. И. Рациональные точки алгебраических кривых над функциональными полями.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, т. 27, № 6, стр. 1397—1442.
- М а р д ж а н и ш в и л и К. К. Об одновременном представлении пары чисел и их квадратов.— Труды Тбилисск. мат. ин-та, 1951, т. 18, стр. 183—208.

- Марджанишвили К. К. О некоторых нелинейных системах уравнений в целых числах. — Мат. сб., 1953, т. 33 (75), вып. 3, стр. 639—675.
- Минеев М. П. Диофантово уравнение с показательной функцией и его приложение к изучению эргодической суммы. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, т. 22, № 5, стр. 585—598.
- Нечаев В. И. Многочлены с малым  $G(f)$ . — Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1958, т. 71, стр. 291—300.
- Постников А. Г. Арифметическое моделирование случайных процессов. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1960, т. 57, стр. 3—81.
- Постников А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1955, т. 19, № 1, стр. 11—16.
- Реморов П. Н. К неопределенным уравнениям вида  $a^p + Db^p = c^p$ . — ДАН СССР, 1956, т. 106, № 3, стр. 395—398.
- Родосский К. А. О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии. — Мат. сб., 1954, т. 34 (76), вып. 2, стр. 331—356.
- Родосский К. А. О распределении простых чисел в коротких арифметических прогрессиях. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, т. 12, № 2, стр. 123—128.
- Родосский К. А. О числе нулей всех  $L$ -функций с характеристиками по данному модулю. — ДАН СССР, 1952, т. 84, № 4, стр. 669—671.
- Романов Н. П. Об операторной  $\zeta$ -функции. — Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 3 (19), стр. 186—187.
- Романов Н. П. О двух теоремах аддитивной теории чисел. — Мат. сб., 1934, т. 40, вып. 4, стр. 514—520.
- Романов Н. П. Пространство Гильберта и теория чисел. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946, т. 10, № 1, стр. 3—34; 1951, т. 15, № 2, стр. 131—152.
- Санов И. Н. Новое доказательство теоремы Минковского. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1952, т. 16, № 1, стр. 101—112.
- Сегал Б. И. Теорема Варинга для степеней с дробными и иррациональными показателями. — Труды Физ.-мат. ин-та АН СССР, 1934, т. 5, стр. 79—86.
- Скубенко Б. Ф. Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперболоиде и эргодические теоремы. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, т. 26, № 5, стр. 721—752.
- Скубенко Б. Ф. К асимптотике целочисленных матриц  $n$ -го порядка и об интегральном инварианте группы унимодулярных матриц. — ДАН СССР, 1963, т. 153, № 2, стр. 290—291.
- Спринджук В. Г. О гипотезе Малера. — ДАН СССР, 1964, т. 154, № 4, стр. 783—786; т. 155, № 1, стр. 54—56.
- Тартаковский В. А. Метод избирательного «приближенного решета». — ДАН СССР, 1939, т. 23, № 2, стр. 127—130.
- Тартаковский В. А. О количестве представления больших чисел формами «общего вида» с большим числом переменных. I. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 7, стр. 5—17; стр. 131—154.
- Усольцев Л. П. Аналог теоремы Форте—Каца. — ДАН СССР, 1961, т. 137, № 6, стр. 1315—1318; 1962, т. 143, № 4, стр. 754.
- Фаддеев Д. К. Об уравнении  $x^3 + y^3 = Az^3$ . — Труды Физ.-мат. ин-та АН СССР, 1934, т. 5, стр. 25—40.
- Фаддеев Д. К. Об уравнении  $x^4 - Ay^4 = \pm 1$ . — Труды Физ.-мат. ин-та АН СССР, 1934, т. 5, стр. 41—52.
- Фаддеев Д. К. Полное решение одного класса неопределенных уравнений третьей степени отрицательного дискриминанта. — Труды Второго Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 24—30 июня 1934 г.), 1936, т. 2, стр. 36—41.
- Фаддеев Д. К., Скопин А. И. К доказательству одной теоремы Кавада. — ДАН СССР, 1959, т. 127, № 3, стр. 529—530.
- Фельдман Н. И. О мере трансцендентности числа  $\pi$ . — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, т. 24, № 3, стр. 357—368.
- Фогелс Э. К. О простых числах в начале арифметической прогрессии. — ДАН СССР, 1955, т. 102, № 3, стр. 455—456.
- Фогелс Э. К. О простых числах в последовательностях норм идеалов. — Изв. АН ЛатвССР, 1961, № 12, стр. 29—34.

- Ф о м е н к о О. М. Об  $L$ -функциях Дирихле.— ДАН СССР, 1962, т. 142, № 3, стр. 554—555.
- Ф о м е н к о О. М. Оценки внутреннего произведения Петерсона с приложением к теории кватернарных квадратичных форм.— ДАН СССР, 1963, т. 152, № 3, стр. 559—562.
- Ф р е й м а н Г. А. Проблема Варинга с растущим числом слагаемых.— Уч. зап. Елабужск. гос. пед. ин-та, 1958, т. 3, стр. 105—119.
- Ч е б о т а р е в Н. Г. Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок.— Изв. Рос. акад. наук. Сер. 6, 1923, т. 17, стр. 205—250.
- Ч у д а к о в Н. Г. О плотности совокупности четных чисел, непредставимых как сумма двух нечетных простых.— Изв. АН СССР. Отд. мат. и ест. наук. Сер. мат., 1938, № 1, стр. 25—40.
- Ч у д а к о в Н. Г. О суммах Weyl'я.— Мат. сб., 1937, т. 2 (44), вып. 1, стр. 17—35.
- Ч у д а к о в Н. Г. О функциях  $\xi(s)$  и  $\pi(x)$ .— ДАН СССР, 1938, т. 21, № 9, стр. 425—426.
- Ч у д а к о в Н. Г., П а в л ю ч у к А. К. О сумматорных функциях характеров числовых групп с конечной базой.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, т. 38, стр. 366—381.
- Ш а р ы г и н И. Ф. О применении теоретико-числовых методов интегрирования в случае неперiodических функций.— ДАН СССР, 1960, т. 132, № 1, стр. 71—74.
- Ш а ф а р е в и ч И. Р. Главные однородные пространства, определенные над полем функций.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1961, т. 64, стр. 316—346.
- Ш а ф а р е в и ч И. Р. Группа главных однородных алгебраических многообразий.— ДАН СССР, 1959, т. 124, № 1, стр. 42—43.
- Ш а ф а р е в и ч И. Р. О бирациональной эквивалентности эллиптических кривых.— ДАН СССР, 1957, т. 114, № 2, стр. 267—270.
- Ш а ф а р е в и ч И. Р. Общий закон взаимности.— Мат. сб., 1950, т. 26 (68), вып. 1, стр. 113—146.
- Ш а ф а р е в и ч И. Р. О  $p$ -расширениях.— Мат. сб., 1947, т. 20 (62), вып. 2, стр. 351—362.
- Ш а ф а р е в и ч И. Р. Показатели эллиптических кривых.— ДАН СССР, 1957, т. 114, № 4, стр. 714—716.
- Ш а ф а р е в и ч И. Р. Поля алгебраических чисел.— Proc. Intern. Congr. of Mathem. (15—22 august 1962, Stockholm). Inst. Mittag-Leffler, 1963, p. 163—176.
- Ш а ф а р е в и ч И. Р. Расширения с заданными точками ветвления.— Inst. des hautes études scientifiques, 1963, № 18.
- Ш а х о в Ю. Н. О вычислении собственных значений многомерного симметрического ядра с помощью теоретико-числовых сеток.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 6, стр. 988—997.
- Ш и д л о в с к и й А. Б. О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, № 1, стр. 35—36.
- Ш и д л о в с к и й А. Б. О новом критерии трансцендентности и алгебраической независимости значений одного класса целых функций.— ДАН СССР, 1956, т. 106, № 3, стр. 399—400.
- Ш и д л о в с к и й А. Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов.— Уч. зап. Моск. ун-та. Мат., 1959, вып. 186, т. 9, стр. 11—70.
- Ш н и р е л ь м а н Л. Г. Об аддитивных свойствах чисел.— Изв. Донск. политехн. ин-та, 1930, т. 14, вып. 2-3, стр. 3—28; Усп. мат. наук, 1940, вып. 7, стр. 7—46.
- D e l a u n a y B. N. Sur la partition régulière de l'espace à 4-dimensions.— Изв. АН СССР. Сер. 7. Отд. физ.-мат. наук, 1929, № 1, стр. 79—110; № 2, стр. 147—164.
- D e l a u n a y B. N. Über die Darstellung der Zahlen durch die binären kubischen Formen von negativer Diskriminante.— Math. Z., 1930, Bd 31, S. 1—26.
- G e l f o n d A. O. Sur la divisibilité de la différence des puissances de deux nombres entiers par une puissance d'un idéal premier.— Мат. сб., 1940, т. 7 (49), вып. 1, стр. 7—26.



- Gelfond A. O. Sur le septieme probleme de Hilbert.— Изв. АН СССР. Сер. 7. Отд. мат. и естеств. наук, 1934, № 4-5, стр. 623—630.
- Gelfond A. O. Sur les diviseurs premiers des Valeurs de la fonction exponentielle.— Труды Физ.-мат. ин-та АН СССР, 1934, т. 5, стр. 53—58.
- Gelfond A. O. Sur les nombres transcendants.— Comptes Rendus Acad. Sci., 1929, t. 189, p. 1224—1228.
- Gelfond A. O. Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entieres.— Tôh. Math. Journ., 1929, t. 30, p. 280—285.
- Khintchine A. Ein Satz über Kettenbrüche mit arithmetischen Anwendungen.— Math. Z., 1923, Bd 18, S. 289—306.
- Khintchine A. Metrische Kettenbruchprobleme.— Compositio math., 1935, N 1, p. 361—382.
- Khintchine A. Zur additiven Zahlentheorie.— Mat. сб., 1932, т. 39, вып. 3, стр. 27—34.
- Linnik Ju. V. Additive problems and eigenvalues of the modular operators.— Proc. Intern. Congr. of Mathem. (15—22 august 1962, Stockholm). Inst. Mittag-Leffler, 1963, p. 270—284.
- Linnik Ju. V. On the least prime in an arithmetic progression. I. The basic theorem.— Mat. сб., 1944, т. 15 (57), вып. 2, стр. 139—178.
- Linnik Ju. V. On the representation of large numbers as sums of seven cubes.— Mat. сб., 1943, 12 (54), вып. 2, стр. 220—224.
- Postnikov A. G. On Dirichlet  $L$ -series with the character modulus equal to the power of a prime number.— Journ. Indian. Math. Soc., 1956, v. 20, N 1-3, p. 217—226.
- Romanoff N. P. Über einige Sätze der additiven Zahlen-theorie.— Math. Ann., 1934, Bd 109, S. 668—678.
- Tartakovski V. A. Auflösung der Gleichung  $x^4 - py^4 = 1$ .— Изв. АН СССР. Сер. 6, 1926, т. 20, стр. 301—324.
- Tartakovski V. A. Die Gesamtheit der Zahlen, die durch eine positive quadratische Form  $F(x_1, x_2, \dots, x_s)$  ( $s \geq 4$ ) darstellbar sind.— Изв. АН СССР. Сер. 7. Отд. физ.-мат. наук, 1929, № 2, стр. 111—122; № 3, стр. 165—196.
- Tchudakoff N. On Goldbach—Vinogradov's theorem.— Ann. of Math., 1947 second ser., v. 48, N 3, p. 515—545.
- Tchudakoff N. On the difference between two neighbouring prime numbers.— Mat. сб., 1936, т. 1 (43), вып. 6, стр. 799—814.
- Tchudakoff N. On zeros of Dirichlet's  $L$ -functions.— Mat. сб., 1936, т. 1 (43), вып. 4, стр. 591—602.
- Tschebotarëw N. Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören.— Math. Ann., 1925, Bd 95, p. 191—228.
- Vinogradov I. Sur la distribution des residus et des nonresidus des puissances.— Журн. Физ.-мат. о-ва. Пермь, 1918, т. 1, стр. 94—98.

## К главе VI. Алгебра

- Адо И. Д. О нильпотентных алгебрах и  $p$ -группах.— ДАН СССР, 1943, т. 40, № 8, стр. 339—342.
- Адо И. Д. О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных подстановок.— Изв. Физ.-мат. о-ва и Научно-исслед. ин-та мат. и мех. при Казанск. ун-те. Сер. 3, 1934—1935, т. 7, стр. 3—43.
- Адо И. Д. Представление алгебр Ли матрицами.— Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 6 (22), стр. 159—173.
- Адян С. И. Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп.— Труды Моск. мат. о-ва, 1957, т. 6, стр. 231—298.
- Александров А. Д. О расширении хаусдорфового пространства до  $H$ -замкнутого.— ДАН СССР, 1942, т. 37, № 3, стр. 138—141.
- Алимов Н. Г. Об упорядоченных полугруппах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, т. 14, № 6, стр. 569—576.

- А н д р у н а к и е в и ч В. А. Антипростые и сильно идемпотентные кольца. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 1, стр. 125—144.
- А н д р у н а к и е в и ч В. А. Бирегулярные кольца. — Мат. сб., 1956, т. 39 (81), вып. 4, стр. 447—464.
- А н д р у н а к и е в и ч В. А. К определению радикала кольца. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1952, т. 16, № 3, стр. 217—224.
- А н д р у н а к и е в и ч В. А. Модулярные идеалы, радикалы и полупростота колец. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 3 (75), стр. 133—139.
- А н д р у н а к и е в и ч В. А. Полурадикальные кольца. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, т. 12, № 2, стр. 129—178.
- А н д р у н а к и е в и ч В. А. Радикалы и разложение кольца. — ДАН СССР, 1962, т. 145, № 1, стр. 9—12.
- А н д р у н а к и е в и ч В. А. Радикалы ассоциативных колец. I. — Мат. сб., 1958, т. 44 (86), вып. 2, стр. 179—212; II. — Там же, 1961, т. 55 (97), вып. 3, стр. 329—346.
- А н д р у н а к и е в и ч В. А., Р я б у х и н Ю. М. Модули и радикалы. — ДАН СССР, 1964, т. 156, № 5, стр. 991—994.
- А н д р у н а к и е в и ч В. А., Р я б у х и н Ю. М. Примарные идеалы в некоммутативных кольцах. — ДАН СССР, 1965, т. 165, № 1, стр. 13—16.
- А н д р у н а к и е в и ч В. А., Р я б у х и н Ю. М. Примарности в кольцах, группоидах, модулях и структурах. — ДАН СССР, 1966, т. 168, № 3, стр. 495—498.
- А н д р у н а к и е в и ч В. А., Р я б у х и н Ю. М. Специальные модули и специальные радикалы. — В кн.: Памяти Н. Г. Чеботарева. К семидесятилетию со дня рождения. Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1964, стр. 7—17.
- А н д р у н а к и е в и ч В. А., Р я б у х и н Ю. М. Специальные модули и специальные радикалы. — ДАН СССР, 1962, т. 147, № 6, стр. 1274—1277.
- А р г у н о в Б. И. Конфигурационные постулаты и их алгебраические эквиваленты. — Мат. сб., 1950, т. 26 (68), вып. 3, стр. 425—456.
- А р е ш к и н Г. Я. Об отношениях конгруэнций и дистрибутивных структурах с нулевым элементом. — ДАН СССР, 1953, т. 90, № 4, стр. 485—486.
- А р е ш к и н Г. Я. Свободные дистрибутивные структуры и свободные бикомпактные  $T_0$ -пространства. — Мат. сб., 1953, т. 33 (75), вып. 1, стр. 133—156.
- А р н а у т о в В. И. Критерий псевдонормируемости топологических колец. — Алгебра и логика. Семинар, 1965, т. 4, вып. 4, стр. 3—24.
- А р х а н г е л ь с к и й А. В. О совпадении размерностей  $\dim G$  и  $\inf G$  для локально бикомпактных групп. — ДАН СССР, 1960, т. 132, № 5, стр. 980—981.
- Б а р а н о в и ч Т. М. Свободные разложения в пересечении примитивных классов алгебр. — Мат. сб., 1965, т. 67 (109), вып. 1, стр. 135—153.
- Б е л о у с о в В. Д. Ассоциативные в целом системы квазигрупп. — Мат. сб., 1961, т. 55 (97), вып. 2, стр. 221—236.
- Б е л о у с о в В. Д. О дистрибутивных системах операций. — Мат. сб., 1955, т. 36, вып. 3, стр. 479—500.
- Б е л о у с о в В. Д. Системы квазигрупп с обобщенными тождествами. — Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 1 (124), стр. 75—146.
- Б е р л и н к о в М. Л. Обобщенная сходимость и обобщенная компактность в структурах. — Мат. сб., 1961, т. 53 (95), вып. 3, стр. 233—260.
- Б е р м а н С. Д. Характеры линейных представлений конечных групп над произвольным полем. — Мат. сб., 1958, т. 44 (86), вып. 4, стр. 409—456.
- Б о в д и А. А. О скрещенных произведениях полугруппы и кольца. — ДАН СССР, 1961, т. 137, № 6, стр. 1267—1269.
- Б о в д и А. А. Скрещенные произведения полугруппы и кольца. — Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 3, стр. 481—499.
- Б о к у т ь А. А. Некоторые примеры колец без делителей нуля. — Алгебра и логика. Семинар, 1964, т. 3, вып. 5-6, стр. 5—28.
- Б о к у т ь А. А. Некоторые теоремы вложения для колец и полугрупп. — Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 3, стр. 500—518; № 4, стр. 729—743.
- Б о р е в и ч З. И. Мультипликативная группа регулярного локального поля с циклической группой операторов. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 3, стр. 707—712.

- Боревич З. И., Фаддеев Д. К. Теория гомологий в группах. Ч. 1.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 7, стр. 30—39; Ч. 2. О проективных резольвентах конечных групп.— Там же, 1959, № 7, стр. 72—87.
- Вагнер В. В. Представления упорядоченных полугрупп.— Мат. сб., 1956, т. 38 (80), вып. 2, стр. 202—240.
- Вагнер В. В. Теория обобщенных групп и обобщенных групп.— Мат. сб., 1953, т. 32 (74), вып. 3, стр. 545—632.
- Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра.— В кн.: Теория полугрупп и ее приложения. Изд-во Саратовск. ун-та, Саратов, 1965, стр. 3—178.
- Векслер А. И. Об условиях выполнимости принципа Архимеда в полуупорядоченных фактор-группах и фактор-линеалах.— Мат. сб., 1962, т. 57 (99), вып. 4, стр. 477—492.
- Виленкин Н. Я. Прямые разложения топологических групп.— Мат. сб., 1946, т. 19 (61), вып. 1, стр. 85—154; вып. 2, стр. 311—340; 1951, т. 29 (71), вып. 3, стр. 519—528.
- Виленкин Н. Я. Теория топологических групп. II.— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 4 (38), стр. 19—74.
- Виленкин Н. Я. Теория характеров топологических абелевых групп с заданной ограниченностью.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1951, т. 15, № 5, стр. 439—462.
- Виноградов А. А. О свободном произведении упорядоченных групп.— Мат. сб., 1949, т. 25 (67), вып. 1, стр. 163—168.
- Гайнов А. Т. Бинарно-лиевы алгебры низких рангов.— Алгебра и логика. Семинар, 1963, т. 2, вып. 4, стр. 21—40.
- Гайнов А. Т. Тожественные соотношения в бинарно-лиевых алгебрах.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 3 (75), стр. 141.
- Герчиков А. И. Кольца, разложимые в прямую сумму тел.— Мат. сб., 1940, т. 7 (49), вып. 3, стр. 591—597.
- Глускин Л. М. Идеалы полугрупп.— Мат. сб., 1961, т. 55 (97), вып. 4, стр. 421—448.
- Глускин Л. М. О плотных вложениях.— Мат. сб., 1963, т. 61 (103), вып. 2, стр. 175—206.
- Глускин Л. М. Позиционные оперативы.— Мат. сб., 1965, т. 68 (110), вып. 3, стр. 444—472.
- Глускин Л. М. Полугруппы изотопных преобразований.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 5 (101), стр. 157—162.
- Глускин Л. М. Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, № 6, стр. 841—870.
- Глушков В. М. К теории нильпотентных локально бикомпактных групп.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1956, т. 20, № 4, стр. 513—546.
- Глушков В. М. Локально бикомпактные группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп.— Укр. мат. журн., 1956, т. 8, № 2, стр. 135—139.
- Глушков В. М. Локально нильпотентные группы без кручения, полные над простыми топологическими полями.— Мат. сб., 1955, т. 37 (79), вып. 3, стр. 477—506.
- Глушков В. М. Локально нильпотентные локально бикомпактные группы.— Труды Моск. мат. о-ва, 1955, т. 4, стр. 291—332.
- Глушков В. М. О некоторых вопросах теории нильпотентных и локально нильпотентных групп.— Мат. сб., 1952, т. 30 (72), вып. 1, стр. 79—104.
- Глушков В. М. О строении связных локально бикомпактных групп.— Мат. сб., 1959, т. 48 (90), вып. 1, стр. 75—92.
- Глушков В. М. Строение локально бикомпактных групп и пятая проблема Гильберта.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 2 (74), стр. 3—41.
- Глушков В. М., Курош А. Г. Общая алгебра.— В кн.: Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 1. Физматгиз, М., 1959, стр. 151—200.
- Головин О. Н. Нильпотентные произведения групп.— Мат. сб., 1950, т. 27 (69), вып. 3, стр. 427—450.
- Головин О. Н. и Садовский Л. Е. О группах автоморфизмов свободных произведений.— Мат. сб., 1938, т. 4 (46), вып. 4, стр. 505—514.

- Головина Л. И. Коммутативные радикальные кольца.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, т. 14, № 5, стр. 449—472.
- Головина Л. И. Свободные разложения проективных плоскостей.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1945, т. 9, № 6, стр. 495—526.
- Голод Е. С. О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых  $p$ -группах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 2, стр. 273—276.
- Голод Е. С. и Шафаревич И. Р. О башне полей классов.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 2, стр. 261—272.
- Граев М. И. Изоморфизмы прямых разложений в дедекиндовых структурах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1947, т. 11, № 1, стр. 33—46.
- Граев М. И. О свободных произведениях топологических групп.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, т. 14, № 4, стр. 343—354.
- Граев М. И. Свободные топологические группы.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, т. 12, № 3, стр. 279—324.
- Граев М. И. Структурные изоморфизмы топологических абелевых групп.— Мат. сб., 1947, т. 20 (62), вып. 1, стр. 125—142.
- Граев М. И. Теория топологических групп. I.— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 2 (36), стр. 3—56.
- Грушко И. А. О базисах свободного произведения групп.— Мат. сб., 1940, т. 8 (50), вып. 1., стр. 169—182.
- Делоне Б. Н. К геометрии теории Галуа.— В кн.: Сборник, посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве. ГТТИ, М.—Л., 1940, стр. 52—62.
- Делоне Б. Н. и Фаддеев Д. К. Исследования по геометрии теории Галуа.— Мат. сб., 1944, т. 15 (57), вып. 2, стр. 243—284.
- Демушкин С. П. Группы максимального  $p$ -расширения локального поля.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 3, стр. 329—346.
- Демушкин С. П. и Шафаревич И. Р. Задача погружения для локальных полей.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, № 6, стр. 823—840.
- Дидидзе Ц. Е. Неассоциативные свободные суммы алгебр с объединенной подалгеброй.— Мат. сб., 1957, т. 43 (85), вып. 3, стр. 379—396.
- Дорофеев Г. В. Один пример к теории альтернативных колец.— Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 5, стр. 1049—1052.
- Дорофеев Г. В. Пример разрешимого, но не нильпотентного альтернативного кольца.— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 3(93), стр. 147—150.
- Елизаров В. П. О кольцах частных ассоциативных колец.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, т. 24, № 2, стр. 153—170.
- Елизаров В. П. Радикальное кольцо частных.— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 3, стр. 360—367.
- Елизаров В. П. Соотношения между обобщенными кольцами частных.— ДАН СССР, 1960, т. 135, № 2, стр. 252—254.
- Жмудь Э. М. О ядрах гомоморфизмов линейных представлений конечных групп.— Мат. сб., 1958, т. 44 (86), вып. 3, стр. 353—408.
- Завало С. Т. Операторные  $G$ -свободные группы.— Мат. сб., 1953, т. 33 (75), вып. 2, стр. 399—432.
- Завало С. Т. Операторные  $S$ -свободные группы.— Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 5, стр. 593—601.
- Зайцева М. И. Правоупорядоченные группы.— Уч. зап. Шуйск. пед. ин-та, 1958, т. 6, стр. 205—226.
- Зарецкий К. А. Представление упорядоченных полугрупп бинарными отношениями.— Изв. вуз. Мат., 1959, № 6, стр. 48—50.
- Жевлаков К. А. Ниль-радикал алгебры Мальцева.— Алгебра и логика. Семинар, 1965, т. 4, вып. 5, стр. 67—78.
- Жевлаков К. А. Радикальные идеалы альтернативного кольца.— Алгебра и логика. Семинар, 1965, т. 4, вып. 4, стр. 87—102.
- Жуков А. И. Неассоциативные свободные разложения алгебр с конечным числом образующих.— Мат. сб., 1950, т. 26 (68), вып. 3, стр. 471—478.
- Жуков А. И. Приведенные системы определяющих соотношений в неассоциативных алгебрах.— Мат. сб., 1950, т. 27 (69), вып. 2, стр. 267—280.

- Ивановский Л. И. Об одной гипотезе П. С. Александрова. — ДАН СССР, 1958, т. 129, № 12, стр. 785—786.
- Инасаридзе Х. Н. К теории расширений в категориях. — Сообщ. АН ГрузССР, 1963, т. 30, № 5, стр. 537—544.
- Канторович Л. В. О полуупорядоченных пространствах. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1937, № 4, стр. 91—110.
- Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. ГИТТЛ, М.—Л., 1950, 548 с.
- Каргаполов М. И. Вполне доупорядочиваемые группы. — Алгебра и логика. Семинар, 1962, т. 1, вып. 2, стр. 16—21.
- Каргаполов М. И., Кокорин А. И., Копытов В. М. К теории упорядочиваемых групп. — Алгебра и логика. Семинар, 1965, т. 4, вып. 6, стр. 21—27.
- Каролинская Л. Н. Структуры конгруэнций на дистрибутивных структурах. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 5, стр. 1037—1054.
- Келдыш Л. В. Некоторые теоремы о топологическом вложении. — General topology and its relations to modern Analysis and Algebra. Proc. Symp. in Prague, 1961. Prague, 1962, p. 230—234.
- Когаловский С. Р. Об универсальных классах алгебр, замкнутых относительно прямых произведений. — Изв. вуз. Мат., 1959, № 3 (10), стр. 88—96.
- Когаловский С. Р. Структурные характеристики универсальных классов. — Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 1, стр. 97—119.
- Кокорин А. И., Копытов В. М. О некоторых классах упорядоченных групп. — Алгебра и логика. Семинар, 1962, т. 1, вып. 3, стр. 21—23.
- Конторович П. Г. Группы с базисом расщепления. — Мат. сб., 1943, т. 12 (54), вып. 1, стр. 56—70; 1946, т. 19 (61), вып. 2, стр. 287—308; 1948, т. 22 (64), вып. 1, стр. 79—100; 1950, т. 26 (68), вып. 2, стр. 311—320.
- Конторович П. Г., Плоткин Б. И. Структуры с аддитивным базисом. — Мат. сб., 1954, т. 35 (77), вып. 1, стр. 187—192.
- Кострикин А. И. Алгебры Ли и конечные группы. — Proc. of the International Congr. of math. (15—22 august 1962, Djursholm). Inst. Mittag-Leffler, 1963, p. 264—269.
- Кострикин А. И. Об однородных алгебрах Ли. — Изв. АН СССР, 1965, т. 29, № 2, стр. 471—484.
- Кострикин А. И. О высоте простых алгебр Ли. — ДАН СССР, 1965, т. 162, № 5, стр. 992—994.
- Кострикин А. И. О проблеме Бернсайда. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, № 1, стр. 3—34.
- Кострикин А. И. О простых  $p$ -алгебрах Ли. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1961, т. 64, стр. 79—89.
- Кострикин А. И. О сильной вырожденности простых  $p$ -алгебр Ли. — ДАН СССР, 1963, т. 150, № 2, стр. 248—250.
- Кузьминов В. И. О гипотезе П. С. Александрова в теории топологических групп. — ДАН СССР, 1959, т. 125, № 11, стр. 727—729.
- Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности. — Мат. сб., 1941, т. 9 (51), вып. 1, стр. 165—182; 1945, т. 16 (58), вып. 2, стр. 129—162.
- Курочкин В. М. Кольца с условием минимальности для присоединенных идеалов. — ДАН СССР, 1949, т. 66, № 4, стр. 549—551.
- Курочкин В. М. К теории локально простых и локально нормальных алгебр. — Мат. сб., 1948, т. 22 (64), вып. 3, стр. 443—454.
- Курочкин В. М. Расщепление алгебр в полупрямую сумму радикала и полупростой подалгебры. — Уч. зап. Моск. ун-та. Мат., 1951, т. 148, № 4, стр. 192—203.
- Курош А. Г. Алгебра II (группы, кольца, структуры). — В кн.: Математика в СССР за 30 лет. 1917—1947. ГИТТЛ, М., 1948, стр. 106—133.
- Курош А. Г. Изоморфизмы прямых разложений. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1943, т. 7, № 4, стр. 185—202; 1946, т. 10, № 1, стр. 47—72.
- Курош А. Г. К теории локально простых и локально центральных алгебр. — Укр. мат. журн., 1951, т. 3, № 2, стр. 205—210.

- К у р о ш А. Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр.— Мат. сб., 1947, т. 20 (62), вып. 2, стр. 239—262.
- К у р о ш А. Г. Неассоциативные свободные суммы алгебр.— Мат. сб., 1955, т. 37 (79), вып. 2, стр. 251—264.
- К у р о ш А. Г. Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1941, т. 5, № 5, стр. 233—247.
- К у р о ш А. Г. Прямые разложения в алгебраических категориях.— Труды Моск. мат. о-ва, 1959, т. 8, стр. 391—412; 1960, т. 9, стр. 562.
- К у р о ш А. Г. Пути развития и некоторые очередные проблемы теории бесконечных групп.— Усп. мат. наук, 1937, т. 2, вып. 3 (19), стр. 5—15.
- К у р о ш А. Г. Радикалы в теории групп.— ДАН СССР, 1961, т. 141, № 4, стр. 789—791.
- К у р о ш А. Г. Радикалы колец и алгебр.— Мат. сб., 1953, т. 33 (75), вып. 1, стр. 13—26.
- К у р о ш А. Г. Свободные суммы мультиоператорных алгебр.— Сиб. мат. журн., 1960, т. 1, № 1, стр. 62—70.
- К у р о ш А. Г. Силовские подгруппы нульмерных топологических групп.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1945, т. 9, № 2, стр. 65—78.
- К у р о ш А. Г. Теория групп. ГИТТЛ, М., 1944, 372 с.; Изд. 2-е. ГИТТЛ, М., 1953, 468 с.
- К у р о ш А. Г., Л и в ш и ц А. Х., Ш у л ь г е й ф е р Е. Г. Основы теории категорий.— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 6 (69), стр. 3—52.
- К у р о ш А. Г. и Ч е р н и к о в С. Н. Разрешимые и нильпотентные группы.— Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 3 (19), стр. 18—59.
- К у т ь е в К. М. О  $PS$ -изоморфизме некоторых классов  $R$ -групп.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, т. 27, № 4, стр. 701—722.
- Л а т ы ш е в В. Н. Об алгебрах с тождественными соотношениями.— ДАН СССР, 1962, т. 146, № 5, стр. 1003—1006.
- Л е с о х и н М. М. Некоторые свойства обобщенных характеров полугрупп.— Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, т. 183, стр. 277—286.
- Л и в ч а к Я. Б. Локальные теоремы для разрешимых структур с умножением.— Мат. зап. Уральск. ун-та, 1961, т. 3, № 1, стр. 54—66.
- Л и в ш и ц А. Х. Прямые разложения в алгебраических категориях.— Труды Моск. мат. о-ва, 1960, т. 9, стр. 129—141.
- Л и в ш и ц А. Х. Прямые разложения вполне дедекиндовых структур.— Мат. сб., 1951, т. 28 (70), вып. 3, стр. 481—502.
- Л и в ш и ц А. Х. Прямые разложения идемпотентов в полугруппах.— Труды Моск. мат. о-ва, 1962, т. 11, стр. 37—98.
- Л и в ш и ц А. Х. Прямые разложения с неразложимыми слагаемыми в алгебраических категориях.— Мат. сб., 1960, т. 51 (93), вып. 4, стр. 427—458.
- Л и в ш и ц А. Х. Теоретико-категорные основы двойственности, радикальности и полупростоты.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 2, стр. 319—336.
- Л и в ш и ц А. Х., Ц а л е н к о М. С., Ш у л ь г е й ф е р Е. Г. Многообразие в категориях.— Мат. сб., 1964, т. 63 (105), вып. 4, стр. 554—581.
- Л и п к и н а З. С. О псевдонормируемости топологических колец.— Сиб. мат. журн., 1965, т. 6, № 5, стр. 1045—1052.
- Л я п и н Е. С. Абстрактная характеристика некоторых полугрупп преобразований.— Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1953, т. 89, стр. 5—30.
- Л я п и н Е. С. Нормальные комплексы ассоциативных систем.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, т. 14, № 2, стр. 179—192.
- Л я п и н Е. С. О представлениях полугрупп частичными преобразованиями.— Мат. сб., 1960, т. 52 (94), вып. 1, стр. 589—596.
- Л я п и н Е. С. Полугруппы. Физматгиз, М., 1960, 592 с.
- Л я п и н Е. С. Соотношения, определяющие упорядоченность в полугруппах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 5, стр. 671—684.
- М а л ь ц е в А. И. Аналитические лупы.— Мат. сб., 1955, т. 36 (78), вып. 3, стр. 569—576.
- М а л ь ц е в А. И. Квазипрimitивные классы абстрактных алгебр.— ДАН СССР, 1956, т. 108, № 2, стр. 187—189.

- М а л ь ц е в А. И. К общей теории алгебраических систем.— Мат. сб., 1954, т. 35 (77), вып. 1, стр. 3—20.
- М а л ь ц е в А. И. Нильпотентные группы без кручения.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 3, стр. 201—212.
- М а л ь ц е в А. И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями.— Мат. сб., 1950, т. 26 (68), вып. 1, стр. 19—33.
- М а л ь ц е в А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами.— Мат. сб., 1940, т. 8 (50), вып. 3, стр. 405—422.
- М а л ь ц е в А. И. Об одном классе однородных пространств.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 1, стр. 9—32.
- М а л ь ц е в А. И. Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп.— Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та. Физ.-мат. ф-т, 1941, т. 1, вып. 1, стр. 3—9.
- М а л ь ц е в А. И. Об одном представлении неассоциативных колец.— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, № 1 (47), стр. 181—185.
- М а л ь ц е в А. И. Об упорядоченных группах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 6, стр. 473—482.
- М а л ь ц е в А. И. О включении ассоциативных систем в группы.— Мат. сб., 1939, т. 6 (48), вып. 2, стр. 331—336; 1940, т. 8 (50), вып. 2, стр. 251—264.
- М а л ь ц е в А. И. О включении групповых алгебр в алгебры с делением.— ДАН СССР, 1948, т. 60, № 9, стр. 1499—1501.
- М а л ь ц е в А. И. О гомоморфизмах на конечные группы.— Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1958, т. 18, стр. 49—60.
- М а л ь ц е в А. И. О доупорядочении групп.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, т. 38, стр. 173—175.
- М а л ь ц е в А. И. О локальных и полных топологических группах.— ДАН СССР, 1941, т. 32, № 9, стр. 606—608.
- М а л ь ц е в А. И. О некоторых классах бесконечных разрешимых групп.— Мат. сб., 1951, т. 28 (70), вып. 3, стр. 567—588.
- М а л ь ц е в А. И. Определяющие соотношения в категориях.— ДАН СССР, 1958, т. 119, № 6, стр. 1095—1098.
- М а л ь ц е в А. И. О разложении алгебры в прямую сумму радикала и полупростой подалгебры.— ДАН СССР, 1942, т. 36, № 1, стр. 46—50.
- М а л ь ц е в А. И. О разрешимых алгебрах Ли.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1945, т. 9, № 5, стр. 329—356.
- М а л ь ц е в А. И. Свободные топологические алгебры.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 2, стр. 171—198.
- М а л ь ц е в А. И. Топологическая алгебра и группы Ли.— В кн.: Математика в СССР за 30 лет. 1917—1947. ГИТТЛ, М.—Л., 1948, стр. 134—159.
- М а л ь ц е в А. И. Топологические разрешимые группы.— Мат. сб., 1946, т. 19 (61), вып. 1, стр. 165—174.
- М а р к о в А. А. О безусловно замкнутых множествах.— ДАН СССР, 1944, т. 44, № 5, стр. 196—197.
- М а р к о в А. А. О свободных топологических группах.— ДАН СССР, 1941, т. 31, № 4, стр. 299—302.
- М а р к о в А. А. О существовании периодических связанных топологических групп.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1944, т. 8, № 6, стр. 299—302.
- М а х а р а д з е Л. М. Топологические нильпотентные кольца с условием минимальности.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 4 (76), стр. 181—186.
- М е л е н ц о в А. А. Разрезы в связанных топологических группах.— Укр. мат. журн., 1956, т. 8, № 3, стр. 289—298.
- М и л ь м а н Д. П. Нормируемость топологических колец.— ДАН СССР, 1945, т. 47, № 3, стр. 166—168.
- М о ч у л ь с к и й Е. Н. Прямые разложения в структурах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 6, стр. 717—748; 1962, т. 26, № 2, стр. 161—210.
- М о ч у л ь с к и й Е. Н. Прямые разложения дедекиндовых структур.— Мат. сб., 1955, т. 37 (79), вып. 1, стр. 89—102.
- М о р о з о в В. В. О некоторых вопросах проблемы резольвент.— Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, т. 114, стр. 173—187.

- Морозов В. В. О примитивных группах.— Мат. сб., 1939, т. 5 (47), вып. 2, стр. 355—390.
- Морозов В. В. О примитивных группах в трех переменных.— В кн.: Сборник, посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве. ГТТИ, М.—Л., 1940, стр. 193—212.
- Морозов В. В. О примитивных группах в четырех переменных.— Труды Казанск. ин-та инж. коммунал. строит., 1938, т. 5, стр. 3—30.
- Морозов В. В. Определение систем импримитивности конечных непрерывных групп.— Уч. зап. Казанск. ун-та, 1930, т. 90, № 6, стр. 969—976.
- Мягкова Н. Н. О группах конечного ранга.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 5, стр. 495—512.
- Новиков П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1955, т. 44, стр. 3—143.
- Пасынков Б. А. О совпадении различных определений размерности для локально бикомпактных групп.— ДАН СССР, 1960, т. 132, № 5, стр. 1035—1037.
- Пасынков Б. А. О совпадении различных определений размерности для фактор-пространств локально бикомпактных групп.— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 5 (107), стр. 129—135.
- Петропавловская Р. В. Структурные изоморфизмы свободных ассоциативных систем.— Мат. сб., 1951, т. 28 (70), вып. 3, стр. 589—602.
- Пинскер А. Г. Разложение полуупорядоченных групп и пространств.— Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1949, т. 86, стр. 235—315.
- Платонов В. П. Локально проективно-нильпотентные топологические группы с нормализаторным условием.— ДАН БССР, 1965, т. 8, № 12, стр. 767—771.
- Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. «Наука», М., 1966, 603 с.
- Плоткин Б. И. Обобщенные разрешимые обобщенные nilпотентные группы.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 4 (82), стр. 89—172.
- Поддерюгин В. Д. Условие упорядочиваемости произвольного кольца.— Усп. мат. наук, 1954, т. 9, вып. 4 (62), стр. 211—216.
- Понизовский И. С. О матричных представлениях ассоциативных систем.— Мат. сб., 1956, т. 38 (80), вып. 2, стр. 241—260.
- Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. ГТТИ, М., 1954, 516 с.
- Понтрягин Л. С. Структура непрерывных групп.— Труды Второго Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 24—30 июня 1934 г.), 1936, т. 2, стр. 237—257.
- Пестников М. М. Теория Галуа. Физматгиз, М., 1963, 218 с.
- Райков Д. А. Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1945, т. 14, стр. 3—86.
- Райков Д. А. О пополнении топологических групп.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946, т. 10, № 6, стр. 513—528.
- Рябухин Ю. М. О наднильпотентных и специальных радикалах.— В кн.: Исследования по алгебре и математическому анализу. «Карта Молдовеняскэ», Кишинев, 1965, стр. 65—72.
- Рябухин Ю. М. Радикалы в категориях.— Изв. АН МССР, 1964, № 6, стр. 58—74.
- Садовский Л. Е. О структурных изоморфизмах свободных произведений групп.— Мат. сб., 1947, т. 21 (63), вып. 1, стр. 63—82.
- Садовский Л. Е. Проектирования и изоморфизмы nilпотентных групп.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, т. 29, № 1, стр. 171—208.
- Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4.— Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат., 1940, т. 10, стр. 166—170.
- Скляренко Е. Г. О топологическом строении локально бикомпактных групп и их фактор-пространств.— Мат. сб., 1963, т. 60 (102), вып. 1, стр. 63—88.
- Скляренко Е. Г. О топологическом строении фактор-пространств локально бикомпактных групп.— ДАН СССР, 1961, т. 141, № 4, стр. 811—813.



- Скорняков Л. А. Альтернативные тела.— Укр. мат. журн., 1950, т. 2, № 1, стр. 70—85.
- Скорняков Л. А. Альтернативные тела характеристики 2 и 3.— Укр. мат. журн., 1950, т. 2, № 3, стр. 94—99.
- Скорняков Л. А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца (современные проблемы математики). Физматгиз, М., 1961, 197 с.
- Скорняков Л. А. К теории альтернативных тел.— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 5 (39), стр. 160—162.
- Скорняков Л. А. Локально бикомпактные бирегулярные кольца.— Мат. сб., 1963, т. 62 (104), вып. 1, стр. 3—13.
- Скорняков Л. А. Натуральные тела веблен-веддербарновой проективной плоскости.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 5, стр. 447—472.
- Скорняков Л. А. По поводу заметки «К теории альтернативных тел».— Усп. мат. наук, 1954, т. 9, вып. 2 (60), стр. 185—188.
- Скорняков Л. А. Правоальтернативные тела.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1951, т. 15, № 2, стр. 177—184.
- Скорняков Л. А. Представление неассоциативных колец в ассоциативные.— ДАН СССР, 1955, т. 102, № 1, стр. 33—35.
- Скорняков Л. А. Проективные плоскости.— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 6 (46), стр. 116—154.
- Скорняков Л. А. Топологические проективные плоскости.— Труды Моск. мат. о-ва, 1954, т. 3, стр. 347—373.
- Смирнов Д. М. Упорядоченные мультиоператорные группы.— Сиб. мат. журн., 1965, т. 6, № 2, стр. 433—458.
- Соркин Ю. И. Независимые системы аксиом, определяющие структуру.— Укр. мат. журн., 1951, т. 3, № 1, стр. 85—97.
- Соркин Ю. И. О вложении структуроидов и структур.— ДАН СССР, 1954, т. 95, № 5, стр. 931—934.
- Соркин Ю. И. Свободные объединения структур.— Мат. сб., 1952, т. 30 (72), вып. 3, стр. 677—694.
- Стеллецкий И. В. Нильпотентные структуры.— Труды Моск. мат. о-ва, 1960, т. 9, стр. 211—235.
- Супруненко Д. А. О периодических линейных группах.— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 1, стр. 87—94.
- Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Изд-во Белорусск. ун-та, Минск, 1958, 94 с.
- Сушкевич А. К. Теория обобщенных групп. ОНТИ, Хрк.—К., 1937, 176 с.
- Тайцлин М. А. Об элементарных теориях коммутативных полугрупп с сокращением.— Алгебра и логика. Семинар, 1966, т. 5, вып. 1, стр. 51—69.
- Тайцлин М. А. О финитной аппроксимируемости  $\Omega$ -групп.— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 1, стр. 95—102.
- Тартаковский В. А. Метод решета в теории групп.— Мат. сб., 1949, т. 25 (67), вып. 1, стр. 3—50.
- Тартаковский В. А. Применение метода решета к решению проблемы тождества в некоторых типах групп.— Мат. сб., 1949, т. 25 (67), вып. 2, стр. 251—274.
- Терехов А. А. Об алгебрах с совпадающими прямыми и свободными произведениями.— Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1958, т. 18, стр. 61—66.
- Терехов А. А. Структура локально разрешимых вполне доупорядочиваемых групп.— Алгебра и логика. Семинар, 1962, т. 1, № 2, стр. 10—15.
- Тихомиров А. И. Новое доказательство одной теоремы о простых кольцах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1944, т. 8, № 2, стр. 139—142.
- Тихомиров А. И. Обобщение теоремы Мальцева о расщепленных алгебрах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1947, т. 11, № 1, стр. 47—58.
- Тихомиров А. И. Одно обобщение понятия скрещенного произведения.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1941, т. 5, № 6, стр. 297—304.
- Труды Семинара по теории групп (к двадцатипятилетию акад. О. Ю. Шмидта). ГОНТИ НКТП СССР, М., 1938.
- Узков А. И. Абстрактное обоснование брандтовой теории идеалов.— Мат. сб., 1939, т. 6 (48), вып. 2, стр. 263—282.

- У з к о в А. И. О кольцах частных коммутативных колец.— Мат. сб., 1948, т. 22 (64), вып. 3, стр. 439—441.
- У з к о в А. И. О теореме Jordan'a—Hölder'a.—Мат. сб., 1938, т. 4 (46), вып. 1, стр. 31—43.
- У ш а к о в В. И. Топологические группы, близкие к бикompактным.— Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 3, стр. 689—694.
- У ш а к о в В. И. Топологические группы  $\overline{FC}$ -группы.— Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 5, стр. 1162—1174.
- У ш а к о в В. И. Топологические группы с нормализаторным условием для замкнутых подгрупп.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, т. 27, № 4, стр. 943—948.
- Ф а д д е е в Д. К. К строению приведенной мультипликативной группы циклического расширения локального поля.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, т. 24, № 2, стр. 145—152.
- Ф а д д е е в Д. К. Простые алгебры над полем алгебраических функций от одной переменной.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, т. 38, стр. 321—344.
- Ф р е й д м а н П. А. О некоторых условиях конечности в ассоциативных кольцах.— Мат. зап. Уральск. ун-та, 1961, т. 3, № 1, стр. 77—84.
- Ф р е н к е л ь В. И. Об эффективной частичной упорядочиваемости конечно определенных групп.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 3, стр. 651—670.
- Х и о н Я. В. Архимедовски упорядоченные кольца.— Усп. мат. наук, 1954, т. 9, вып. 4 (62), стр. 237—242.
- Х и о н Я. В. Кольца, нормированные с помощью полугрупп.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 3, стр. 311—328.
- Х и о н Я. В. Упорядоченные ассоциативные кольца.— ДАН СССР, 1955, т. 101, № 6, стр. 1005—1007.
- Х и о н Я. В. Упорядоченные полугруппы.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 2, стр. 209—222.
- Х и о н Я. В.  $\Omega$ -кольцоиды,  $\Omega$ -кольца и их представления.— Труды Моск. мат. о-ва, 1965, т. 14, стр. 3—47.
- Ц а л е н к о М. С. Пополнение категорий свободными и прямыми объединениями объектов.— Мат. сб., 1963, т. 60 (102), вып. 2, стр. 235—256.
- Ц а л е н к о М. С. Правильные объединения и специальные подпрямые суммы в категориях.— Мат. сб., 1962, т. 57 (99), вып. 1, стр. 75—94.
- Ч а р и н В. С. О группах конечного ранга. I.— Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 2, стр. 212—219.
- Ч а р и н В. С. О локально бикompактных локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности.— Сиб. мат. журн., 1960, т. 1, № 1, стр. 139—151.
- Ч а р и н В. С. О некоторых классах локально бикompактных групп с условием максимальности для абелевых подгрупп.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 2, стр. 438—458.
- Ч а р и н В. С. О разрешимых группах типа  $A_3$ .— Мат. сб., 1961, т. 54 (96), вып. 4, стр. 489—499.
- Ч а р и н В. С. О разрешимых группах типа  $A_4$ .— Мат. сб., 1960, т. 52 (94), вып. 3, стр. 895—914.
- Ч е б о т а р е в Н. Г. Задача, обратная задаче Чирнгаузена.— В кн.: Ч е б о т а р е в Н. Г. Собр. соч. Т. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949, стр. 5—13.
- Ч е б о т а р е в Н. Г. Исследования об относительно абелевых числовых полях.— Там же, стр. 141—171.
- Ч е б о т а р е в Н. Г. К теории групп поля классов.— Там же, стр. 121—140.
- Ч е б о т а р е в Н. Г. Обобщение теоремы Минковского.— Там же, стр. 66—70.
- Ч е б о т а р е в Н. Г. О квадратуемых луночках. I.— Там же, стр. 193—207.
- Ч е б о т а р е в Н. Г. О клейн-гильбертовой проблеме резольвент.— Там же, стр. 282—304.
- Ч е б о т а р е в Н. Г. Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок.— Там же, стр. 27—65.

- Чеботарев Н. Г. Основы теории Галуа. Ч. 1. ОНТИ ГТТИ, Л.—М., 1934, 224 с. Ч. 2. ОНТИ, Л.—М., 1937, 158 с.
- Чеботарев Н. Г. Проблемы резольвент.— В кн.: Чеботарев Н. Г. Собр. соч. Т. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949, стр. 327—340.
- Чеботарев Н. Г. Проблема резольвент и критические многообразия.— Там же, стр. 305—326.
- Чеботарев Н. Г. Проблемы современной теории Галуа.— В кн.: Чеботарев Н. Г. Собр. соч. Т. 3. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950, стр. 5—46.
- Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. Гостехиздат, ОГИЗ, М.—Л., 1948, 396 с.
- Черемисин А. И. Вполне упорядочиваемые кольца.— Алгебра и логика. Семинар, 1965, т. 4, вып. 6, стр. 29—46.
- Черников С. Н. Бесконечные локально разрешимые группы.— Мат. сб., 1940, т. 7 (49), вып. 1, стр. 35—64.
- Черников С. Н. Бесконечные специальные группы.— Мат. сб., 1939, т. 6 (48), вып. 2, стр. 199—214.
- Черников С. Н. О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп.— Мат. сб., 1951, т. 28 (70), вып. 1, стр. 119—129.
- Черников С. Н. Условия конечности в общей теории групп.— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 5 (89), стр. 45—96.
- Чунихин С. А. Об одном общем способе получения подгрупп у конечных групп.— Изв. высш. уч. завед. Мат., 1960, № 1, стр. 227—233.
- Чунихин С. А. О некоторых направлениях в развитии теории конечных групп за последние годы.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 4 (100), стр. 31—50.
- Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. «Наука и техника», Минск, 1964, 157 с.
- Шайн Б. М. Вмещение полугрупп в обобщенные группы.— Мат. сб., 1961, т. 55 (97), вып. 4, стр. 379—400.
- Шайн Б. М. Представление полугрупп при помощи бинарных отношений.— Мат. сб., 1963, т. 60 (102), вып. 3, стр. 293—303.
- Шафаревич И. Р. Комментарии к работе Чеботарева «О плотности».— В кн.: Чеботарев Н. Г. Собр. соч. Т. 3. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950, стр. 81—91.
- Шафаревич И. Р. Общий закон взаимности.— Мат. сб., 1950, т. 26 (68), вып. 1, стр. 113—146.
- Шафаревич И. Р. О задаче погружения полей.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, т. 18, № 5, стр. 389—418.
- Шафаревич И. Р. О нормируемости топологических полей.— ДАН СССР, 1943, т. 40, № 4, стр. 179—181.
- Шафаревич И. Р. О построении полей с заданной группой Галуа порядка  $l^{\alpha}$ .— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, т. 18, № 3, стр. 261—296.
- Шафаревич И. Р. О  $p$ -расширениях.— Мат. сб., 1947, т. 20 (62), вып. 2, стр. 351—362.
- Шафаревич И. Р. Построение полей алгебраических чисел с заданной разрешимой группой Галуа.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, т. 18, № 6, стр. 525—578.
- Шеврин Л. Н. К общей теории полугрупп.— Мат. сб., 1961, т. 53 (95), вып. 3, стр. 367—368.
- Шеврин Л. Н. О подполугруппах свободных полугрупп.— ДАН СССР, 1960, т. 133, № 3, стр. 537—539.
- Шеврин Л. Н. О структурных свойствах полугрупп.— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, стр. 446—470.
- Шимбирева Е. П. К теории частично упорядоченных групп.— Мат. сб., 1947, т. 20 (62), вып. 1, стр. 145—178.
- Ширшов А. И. Некоторые вопросы теории колец, близких к ассоциативным.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 6 (84), стр. 3—20.
- Ширшов А. И. Некоторые теоремы о вложении для колец.— Мат. сб., 1956, т. 40 (82), вып. 1, стр. 65—72.

- Ширшов А. И. О базах свободной алгебры Ли.— Алгебра и логика. Семинар, 1962, т. 1, № 1, стр. 14—19.
- Ширшов А. И. О кольцах с тождественными соотношениями.— Мат. сб., 1957, т. 43 (85), вып. 2, стр. 277—283.
- Ширшов А. И. О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах.— Мат. сб., 1957, т. 41 (83), вып. 3, стр. 381—394.
- Ширшов А. И. О свободных кольцах Ли.— Мат. сб., 1958, т. 45 (87), вып. 2, стр. 113—122.
- Ширшов А. И. О специальных  $J$ -кольцах.— Мат. сб., 1956, т. 38 (80), вып. 2, стр. 149—166.
- Ширшов А. И. Подалгебры свободных лиевых алгебр.— Мат. сб., 1953, т. 33 (75), вып. 2, стр. 441—452.
- Ширшов А. И. Подалгебры свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр.— Мат. сб., 1954, т. 34 (76), вып. 1, стр. 81—88.
- Шмелькин А. Л. Нильпотентные произведения и нильпотентные группы без кручения.— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 4, стр. 625—640.
- Шмелькин А. Л. О разрешимых произведениях групп.— Сиб. мат. журн., 1965, т. 6, № 1, стр. 212—220.
- Шмелькин А. Л. Сплетения и многообразия групп.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, т. 29, № 1, стр. 149—170.
- Шмидт О. Ю. Абстрактная теория групп. К., 1916, 214 с. Изд. 2-е, М.—Л., 1933, 179 с.
- Шнейдмюллер В. И. Алгебры бесконечного ранга с условием минимальности для подалгебр.— ДАН СССР, 1952, т. 86, № 4, стр. 665—668.
- Шнейдмюллер В. И. Бесконечные кольца с конечными убывающими цепями подколец.— Мат. сб., 1950, т. 27 (69), вып. 2, стр. 219—228.
- Шнеперман Л. Б. Полугруппы непрерывных преобразований метрических пространств.— Мат. сб., 1963, т. 61 (103), вып. 3, стр. 306—318.
- Шульгейфер Е. Г. К общей теории радикалов в категориях.— Мат. сб., 1960, т. 51 (93), вып. 4, стр. 487—500.
- Шульгейфер Е. Г. Мультипликативная теория присоединенных идеалов в коммутативных кольцах.— ДАН СССР, 1949, т. 64, № 5, стр. 633—636.
- Шульгейфер Е. Г. О правильных вложениях категорий.— Мат. сб., 1963, т. 61 (103), вып. 4, стр. 467—503.
- Шульгейфер Е. Г. О структуре идеалов объекта категории.— Мат. сб., 1961, т. 54 (96), вып. 2, стр. 209—224; 1963, т. 62 (104), вып. 3, стр. 335—344.
- Шульгейфер Е. Г. Разложение на простые множители в структурах с умножением.— Укр. мат. журн., 1950, т. 2, № 3, стр. 100—114.
- Шутов Э. Г. Потенциальная делимость элементов в полугруппах.— Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, т. 166, стр. 75—103.
- Яковлев А. В. Задача погружения полей.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 3, стр. 645—660.
- Dietzmann A. P., Kurosch A., Uzkow A. I. Sylowsche Untergruppen von unendlichen Gruppen.— Мат. сб., 1938, т. 3 (45), вып. 1, стр. 179—185.
- Gantmacher F. Canonical representation of automorphisms of a complex semisimple Lie group.— Мат. сб., 1939, т. 5 (47), вып. 1, стр. 101—146.
- Gantmacher F. Sur la representation canonique de substitutions isomorphiques d'un groupe semisimple complexe de Lie.— Comptes Rendus Acad. Sci., 1938, t. 207, p. 208—210.
- Gantmacher F. On the classification of real simple Lie groups.— Мат. сб., 1939, т. 5 (47), вып. 2, стр. 217—249.
- Gelfand I. Normierte Ringe.— Мат. сб., 1941, т. 9 (51), вып. 1, стр. 3—24.
- Glivenko V. Contribution à l'étude des systèmes choses normées.— Amer. Journ. of Math., 1937, v. 59, fasc. 4, p. 941—956.
- Glivenko V. Géométrie des systèmes de choses normées.— Amer. Journ. of Math., 1936, v. 58, fasc. 3, p. 799—828.
- Kaloujnine L. Sur quelques propriétés des groupes d'automorphismes d'un groupe abstrait.— Comptes Rendus Acad. Sci., 1950, t. 230, N 24, p. 2067—2069.

- Kantorovich L. Lineare halbgeordnete Räume.— *Mat. сб.*, 1937, т. 2 (44), вып. 2, стр. 121—168.
- Kolmogoroff A. Zur Begründung der projektiven Geometrie.— *Ann. of Math.* 1932., second ser., v. 33, N 1, p. 175—176.
- Kolmogoroff A. Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes.— *Studia math.*, 1934, t. 5, p. 29—33.
- Kolmogoroff A. Zur topologisch-gruppentheoretischen Begründung der Geometrie.— *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math. Phys. Kl.*, 1930, H. 2, S. 208—210.
- Kolmogoroff A. Über offene Abbildungen.— *Ann. of Math.*, second ser., 1937, v. 38, N 1, p. 36—38.
- Kulakoff A. Über die Anzahl der eigentlichen Untergruppen und der Elementen von gegebener Ordnung in  $p$ -Gruppen.— *Math. Ann.*, 1930, Bd 104, S. 778—793.
- Kurosch A. Durchschnittsdarstellungen mit irreduziblen Komponenten in Ringen und sogenannten Dualgruppen.— *Mat. сб.*, 1935, т. 42, вып. 5, стр. 613—616.
- Kurosh A. Direct decomposition of simple rings.— *Mat. сб.*, 1942, т. 11 (53), вып. 3, стр. 254—256.
- Kurosh A. Primitive torsionsfreie Abelsche Gruppen vom endlichen Range.— *Ann. of Math.*, 1937, v. 38, N 1, p. 175—203.
- Kurosch A. Zur Zerlegung unedlicher Gruppen.— *Math. Ann.*, 1932, Bd 106, S. 107—113.
- Malcev A. On the immersion of an algebraic ring into a field.— *Math. Ann.*, 1937, Bd 113, S. 686—691.
- Malcev A. On the theory of the Lie groups in the large.— *Mat. сб.*, 1945, т. 16 (58), вып. 1, стр. 163—190.
- Pontrjagin L. The theory of topological commutative groups.— *Ann. of Math.*, 1934, second ser., v. 35, N 2, p. 361—388.
- Pontrjagin L. Sur le groupes abeliens continus.— *Comptes Rendus Acad. Sci.*, 1934, t. 198, p. 328—330.
- Pontrjagin L. Sur les groupes topologiques compacts et le cinquième problème de M. Hilbert.— *Comptes Rendus Acad. Sci.*, 1934, t. 198, p. 238—240.
- Pontrjagin L. Über stetige algebraische Körper.— *Ann. of Math.*, 1932, second ser., v. 33, N 1, p. 163—174.
- Schein B. M. Relation algebras.— *Bull. Acad. polon. sci., ser. math., astron. et phys.*, 1965, v. 13, N 1, p. 1—5.
- Schreier O. Abstrakte Kontinuierliche Gruppen.— *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 1925, Bd 4, S. 15—32.
- Suschkewitsch A. Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Unterbarkeit.— *Math. Ann.*, 1928, Bd 99, N 1-2, S. 30—50.
- Sushkewich A. On a generalisation of the associative law.— *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1929, v. 31, p. 204—214.
- Uzkow A. I. Zur Idealtheorie der Kommutativen Ringe. I.— *Mat. сб.*, 1939, т. 5 (47), вып. 3, стр. 513—520.

## К главе VII. Дифференциальная геометрия

- Акивис М. А. К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей.— *Mat. сб.*, 1961, т. 53 (95), вып. 1, стр. 53—72.
- Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М.—Л., 1948, 387 с.
- Александров А. Д. Выпуклые многогранники. Гостехиздат, М.—Л., 1950, 428 с.
- Александров А. Д. Геометрия и топология в Советском Союзе.— *Усп. мат. наук*, 1947, т. 2, вып. 4 (20), стр. 3—58.
- Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. Ч. 1—4.— *Mat. сб.*, 1937, т. 2 (44), вып. 5, стр. 947—970; вып. 6, стр. 1205—1238; 1938, т. 3 (45), вып. 1, стр. 26—46; вып. 2, стр. 227—251.
- Александров А. Д. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». Ч. 1—7.— *Вестн. Ленингр. ун-та*, 1956, № 19, вып. 4, стр. 5—17; 1957, № 7,

- вып. 2, стр. 15—44; 1958, № 7, вып. 2, стр. 14—26; № 13, вып. 3, стр. 27—34; № 19, вып. 4, стр. 5—8; 1959, № 1, вып. 1, стр. 5—14; 1960, № 7, вып. 2, стр. 5—14.
- Александров А. Д., Залгаллер В. А. Двумерные многообразия ограниченной кривизны. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1962, т. 63, 262 с.
- Базылев В. Т. Квазилапласовы преобразования  $p$ -мерных поверхностей  $n$ -мерного проективного пространства. — Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1955, т. 35, стр. 261—322.
- Бакельман М. Я. Геометрические методы решения эллиптических уравнений. «Наука», М., 1965, 340 с.
- Бахвалов С. В. Пара расслояемых конгруэнций. — Мат. сб., 1939, т. 6 (48), вып. 1, стр. 67—76.
- Березина Л. Я. К теории семейств плоскостей в многомерном пространстве. — Труды Рижск. ин-та инж. гражд. авиации, 1966, вып. 85, 153 с.
- Бланк Я. П. Конические сети. — Зап. Харьк. мат. о-ва. Сер. 4, 1952, т. 23, стр. 113—141.
- Борисов Ю. Ф. Параллельный перенос на плоской поверхности. Ч. 1—3. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 7, вып. 2, стр. 160—171; 1958, № 19, вып. 4, стр. 45—54; 1959, № 1, вып. 1, стр. 34—50.
- Бюшгенс С. С. Геометрия векторного поля. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946, № 10, стр. 73—96.
- Бюшгенс С. С. Геометрия стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, № 12, стр. 481—512.
- Вагнер В. В. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. — В кн.: VIII Международный конкурс на соискание премий им. Лобачевского. Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1940, стр. 195—262.
- Вагнер В. В. Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии. — В кн.: Веблен О. и Уайтхед Д. Ж. Основания дифференциальной геометрии. ИЛ, М., 1949, стр. 135—223.
- Вагнер В. В. Теория составного многообразия. — Труды. Сем. по векторн. и тензорн. анализу. М., 1950, вып. 8, стр. 11—72.
- Васильев А. М. Дифференциальная алгебра как аппарат дифференциальной геометрии. — Труды Геом. сем. М., 1966, т. 1, стр. 33—61.
- Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, М., 1959, 628 с.
- Волков Ю. А. Устойчивость решения проблемы Минковского. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1963, № 1, вып. 1, стр. 33—43.
- Гейдельман Р. М. К конформно-дифференциальной теории конгруэнций окружностей. — Мат. сб., 1951, т. 29 (71), вып. 2, стр. 313—348.
- Гриневичус К. И. Дифференциальная окрестность второго порядка луча комплекса в многомерном пространстве. — Мат. сб., 1960, т. 52 (94), вып. 4, стр. 991—1019.
- Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Сборник статей по внутренней геометрии поверхностей. Под ред. А. Д. Александрова и В. А. Залгаллера. Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1965, т. 76, 150 с.
- Егоров И. П. Движения в пространствах аффинной связности. — Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. Изд-во Казанск. ун-та, 1965, 202 с.
- Егоров И. П. К усилению теоремы Фубини о порядке групп движений римановых пространств. — ДАН СССР, 1951, т. 80, № 5, стр. 709—712.
- Егоров И. П. Максимально подвижные  $L_n$  полусимметрической связности. — ДАН СССР, 1952, т. 84, № 3, стр. 433—435.
- Егоров И. П. О группах движения пространств общей несимметрической аффинной связности. — ДАН СССР, 1949, т. 64, № 5, стр. 621—624; 1950, т. 73, № 2, стр. 265—267.
- Егоров И. П. О движениях в пространствах аффинной связности. — ДАН СССР, 1953, т. 89, № 5, стр. 781—784.
- Егоров И. П. О коллинеациях пространств проективной связности. — ДАН СССР, 1948, т. 61, № 4, стр. 605—608.

- Ефимов Н. В. Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны. — Мат. сб., 1964, т. 64 (106), вып. 2, стр. 286—320.
- Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей. — Усп. мат. наук, 1948, т. 3, вып. 2 (24), стр. 47—158.
- Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей «в малом». — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1949, т. 30, 128 с.
- Каган В. Ф. Субпроективные пространства. Физматгиз, М., 1961, 218 с.
- Кованцов Н. И. Теория комплексов. Изд-во Киевск. ун-та, К., 1963, 290 с.
- Кон-Фоссен С. Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. Физматгиз, М., 1959, 303 с.
- Кручкович Г. И. О движениях в полуприводимых римановых пространствах. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 149—156.
- Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. — Труды Моск. мат. о-ва, 1953, т. 2, стр. 275—382.
- Лаптев Г. Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. — Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 226—233.
- Лаптев Г. Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. — Труды Геом. сем. М., 1966, т. 1, стр. 139—189.
- Лаптев Б. Л. Производная Ли в пространстве опорных элементов. — Труды Сем. по векторн. и тензорн. анализу. М., 1956, вып. 10, стр. 227—248.
- Лейбин А. С. Об изгибаемости выпуклых поверхностей с краем. — Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 5 (39), стр. 149—159.
- Либер А. Е. К теории поверхностей в геометрическом  $n$ -пространстве с заданной фундаментальной группой. — Труды Сем. по векторн. и тензорн. анализу, М., 1960, вып. 10, стр. 193—226.
- Либерман И. М. Геодезические линии на выпуклых поверхностях. — ДАН СССР, 1941, т. 32, № 5, стр. 310—313.
- Лумисте Ю. Г. Однородные расслоения со связностью и их погружения. — Труды Геом. сем. М., 1966, т. 1, стр. 191—237.
- Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г. Топологические методы в вариационных задачах. Госиздат, М., 1930, 68 с.
- Малаховский В. С. Многообразия алгебраических элементов в  $n$ -мерном проективном пространстве. — Труды Томск. ун-та. Геом. сб., 1963, т. 168, вып. 3, стр. 28—65.
- Норден А. П. Метод нормализации и его приложения в геометрии пространств аффинной связности. — Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 418—423.
- Норден А. П. Пространства аффинной связности. ГИТТЛ, М.—Л., 1950, 463 с.
- Оловянишников С. П. Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей. — Мат. сб., 1946, т. 18 (60), вып. 3, стр. 429—440.
- Остиану Н. М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства. — Труды Геом. сем. М., 1966, т. 1, стр. 239—263.
- Петров А. З. Пространства Эйнштейна. Физматгиз, М., 1961, 463 с.
- Погорелов А. В. Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей. Изд-во Харьк. ун-та, Хрк., 1959, 105 с.
- Погорелов А. В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. «Наука», М., 1966, 296 с.
- Погорелов А. В. Изгибание выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М.—Л., 1951, 184 с.
- Погорелов А. В. Некоторые вопросы геометрии в целом в римановом пространстве. Изд-во Харьк. ун-та, Хрк., 1957, 90 с.
- Погорелов А. В. Некоторые результаты по геометрии в целом. Изд-во Харьк. ун-та, Хрк., 1961, 88 с.
- Погорелов А. В. Об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического типа. Изд-во Харьк. ун-та, Хрк., 1960, 110 с.
- Погорелов А. В. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Изд-во АН УССР, К., 1952, 69 с.

- Погорелов А. В. Поверхности ограниченной внешней кривизны. Изд-во Харьк. ун-та, Хрк., 1956, 127 с.
- Позняк Э. Г. О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны.— Укр. геом. сб., 1966, т. 3, стр. 78—92.
- Рашевский П. К. О проективных представлениях однородных пространств.— Мат. сб., 1960, т. 50 (92), вып. 2, стр. 171—202.
- Рашевский П. К. Полиметрическая геометрия.— Труды Сем. по векторн. и тензорн. анализу. М., 1941, вып. 5, стр. 21—147.
- Рашевский П. К. Симметрические пространства аффинной связности с кручением.— Труды Сем. по векторн. и тензорн. анализу. М., 1950, вып. 3, стр. 182—192.
- Решетняк Ю. Г. Изометрические координаты в многообразиях ограниченной кривизны.— Сиб. мат. журн., 1960, т. 1, № 1, стр. 88—116.
- Розендорн Э. Р. Построение ограниченной полной поверхности неположительной кривизны.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 2 (98), стр. 149—156.
- Розенфельд Б. А. Квазиэллиптические пространства.— Труды Моск. мат. о-ва, 1959, т. 8, стр. 49—70.
- Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. ГИТТЛ, М., 1955, 744 с.
- Рыжков В. В. Тангенциальное изгибание поверхностей.— Мат. сб., 1959, т. 47 (89), вып. 1, стр. 55—110.
- Сабинин Л. В. О структуре групп движений однородных римановых пространств с осевой симметрией.— Научн. докл. высш. шк., 1958, № 6, стр. 127—138.
- Сенькин Е. П. Об изгибании общих выпуклых поверхностей с границей.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1960, № 19, вып. 4, стр. 87—94.
- Синцов Д. М. Геометрия монжевих рівнянь.— Зап. Харьк. мат. о-ва. Сер. 4, 1949, т. 3, стр. 121—132.
- Синцов Д. М. О системах интегральных кривых пфаффа уравнения  $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ .— Научн. зап. НИ мат. кафедр, 1928, т. 3, стр. 107—148.
- Синцов Д. М. Свойства системы интегральных кривых пфаффа уравнения в  $n$  переменных.— Изв. АН СССР, 1931, № 10, стр. 1275—1294.
- Солодовников А. С. Проективные преобразования римановых пространств.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 4 (70), стр. 45—116.
- Топоногов В. А. Метрическое строение римановых пространств неотрицательной кривизны, содержащих прямые линии.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 6, стр. 1358—1369.
- Феденко А. С. Метод предельного перехода в теории римановых пространств.— Изв. АН БССР, 1958, № 2, стр. 17—25.
- Фиников С. П. Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи. ГТТИ, М.—Л., 1937, 176 с.
- Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Теория совместимости систем дифференциальных уравнений в полных дифференциалах и в частных производных. ГТТИ, М.—Л., 1948, 432 с.
- Фиников С. П. Проективно-дифференциальная геометрия. ГТТИ, М.—Л., 1937, 263 с.
- Фиников С. П. Теория пар конгруэнций. ГТТИ, М.—Л., 1950, 528 с.
- Швейкин П. И. Нормальные геометрические объекты поверхности в аффинном пространстве.— Труды Геом. сем. М., 1966, т. 1, стр. 331—422.
- Широков А. П. Об одном типе  $G$ -структур, определяемых алгебрами.— Труды Геом. сем. М., 1966, т. 1, стр. 425—455.
- Широков П. А. Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в римановых пространствах.— Изв. Физ-мат. о-ва. Казань. Сер. 2, 1925, т. 25, стр. 86—114.
- Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. Физматгиз, М., 1963, 540 с.
- Щербаков Р. Н. Некоторые вопросы аффинной теории прямолинейных конгруэнций.— Мат. сб., 1955, т. 37 (79), вып. 3, стр. 527—556.
- Яненко Н. Н. К теории вложения поверхностей в многомерном евклидовом пространстве.— Труды Моск. мат. о-ва, 1954, т. 3, стр. 89—180.



- Sintzow D. Zur Krümmungstheorie der Integralkurven der Pfaffschen Gleichung.— Math. Ann., 1929, Bd 101, H. 2—3, S. 261—272.
- Tschebotarow N. Über Flächen welche Imprimitivitätssysteme in Bezug auf eine gegebene kontinuierliche Transformationsgruppe enthalten (Verallgemeinerte Schiebungsflächen).— Mat. сб., 1927, т. 34, вып. 2, стр. 149—206.

## К главе VIII. Проективная и начертательная геометрия

### Проективная геометрия

- Бескин Н. М. Теорема Чевы и Менелая в  $n$ -мерном пространстве.— Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1956, т. 2, стр. 138—139.
- Бюшгенс С. С. Конфигурация А. К. Власова и ее обобщение.— Mat. сб., 1955, т. 36 (78), вып. 2, стр. 275—280.
- Вопросы современной начертательной геометрии. Сб. статей под ред. Н. Ф. Четверухина. ГТТИ, М.—Л., 1947, 334 с.
- Воскресенский В. А. Об основных направлениях развития аксонометрических проекций в СССР.— Изв. Томск. политехн. ин-та, 1959, т. 104, стр. 96—99.
- Глаголев А. А. Высшая синтетическая геометрия в трудах В. Я. Цингера, Н. Д. Брашмана и К. А. Андреева.— В кн.: Номографич. сб. Изд-во Моск. ун-та, М., 1951, стр. 7—24.
- Глаголев А. А. Новое определение кривой третьего порядка.— ДАН СССР, 1946, т. 53, № 9, стр. 779.
- Глаголев А. А. Новое чисто геометрическое определение инволюции третьего порядка.— Труды Второго Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 24—30 июня 1934 г.), 1936, т. 2, стр. 102—104.
- Глаголев А. А. О построении точек Бурместра.— ДАН СССР, 1947, т. 58, № 9, стр. 1881—1882.
- Глаголев А. А. О сопряженности двух троек точек.— ДАН СССР, 1946, т. 54, № 4, стр. 291—293.
- Глаголев А. А. Применение плоскостных вурфов к определению пространственной кривой четвертого порядка первого рода.— Mat. сб., 1925, т. 32 (74), вып. 2, стр. 342—347.
- Глаголев Н. А. О проективных свойствах линейных конгруэнций.— Труды Второго Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 24—30 июня 1934 г.), 1936, т. 2, стр. 71—74.
- Гордеский Д. З. Аксиомы инцидентности многомерной проективной геометрии.— Уч. зап. Мат. о-ва. Хрк., 1957, т. 25, стр. 113—127.
- Гордеский Д. З. Интерпретация проективной геометрии с помощью окружностей. Изд-во Харьк. ун-та, Хрк., 1953, 36 с.
- Данилевский В. В. Русская техника. Лен. газ.-журн. и книжн. изд-во, 1947, 483 с.
- Мандзюк А. И. О некоторых теоремах проф. Д. Д. Мордухай-Болтовского и японского математика Огино Шузаки.— Труды Научно-техн. конф. Военно-транспортн. акад., Л., 1938, т. 2, стр. 61—64.
- Мандзюк А. И. О некоторых многозначных соответствиях в проективной геометрии.— Укр. мат. журн., 1953, т. 5, № 4, стр. 439—452.
- Мандзюк А. И. Применение одно-четырёхзначного соответствия к разрешению основной конструктивной задачи, относящейся к инволюции третьего порядка второго измерения.— Труды Научно-техн. конф. Военно-транспортн. акад., Л., 1938, т. 2, стр. 67—72.
- Маневич В. А. О представлении элементов систем коллинеаций II и III ступени в виде произведения двух полярных соответствий и о некоторых свойствах коллинеаций, связанных с этим вопросом.— Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1956, т. 1, стр. 159—160.
- Маневич В. А. Полярная сопряженность относительно некоторых образов 2-го порядка в 4-мерном пространстве.— Укр. мат. журн., 1958, т. 10, № 3, стр. 333.

- Методы начертательной геометрии и ее приложения. Сб. статей, под ред. Н. Ф. Четверухина. ГТТИ, М., 1955, 411 с.
- Мордухай-Болтовской Д. Д. Квадратичные диаметры и поляры кривых третьего порядка. — Труды ин-та мат. и естествозн. Северо-Кавказск. ун-та. Ростов-на-Дону, 1926, т. 2, стр. 29—38.
- Мордухай-Болтовской Д. Д. Трехмерный и четырехмерный аналог теоремы Паскаля. — Усп. мат. наук, 1953, т. 8, вып. 2 (54), стр. 135—138.
- Наумович Н. В. Обобщение теоремы Штаудта, полученное при помощи многомерной начертательной геометрии. — Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1959, т. 4, стр. 77—78.
- Начертательная геометрия. Труды Всесоюз. заочн. энерг. ин-та. Вып. 10. М., 1957, 91 с.
- Рынин Н. А. Материалы к истории начертательной геометрии (библиография, биографии, эпизоды, факты, хронология). Изд. Ленингр. автодор. ин-та, Л., 1938, 111 с. с илл.
- Скопец З. А. Отображение четырехмерного пространства на двумерную плоскость посредством норм-кривой. — Труды Сем. по векторн. и тензорн. анализу. М., 1963, вып. 12, стр. 443—450.
- Чалый А. Т. Очерк развития начертательной геометрии. — В кн.: Курс начертательной геометрии. Машгиз, М.—К., 1962, стр. 269—276.
- Черняев М. П. Пространственный аналог теоремы Менелая. — Труды Ин-та механики. сельск. х-ва. Таганрог, 1939, стр. 231—233.
- Черняев М. П. Некоторые обобщения теоремы Паскаля. — Уч. зап. Ростовск.-на-Дону ун-та. Труды физ.-мат. ф-та, 1951, т. 14, вып. 1, стр. 85—89.
- Четверухин Н. Ф. Начертательная геометрия. — В кн.: Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 1. Физматгиз, М., 1959, стр. 893—898.
- Setveruhin N. F. Perechi de triumphiuri in spațiu și theoremă lui Desargues. — Bul. Inst. Politehn. din Iași., 1962, t. 8 (12), fasc. 1—2, p. 61—64.
- Kolmogoroff A. Zur Begründung der projectiven Geometrie. — Ann. of Math. Second Ser., 1932, v. 33, N 1, p. 175—176.
- Glažoleff N. Sur le problème général du calcul projectif. — Journ. de math. pur et appliquées, 1938, t. 17, fasc. 4, p. 387—404.
- Rachevsky P. Sur une géométrie projective avec de nouveaux axiomes de configuration. — Mat. сб., 1940, т. 8 (50), вып. 2, стр. 183—204.
- Rachevsky P. Sur l'unicité de la géométrie projective dans le plan. — Mat. сб., 1940, т. 8 (50), вып. 1, стр. 107—120.

## К главе IX. Топология

- Авербух Б. Г. Алгебраическое строение групп внутренних гомологий. — ДАН СССР, 1959, т. 125, № 1, стр. 11—14.
- Александров А. Д. Геометрия и топология в Советском Союзе. — Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 4 (20), стр. 3—58; вып. 5 (21), стр. 9—92.
- Александров П. С. Из опыта московской топологической школы. — Вестн. АН СССР, 1954, № 10, стр. 34—38.
- Александров П. С. К пономаревской теории абсолют топологических пространств. — ДАН СССР, 1965, т. 161, № 5, стр. 263—266.
- Александров П. С. О метризации топологических пространств. — Bull. de l'Acad. polon. des sci. Ser. des sci. math., astronom. et phys., 1960, v. 8, N 3, p. 135—140.
- Александров П. С. О некоторых основных направлениях в общей топологии. — Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 6 (126), стр. 3—42.
- Александров П. С. О некоторых основных направлениях в развитии советской топологии. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ.-мат. и естеств. наук, 1952, № 2, вып. 1, стр. 3—33.
- Александров П. С. О некоторых результатах в теории топологических пространств, полученных за последние 25 лет. — Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 2 (92), стр. 25—95.
- Александров П. С. Топологические теоремы двойственности. Ч. 1—2. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1955, т. 41, 110 с.; 1959, т. 54, 136 с.

- Александров П. С., Пономарев В. И. О диадических бикомпактах.— *Fund. math.*, 1962, т. 50, № 4, р. 419—429.
- Александров П. С., Пономарев В. И. О некоторых классах  $n$ -мерных пространств.— *Сиб. мат. журн.*, 1960, т. 1, № 1, стр. 3—13.
- Альбер С. И. Гомологии пространства неориентированных петель и их приложение к вариационному исчислению в целом.— *ДАН СССР*, 1964, т. 155, № 1, стр. 13—16.
- Альбер С. И. Гомологии пространства плоскостей и применение их к вариационному исчислению.— *ДАН СССР*, 1954, т. 91, № 6, стр. 1237—1240.
- Альбер С. И. Многомерные задачи вариационного исчисления в целом.— *ДАН СССР*, 1964, т. 156, № 4, стр. 727—730.
- Альбер С. И. О периодической задаче вариационного исчисления в целом.— *Усп. мат. наук*, 1957, т. 12, вып. 4 (76), стр. 57—124.
- Аносов Д. В. Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны.— *ДАН СССР*, 1962, т. 145, № 4, стр. 707—709.
- Аносов Д. В. Эргодические свойства геодезических потоков на римановых многообразиях отрицательной кривизны.— *ДАН СССР*, 1963, т. 151, № 6, стр. 1250—1252.
- Антоновский М. Я. Кольца гомологий незамкнутых множеств.— *ДАН УзССР*, 1959, № 7, стр. 3—5.
- Арнольд В. И., Синай Я. Г. О малых возмущениях автоморфизмов тора.— *ДАН СССР*, 1962, т. 144, № 4, стр. 695—698.
- Архангельский А. В. Аддитивная теорема для веса множеств, лежащих в бикомпактах.— *ДАН СССР*, 1959, т. 126, стр. 239—241.
- Архангельский А. В. Некоторые типы факторных отображений и связи между классами топологических пространств.— *ДАН СССР*, 1963, т. 153, № 4, стр. 743—746.
- Архангельский А. В. Новые критерии паракомпактности и метризуемости произвольного  $T_2$ -пространства.— *ДАН СССР*, 1961, т. 141, № 1, стр. 13—15.
- Архангельский А. В. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства.— *ДАН СССР*, 1963, т. 151, № 4, стр. 751—754.
- Архангельский А. В. Об открытых и почти открытых отображениях топологических пространств.— *ДАН СССР*, 1962, т. 147, № 5, стр. 999—1002.
- Архангельский А. В. Об отображениях метрических пространств.— *ДАН СССР*, 1962, т. 145, № 2, стр. 245—247.
- Баладзе Д. О. О группах гомологии и когомологии над парой групп коэффициентов.— *ДАН СССР*, 1960, т. 131, № 6, стр. 1231—1234.
- Беришвили Г. Д. Гомологическая теория Виеториса относительно абелевых категорий.— *Сообщ. АН ГрузССР*, 1965, т. 37, № 1, стр. 11—18.
- Бокштейн М. Ф. Полный модульный спектр колец когомологий тихоновского произведения.— *Мат. сб.*, 1960, т. 51 (93), вып. 1, стр. 73—99.
- Бокштейн М. Ф. Теорема об универсальных коэффициентах для спектральных групп когомологий дифференциальных групп.— *ДАН СССР*, 1963, т. 148, № 5, стр. 997—1000.
- Болтянский В. Г. Бесконечномерные гомологии и когомологии.— *ДАН СССР*, 1955, т. 105, № 6, стр. 1141—1146.
- Болтянский В. Г. Вторые препятствия для секущих поверхностей.— *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, 1956, т. 20, № 1, стр. 99—136.
- Болтянский В. Г. Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей.— *Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова*, 1955, т. 47, 199 с.
- Болтянский В. Г. Расслоение пространств отображений.— *Труды Моск. мат. о-ва*, 1956, т. 5, стр. 299—310.
- Болтянский В. Г., Постников М. М. Об основных понятиях алгебраической топологии. Аксиоматическое определение групп когомологий.— *ДАН СССР*, 1960, т. 133, № 4, стр. 745—748.

- Виноградов А. М. Некоторые гомотопические свойства пространства вложений окружности в сферу или шар. — ДАН СССР, 1964, т. 156, № 5, стр. 999—1002.
- Виноградов А. М. О спектральной последовательности Адамса. — ДАН СССР, 1960, т. 133, № 5, стр. 999—1002.
- Гамкрелидзе Р. В. Циклы Черна алгебраических многообразий. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1956, т. 20, № 6, стр. 685—706.
- Голо В. Л. Гладкие структуры на многообразиях с краем. — ДАН СССР, 1964, т. 157, № 1, стр. 22—25.
- Гроссман Д. П. Об одной оценке для категории Люстерника — Шнирельмана. — ДАН СССР, 1946, т. 54, № 2, стр. 109—112.
- Ефимов Б. Метризуемость и  $\Sigma$ -произведение бикомпактов. — ДАН СССР, 1963, т. 152, № 4, стр. 794—797.
- Ефимов Б. О диадических пространствах. — ДАН СССР, 1963, т. 149, № 5, стр. 1011—1014; т. 151, № 5, стр. 1021—1024.
- Зарелуа А. В. О продолжении отображений на расширения, обладающие некоторыми специальными свойствами. — Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 3, стр. 532—548.
- Зарелуа А. О теореме Гуревича. — Мат. сб., 1963, т. 60 (102), вып. 1, стр. 17—28.
- Зарелуа А. Равенство размерностей и бикомпактные расширения. — ДАН СССР, 1962, т. 144, № 4, стр. 713—716.
- Зарелуа А. Универсальный бикомпакт данного веса и данной размерности. — ДАН СССР, 1964, т. 154, № 5, стр. 1015—1018.
- Иванов А. А. Изотопия компактов в евклидовых пространствах. — ДАН СССР, 1950, т. 71, № 6, стр. 1021—1022.
- Иванов А. А. Отношения смежности на топологических пространствах. — ДАН СССР, 1959, т. 128, № 1, стр. 33—36.
- Иванов А. А., Иванова В. М. Пространства смежности и бикомпактные расширения топологических пространств. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, № 4, стр. 613—634.
- Ивановский Л. Н. Диадичность бикомпактных фактор-пространств локально бикомпактных групп. — Труды Второй Всесоюз. тополог. конф. (Тбилиси, 5—10 октября 1959 г.). Изд-во АН ГрузССР, 1959, стр. 22—23.
- Илиадис С. Абсолюты хаусдорфовых пространств. — ДАН СССР, 1963, т. 149, № 1, стр. 22—25.
- Илиадис С. О некоторых свойствах абсолютов. — ДАН СССР, 1963, т. 152, № 4, стр. 798—800.
- Каждан Я. М. Пример открытого отображения одномерного локально связного континуума на квадрат. — ДАН СССР, 1947, т. 56, № 4, стр. 339—342.
- Келдыш Л. В. Монотонное отображение куба на куб большей размерности. — Мат. сб., 1957, т. 41 (83), вып. 1, стр. 129—158.
- Келдыш Л. В. Нульмерные открытые отображения. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, № 2, стр. 165—184.
- Келдыш Л. В. О вложении в  $E^n$  и  $E^{n+1}$  некоторых монотонных образов  $E^n$ . — Мат. сб., 1962, т. 57 (99), вып. 1, стр. 95—104.
- Келдыш Л. В. Преобразование монотонного неприводимого отображения в монотонно открытое и монотонно открытые отображения куба, повышающие размерность. — Мат. сб., 1957, т. 43 (85), вып. 2, стр. 187—226.
- Келдыш Л. В. Топологические вложения в евклидовы пространства. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1966, т. 81, 183 с.
- Компаниец В. П. О монотонных отображениях  $n$ -мерной сферы на себя. — Укр. мат. журн., 1965, т. 17, № 6, стр. 100—103.
- Кудрявцев Л. Д. Об изоморфизме гомотопических групп топологических пространств. — Сообщ. АН ГрузССР, 1964, т. 36, № 3, стр. 521—525.
- Кузьминов В. И. О гипотезе П. С. Александрова в теории топологических групп. — ДАН СССР, 1959, т. 125, № 4, стр. 727—729.
- Кузьминов В. И. Тестовые пространства. — ДАН СССР, 1963, т. 152, № 4, стр. 805—807.

- Кузьминов В. И. и Шведов И. А. Группы когомологии равномерных пространств.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 3, стр. 565—595.
- Ландис Е. М., Петровский И. Г. О числе предельных циклов уравнения  $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}$ , где  $P$  и  $Q$  — полиномы.— Мат. сб., 1957, т. 43 (85), вып. 2, стр. 149—168.
- Левшенко Б. Т. О бесконечномерных пространствах.— ДАН СССР, 1961, т. 139, № 2, стр. 286—289.
- Левшенко Б. Т. О сильно бесконечномерных пространствах.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех., астроном., физ., хим., 1959, № 5, стр. 219—227.
- Левшенко Б. Т. Пространства трансфинитной размерности.— Мат. сб., 1965, т. 67 (109), вып. 2, стр. 255—266.
- Люстерник Л. А. Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1947, т. 19, 100 с.
- Люстерник Л. А., Фет А. И. Вариационные задачи на замкнутых многообразиях.— ДАН СССР, 1951, т. 81, № 1, стр. 17—18.
- Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г. Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхностей.— Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 1 (17), стр. 166—217.
- Локучиевский О. В. Пример открытого отображения одномерного компакта на гильбертов параллелепипед.— Уч. зап. Моск. ун-та. Мат., 1954, вып. 165, т. 7, стр. 118—130.
- Марков А. А. Об изотопии компактных множеств в евклидовых пространствах.— ДАН СССР, 1934, т. 3, № 3, стр. 137—140.
- Мдинаришвили Л. Д. О различных группах гомологии пространства, основанных на бесконечных покрытиях.— Сообщ. АН ГрузССР, 1965, т. 38, № 1, стр. 23—30.
- Мищенко А. С. О пространствах с точечно счетной базой.— ДАН СССР, 1962, т. 144, № 5, стр. 985—988.
- Мищенко А. С. О финально компактных пространствах.— ДАН СССР, 1962, т. 145, № 6, стр. 1224—1227.
- Немыцкий В. В. Московский топологический кружок за 10 лет.— Усп. мат. наук, 1936, вып. 2, стр. 271—285.
- Николаишвили В. В. О теореме двойственности Куратовского.— Сообщ. АН ГрузССР, 1964, т. 35, стр. 513—518.
- Новиков С. П. Гомотопические свойства комплексов Тома.— Мат. сб., 1962, т. 57 (99), вып. 4, стр. 407—443.
- Новиков С. П. Гомотопические эквивалентные гладкие многообразия. I.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 2, стр. 365—474.
- Новиков С. П. Дифференцируемые пучки сфер.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, т. 29, № 1, стр. 71—96.
- Новиков С. П. Некоторые свойства многообразий размерности  $4k + 2$ .— ДАН СССР, 1963, т. 153, № 5, стр. 1005—1008.
- Новиков С. П. О вложении односвязных многообразий в евклидово пространство.— ДАН СССР, 1961, т. 138, № 4, стр. 775—778.
- Новиков С. П. О когомологиях алгебры Стиррода.— ДАН СССР, 1959, т. 128, № 5, стр. 893—895.
- Новиков С. П. О многообразиях со свободной абелевой фундаментальной группой и их применениях.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1966, т. 30, № 1, стр. 207—246.
- Новиков С. П. Рациональные классы Понтрягина. Гомеоморфизм и гомотопический тип замкнутых многообразий. I.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, т. 29, № 6, стр. 1373—1388.
- Новиков С. П. Топология слоений.— Труды Моск. мат. о-ва, 1965, т. 14, стр. 248—278.
- Оревков Ю. П. О вполне ограниченных метрических пространствах.— ДАН СССР, 1962, т. 143, № 2, стр. 280—281.
- Оревков Ю. П. О топологической характеристике равномерных свойств топологических пространств.— ДАН СССР, 1963, т. 153, № 1, стр. 38—41.

- Осматеску П. К.  $\omega$ -расширения. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех., 1963, № 6, стр. 45—54.
- Пасынков Б. А. Нульмерные открытые отображения, повышающие размерность. — Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 5, стр. 183—190.
- Пасынков Б. А. Об обратных спектрах и размерности. — ДАН СССР, 1961, т. 138, № 5, стр. 1013—1015.
- Пасынков Б. А. Об одном обобщении топологических произведений. — ДАН СССР, 1963, т. 150, № 1, стр. 40—43.
- Пасынков Б. А. Об универсальных бикомпактах данного веса и данной размерности. — ДАН СССР, 1964, т. 154, № 5, стр. 1042—1043.
- Пасынков Б. А. Об универсальных пространствах для некоторых классов пространств. — ДАН СССР, 1963, т. 153, № 5, стр. 1009—1012.
- Пасынков Б. А. О полиэдральных спектрах и размерности бикомпактов, в частности бикомпактных групп. — ДАН СССР, 1958, т. 121, № 1, стр. 45—48.
- Пасынков Б. А. О совпадении различных определений размерности для локально бикомпактных групп. — ДАН СССР, 1960, т. 132, № 5, стр. 1035—1037.
- Пасынков Б. А. О совпадении различных определений размерности для фактор-пространств локально бикомпактных групп. — Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 5 (107), стр. 129—135.
- Пасынков Б. А. Почти метризуемые топологические группы. — ДАН СССР, 1965, т. 161, № 2, стр. 281—284.
- Пасынков Б. Частичные топологические произведения. — ДАН СССР, 1964, т. 154, № 4, стр. 767—770.
- Поляков В. Правильность, произведение и спектры пространств близости. — ДАН СССР, 1964, т. 154, № 1, стр. 51—54.
- Пonomarev В. Аксиомы счетности и непрерывные отображения. — Bull. de l'Acad. polon. des sci. Ser. des sci. math., astronom. et phys., 1960, v. 8, N 8, p. 127—134.
- Пonomarev В. И. Об абсолюте топологических пространств. — ДАН СССР, 1963, т. 149, № 1, стр. 26—28.
- Пonomarev В. И. О вольтмановском расширении топологических пространств. — Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 6, стр. 1333—1342.
- Пonomarev В. И. О многозначных отображениях топологических пространств. — ДАН СССР, 1959, т. 124, № 2, стр. 268—271.
- Пonomarev В. И. О некоторых применениях проекционных спектров к теории топологических пространств. — ДАН СССР, 1962, т. 144, № 5, стр. 993—996.
- Пonomarev В. И. О паракомпактных и финально компактных пространствах. — ДАН СССР, 1961, т. 141, № 3, стр. 561—563.
- Пonomarev В. И. О паракомпактных пространствах и их непрерывных отображениях. — ДАН СССР, 1962, т. 143, № 1, стр. 46—49.
- Пonomarev В. И. О продолжении многозначных отображений топологических пространств на их бикомпактные расширения. — Мат. сб., 1960, т. 52 (94), вып. 3, стр. 847—862.
- Пonomarev В. И. О свойствах топологических пространств, сохраняющихся при многозначных непрерывных отображениях. — Мат. сб., 1960, т. 51 (93), вып. 4, стр. 515—536.
- Пonomarev В. И. Паракомпакты, их проекционные спектры и непрерывные отображения. — Мат. сб., 1963, т. 60 (102), вып. 1, стр. 89—119.
- Понтрягин Л. С. Векторные поля на многообразиях. — Мат. сб., 1949, т. 24 (66), вып. 2, стр. 129—162.
- Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1955, т. 45, 140 с.
- Понтрягин Л. С. Классификация некоторых косых произведений. — ДАН СССР, 1945, т. 47, № 5, стр. 327—330.
- Понтрягин Л. С. Некоторые топологические инварианты замкнутых римановых многообразий. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 3, стр. 193—200.

- Понтрягин Л. С. Топологические теоремы двойственности. — Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 2 (18), стр. 21—44.
- Понтрягин Л. С. Топология в Советском Союзе. — Уч. зап. Моск. ун-та, 1947, вып. 91, стр. 65—76.
- Понтрягин Л. С. Характеристические циклы дифференцируемых многообразий. — Мат. сб., 1947, т. 21 (63), вып. 2, стр. 233—284.
- Постников М. М. Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений. I. Алгебраическая теория систем. II. Натуральные системы и гомотопический тип. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1955, т. 46, 158 с.
- Постников М. М. Классификация непрерывных отображений  $(n+1)$ -мерного комплекса в связное топологическое пространство, асферичное в размерностях, меньших чем  $n$ . — ДАН СССР, 1950, т. 71, № 6, стр. 1027—1028.
- Произолов В. О взаимно однозначных отображениях на метрические пространства. — ДАН СССР, 1964, т. 158, № 4, стр. 788—789.
- Роднянский А. М. О непрерывных и дифференцируемых отображениях открытых множеств евклидова пространства. — Мат. сб., 1957, т. 42 (84), вып. 2, стр. 179—185.
- Рожанская Ю. А. и Степанов В. В. Очерк развития топологии в СССР за 10 лет. — Мат. сб., 1928, т. 35, доп. вып., стр. 43—64.
- Рохлин В. А. Вложение неориентируемых трехмерных многообразий в 5-мерное пространство. — ДАН СССР, 1965, т. 160, № 3, стр. 549—551.
- Рохлин В. А. Класс Понтрягина — Хирцебруха коразмерности 2. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1966, т. 30, № 3, стр. 705—718.
- Рохлин В. А. Классификация отображений  $(n+3)$ -мерной сферы в  $n$ -мерную. — ДАН СССР, 1951, т. 81, № 1, стр. 19—22.
- Рохлин В. А. Новые результаты теории четырехмерных многообразий. — ДАН СССР, 1952, т. 84, № 2, стр. 221—224.
- Рохлин В. А. О характеристических классах Понтрягина. — ДАН СССР, 1957, т. 113, № 2, стр. 276—279.
- Рохлин В. А. Теория внутренних гомотопий. — Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 4 (88), стр. 3—20.
- Рохлин В. А., Шварц А. С. Комбинаторная инвариантность классов Понтрягина. — ДАН СССР, 1957, т. 114, № 3, стр. 490—493.
- Рухадзе А. Р. О группах гомотопии пространства относительно направленной системы открытых подмножеств. — Сообщ. АН ГрузССР, 1965, т. 39, № 1, стр. 21—28.
- Рухадзе А. Р. О локальных теоремах двойственности. — ДАН СССР, 1960, т. 131, № 6, стр. 1257—1261.
- Синай Я. Г. Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром. II. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1966, т. 30, № 1, стр. 15—68.
- Ситников К. А. Комбинаторная топология незамкнутых множеств. III. — Мат. сб., 1959, т. 48 (90), вып. 2, стр. 213—226.
- Скляренко Е. Г. Две теоремы бесконечномерных пространств. — ДАН СССР, 1962, т. 143, № 5, стр. 1053—1056.
- Скляренко Е. Г. О вложении нормальных пространств в бикомпакты того же веса и той же размерности. — ДАН СССР, 1958, т. 123, № 1, стр. 36—39.
- Скляренко Е. Г. О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии. — Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 6 (120), стр. 47—70.
- Скляренко Е. Г. О размерностных свойствах бесконечномерных пространств. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, № 2, стр. 197—212.
- Скляренко Е. Г. О совершенных бикомпактных расширениях. — ДАН СССР, 1962, т. 146, № 5, стр. 1031—1034.
- Скляренко Е. Г. О топологическом строении локально бикомпактных групп и их фактор-пространств. — Мат. сб., 1963, т. 60 (102), вып. 1, стр. 63—88.
- Скляренко Е. Г. Некоторые вопросы теории бикомпактных расширений. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, т. 26, № 3, стр. 427—452.
- Скляренко Е. Г. Несколько замечаний о бесконечномерных пространствах. — ДАН СССР, 1959, т. 126, № 6, стр. 1203—1206.
- Скляренко Е. Г. Теорема об отображениях, понижающих размерность. —

- Bull. de l'Acad. polon. des sci. Ser. des sci. math., astronom. et phys., 1960, v. 10, N 8, p. 429—432.
- Смирнов Ю. М. Несколько замечаний о трансфинитной размерности.— ДАН СССР, 1961, т. 141, № 1, стр. 52—55.
- Смирнов Ю. М. Об универсальных пространствах для некоторых классов бесконечномерных пространств.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, № 2, стр. 185—196.
- Смирнов Ю. М. Пример вполне регулярного пространства с нульмерным чеховским наростом, не обладающего свойством семибикомпактности.— ДАН СССР, 1958, т. 120, № 6, стр. 1204—1207.
- Смирнов Ю. М. Пример нульмерного нормального пространства, имеющего бесконечную размерность в смысле покрытий.— ДАН СССР, 1958, т. 123, № 1, стр. 40—42.
- Сосинский А. Б. Монотонно-открытые отображения сферы.— Мат. сб., 1965, т. 66 (108), вып. 2, стр. 170—203.
- Сосинский А. Б. О вложении  $k$ -мерного элемента в  $E^n$ .— ДАН СССР, 1961, т. 139, № 6, стр. 1311—1313.
- Трохимчук Ю. Ю. О непрерывных отображениях областей евклидова пространства.— Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 2, стр. 196—211.
- Тынянский Н. Т. О точных последовательностях групп гомологии на произвольных подмножествах в полиэдре.— Труды Тбилисс. мат. ин-та АН ГрузССР, 1960, т. 27, стр. 15—25.
- Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. Т. 1. ГИТТЛ, М.—Л., 1951, 992 с.
- Фет А. И. Об алгебраическом числе замкнутых экстремалей на многообразии.— ДАН СССР, 1953, т. 88, № 4, стр. 619—621.
- Фет А. И. О периодической задаче вариационного исчисления.— ДАН СССР, 1965, т. 160, № 2, стр. 287—289.
- Франкль Ф. Московская топологическая школа (исторический обзор развития топологии и значение московских работ в этой области).— Естествознание и марксизм, 1929, № 4, стр. 169—188.
- Фрум-Кетков Р. Л. Гомологические свойства прообразов точек при отображении многообразий, повышающих размерность.— ДАН СССР, 1958, т. 122, № 3, стр. 349—351.
- Фукс Д. Б. Двойственность Экмана — Хилтона и теория функторов в категории топологических пространств.— Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 2 (128), стр. 3—40.
- Фукс Д. Б. О естественных отображениях функторов в категории топологических пространств.— Мат. сб., 1963, т. 62 (104), вып. 2, стр. 160—179.
- Фукс Д. Б., Шварц А. С. К гомотопической теории функторов в категории топологических пространств.— ДАН СССР, 1962, т. 143, № 3, стр. 543—546.
- Фукс Д. Б., Шварц А. С. Циклические степени полиэдра и проблема вложения.— ДАН СССР, 1959, т. 125, стр. 285—289.
- Чернавский А. В. Гомеоморфизмы  $R^n$   $k$ -стабильны при  $k \leq n - 3$ .— Мат. сб., 1966, т. 70 (112), вып. 4, стр. 605—606.
- Чернавский А. В. Дополнение к статье «Конечнократные открытые отображения многообразий».— Мат. сб., 1965, т. 66 (108), вып. 3, стр. 471—472.
- Чернавский А. В. Изотопии в евклидовых пространствах.— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 6 (120), стр. 71—73.
- Чернавский А. В. Конечнократные открытые отображения многообразий.— Мат. сб., 1964, т. 65 (107), вып. 3, стр. 357—369.
- Чернавский А. В. Об особых точках топологических вложений многообразий и объединении локально плоских клеток.— ДАН СССР, 1966, т. 167, № 3, стр. 528—530.
- Чернавский А. В. О группе гомеоморфизмов евклидова пространства и топологических вложениях в евклидовы пространства.— Мат. сб., 1965, т. 68 (110), вып. 4, стр. 581—613.
- Чернавский А. В. О топологических вложениях полиэдров в евклидовы пространства.— ДАН СССР, 1965, т. 165, № 6, стр. 1257—1260.



- Чогошвили Г. С. Обобщенные произведения и пределы и их применение в теории гомологии. — Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 4 (30), стр. 23—34.
- Чогошвили Г. С. Изменение чисел Betti движущейся поверхности уровня. — ДАН СССР, 1939, т. 22, № 6, стр. 297—301.
- Чогошвили Г. С. О поверхностях уровня и областях меньших значений. — Труды Тбилисс. мат. ин-та, 1949, т. 17, стр. 203—243.
- Чогошвили Г. С. О поверхностях уровня и областях меньших значений функции, заданной на ограниченном многообразии. — ДАН СССР, 1939, т. 24, № 7, стр. 635—639.
- Чогошвили Г. С. О преобразованиях Шнирельмана. — ДАН СССР, 1941, т. 30, № 3, стр. 199—203.
- Шварц А. С. Гомологии пространства замкнутых кривых. — Труды Моск. мат. о-ва, 1960, т. 9, стр. 3—44.
- Шварц А. С. Гомологии пространства замкнутых кривых. — ДАН СССР, 1957, т. 117, № 5, стр. 769—772.
- Шварц А. С. Двойственность функторов. — ДАН СССР, 1963, т. 148, № 2, стр. 288—291.
- Шварц А. С. К гомотопической топологии банаховых пространств. — ДАН СССР, 1964, т. 154, № 1, стр. 61—63.
- Шварц А. С. Род расслоенного пространства. — Труды Моск. мат. о-ва, 1961, т. 10, стр. 217—272; 1962, т. 11, стр. 99—126.
- Шведов И. Доказательство теоремы о гомеоморфизме точечных множеств. — ДАН СССР, 1958, т. 122, № 4, стр. 566—569.
- Эльсгольц Л. Э. Длина многообразия и ее свойства. — Мат. сб., 1939, т. 5 (47), вып. 3, стр. 565—571.
- Эльсгольц Л. Э. Теория инвариантов, дающих оценку числа критических точек непрерывной функции, заданной на многообразии. — Мат. сб., 1939, т. 5 (47), вып. 3, стр. 559—564.
- Эльсгольц Л. Э. Точная оценка числа геометрически и аналитически различных критических точек. — Уч. зап. Моск. ун-та. Мат., 1952, вып. 163, т. 6, стр. 61—69.
- Engelking R., Sklyarenko E. G. On compactifications allowing extension of mappings. — Fund. math., 1963, t. 53, N 1, p. 65—79.
- Froloff S. et Elscholz L. Limite intérieure pour le nombre des valeurs critiques d'une fonction donnée sur une variété. — Мат. сб., 1936, т. 1 (43), вып. 5, стр. 701—706.
- Gordon V. On the minimal number of critical points of a real function defined on a manifold. — Мат. сб., 1938, т. 4 (46), вып. 1, стр. 105—113.
- Kolmogoroff A. Homologiering des Komplexes und des lokalbikompakten Raumes. — Мат. сб., 1936, т. 1 (43), вып. 5, стр. 701—706.
- Kolmogoroff A. Über der Dualität in Aufbau der kombinatorischen Topologie. — Мат. сб., 1936, т. 1 (43), вып. 1, стр. 97—102.
- Morse M. The calculus of variations in the large. New York, 1934.
- Pontrjagin L. A classification of mappings of the three-dimensional complex into the two-dimensional sphere. — Мат. сб., 1941, т. 9 (51), вып. 2, стр. 331—364.
- Pontrjagin L. A method of calculations of homology groups. — Мат. сб., 1942, т. 11 (53), вып. 1, стр. 3—14.
- Pontrjagin L. Products in complexes. — Мат. сб., 1941, т. 9 (51), вып. 2, стр. 321—330.
- Pontrjagin L. Sur le nombres de Betti des groupes de Lie. — Comptes Rendus Acad. Sci., 1935, t. 200, p. 1277—1280.
- Pontrjagin L. Sur les transformations des sphères en sphères. — Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens (Oslo, 1936), 1937, t. 2, p. 140.
- Pontrjagin L. Über der algebraische Inhalt topologischer Dualitätssatz. — Math. Ann., 1931, Bd 105, S. 165—205.
- Serre J.-P. Homologie Singulière des espaces fibrés. — Ann. of Math., 1951, Second ser., v. 54, N 3, p. 425—505.

**К главе X. Теория функций действительного переменного**

- А х и з е р Н. И. Конструктивная теория функций в Харьковском университете и Математическом институте (1917—1947).— Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 3 (19), стр. 158—192.
- А х и з е р Н. И. Лекции по теории аппроксимации. ГТТИ, М., 1947, 325 с.
- Б а р и Н. К. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961, 936 с.
- Б а р и Н. К. Тригонометрические ряды.— Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь—июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 164—177.
- Б а р и Н. К. Проблема единственности разложения функции в тригонометрический ряд.— Усп. мат. наук, 1949, т. 4, вып. 3 (31), стр. 3—68.
- Б а р и Н. К., Л я п у н о в А. А., М е н ь ш о в Д. Е., Т о л с т о в Г. П. Метрическая теория функций действительного переменного.— В кн.: Математика в СССР за 30 лет. 1917—1947. ГИТТЛ, М.—Л., 1948, стр. 256—287.
- Б е р н ш т е й н С. Н. Современное состояние и проблемы теории приближения функций действительного переменного посредством полиномов.— Труды Первого Всесоюз. съезда математиков (Харьков, 1930 г.). М.—Л., 1936, стр. 58—96.
- Б е р н ш т е й н С. Н. Экспериментальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. ОНТИ, М.—Л., 1937, 203 с.
- В и т у ш к и н А. Г. О многомерных вариациях. ГИТТЛ, М., 1955, 220 с.
- В и ш и к М. И., М ы ш к и с А. Д., О л е й н и к О. А. Дифференциальные уравнения с частными производными.— В кн.: Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 1. Физматгиз, М., 1959, стр. 563—636.
- Г е р о н и м у с Я. Л. Многочлены ортогональные на окружности и на отрезке. Физматгиз, М., 1958, 236 с.
- Г е р о н и м у с Я. Л. Теория ортогональных многочленов. Обзор достижений отечественной математики. ГИТТЛ, М.—Л., 1950, 164 с.
- Г л и в е н к о В. И. Интеграл Стильтьеса. ОНТИ, М.—Л., 1936, 216 с.
- Г о н ч а р о в В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. ОНТИ, М.—Л., 1934, 316 с. Изд. 2-е. ГИТТЛ, М., 1954, 328 с.
- Г о н ч а р о в В. Л. и Л а в р е н т ь е в М. А. Теория аналитических функций.— В кн.: Математика в СССР за 15 лет. ГТТИ, М.—Л., 1932, стр. 84—98.
- К о л м о г о р о в А. Н. Теория функций действительного переменного.— В кн.: Математика в СССР за 15 лет. ГТТИ, М.—Л., 1932, стр. 37—48.
- К о л м о г о р о в А. Н., Т и х о м и р о в В. М.  $\varepsilon$ -энтропия и  $\varepsilon$ -емкость множеств в функциональных пространствах.— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 2 (86), стр. 3—86.
- К о р о в к и н П. П. Линейные операторы и теория приближений. Физматгиз, М., 1959, 211 с.
- К у д р я в ц е в Л. Д. и Н и к о л ь с к и й С. М. О некоторых граничных свойствах функций многих переменных.— В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1961, стр. 84—92.
- К у д р я в ц е в Л. Д. и Н и к о л ь с к и й С. М. Теоремы вложения и их применение к решению эллиптических уравнений.— В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1961, стр. 87—109.
- Л е в и т а н Б. М. Почти периодические функции. Гостехиздат, М., 1953, 396 с.
- Л о з и н с к и й С. М., Н а т а н с о н И. П. Метрическая и конструктивная теория функций вещественной переменной.— В кн.: Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 1. Физматгиз, 1959, стр. 295—379.
- Л у з и н Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. ГИТТЛ, М.—Л., 1951, 551 с.
- М е н ь ш о в Д. Е. О сходимости по мере тригонометрических рядов.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1950, т. 32, стр. 3—99.
- М е н ь ш о в Д. и Л а в р е н т ь е в М. Успехи теории функций действительного переменного в СССР.— Мат. сб., 1928, т. 35, стр. 21—42.

- Натансон И. П. Конструктивная теория функций. ГИТТЛ, М.—Л., 1949, 688 с.
- Никольский С. М. Некоторые вопросы приближений функций полиномами.— В кн.: Международный математический конгресс в Амстердаме. 1954 г. Пер. с англ. и фр. под ред. С. В. Фомина. Физматгиз, М., 1961, стр. 259—281.
- Никольский С. М. О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 5 (101), стр. 63—114.
- Никольский С. М. Приближение многочленами функций действительного переменного.— В кн.: Математика в СССР за 30 лет. 1917—1947. ГИТТЛ, М.—Л., 1948, стр. 288—318.
- Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1945, т. 15, стр. 3—76.
- Никольский С. М. Приближение функций многих переменных полиномами.— Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1958, т. 2, стр. 33—34.
- Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. ГИТТЛ, М.—Л., 1950, 336 с.
- Ремез Е. Я. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Изд-во АН УССР, К., 1957, 454 с.
- Сборник работ по линейным методам суммирования рядов Фурье. Под ред. С. Б. Стечкина. Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1961, т. 62, 87 с.
- Соболев С. Л. Дифференциальные уравнения в частных производных.— В кн.: Математика в СССР за 30 лет. 1917—1947. ГИТТЛ, М.—Л., 1948, стр. 518—544.
- Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962, 255 с.
- Соболев С. Л. и Никольский С. М. Теоремы вложения.— Труды Четвертого Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1963, т. 1, стр. 227—239.
- Степанов В. В. Почти периодические функции.— Труды Всероссийского съезда математиков (Москва, 27 апреля — 4 мая 1927 г.), 1928, стр. 214—220.
- Талалаян А. А. Представление измеримых функций рядами.— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 5 (95), стр. 77—141.
- Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, М., 1960, 624 с.
- Тихомиров В. М. Работы А. Н. Колмогорова по  $\epsilon$ -энтропии функциональных классов и суперпозициям функций.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 5 (113), стр. 55—92.
- Толстов Г. П. О криволинейном и повторном интеграле.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1950, т. 35, стр. 3—104.
- Ульянов П. Л. О расходимости рядов Фурье.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 3 (75), стр. 75—132.
- Ульянов П. Л. Расходящиеся ряды Фурье.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 3 (99), стр. 61—142.
- Ульянов П. Л. Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов.— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 1 (115), стр. 3—69.
- Besicovitch A. Almost-periodic functions. Cambridge, 1932.

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аббасов Н. Т. 404  
 Абдуллаев Х. М. 619  
 Абель 296, 298, 546, 547, 552, 559, 686  
 Абецедарский Л. С. 618  
 Абрамян Б. Л. 200  
 Авдеева Н. А. 626  
 Авербух Б. Г. 524, 691  
 Авизашвили Д. З. 197  
 Агаев Г. Н. 215, 630, 663  
 Агню Р. 561  
 Агранович М. С. 212, 532  
 Агрономов Н. А. 31, 634, 638  
 Адамар Ж. 93, 156, 233, 239  
 Адамс 523, 524—526, 693  
 Адерихин П. Г. 637  
 Адо И. Д. 109, 278, 332, 339, 341, 342, 674  
 Адян С. И. 282, 319, 326, 327, 655, 674  
 Азатян В. Д. 619  
 Айзенберг Л. А. 661  
 Айзенштадт Н. Д. 179  
 Айзенштат А. Я. 324, 327, 653  
 Акивис М. А. 381—383, 385, 388, 686  
 Акилов Г. П. 642, 646  
 Акифиева Н. И. 640, 644, 648  
 Аюпян А. 46  
 Аюпян С. А. 200  
 Аксенова Н. Н. 636  
 Александер Дж. 474, 484—486, 488, 489, 491—493, 497, 498, 504, 505, 517  
 Александров А. Д. 73, 109, 117, 118, 129, 142, 154, 164, 169, 170, 180, 217, 264, 348, 370, 396, 408—415, 417, 419—424, 445, 467, 638, 645, 662, 674, 687, 691  
 Александров И. Г. 59, 60  
 Александров П. С. 21—23, 25, 53, 61, 66, 67, 71, 84, 94, 97, 99, 108—110, 115, 119, 121, 123, 127, 156, 161, 162, 164, 171, 176—179, 217, 277, 278, 342, 358, 438—440, 442—449, 451, 452, 454—457, 460, 461, 463—465, 467, 472, 478, 484—487, 492—495, 497—510, 531, 538, 629, 630, 632, 633, 639, 646—649, 653, 656, 657, 659—662, 665, 678 691—693  
 Александрян Р. А. 152, 153  
 Алексеев В. Г. 15, 30  
 Алексеев В. М. 179  
 Алексидзе М. А. 197  
 Аленицын Ю. Е. 639  
 Алиев М. М. 619  
 Алимов Н. Г. 366, 674  
 Алхимов М. И. 191  
 Альбер С. И. 182, 515, 692  
 Альпер С. Я. 183  
 Аманов Т. И. 592, 599  
 Амантаев Ж. 626  
 Амбарцумян В. А. 619  
 Амбарцумян Г. А. 199  
 Америо 614  
 Амирханов Х. И. 619  
 Амицура С. 315, 334  
 Амосов А. М. 46  
 Ампер 408, 421, 688  
 Андерсон 477, 478  
 Андреев К. А. 25, 425, 430, 431, 639, 654, 690  
 Андрианов А. И. 667  
 Андрианов А. Н. 253, 256,  
 Андрианов С. Н. 132, 562, 568, 639  
 Андриасов Р. С. 651  
 Андриенко В. А. 558  
 Андронов А. А. 25, 65, 68, 77, 78, 135, 157  
 Андронов И. К. 69, 128, 177, 633, 639, 644  
 Андронова-Леонтович Е. А. 182  
 Андрунакиевич В. А. 6, 204, 279, 282, 285, 332—336, 340, 629, 675  
 Аносов Д. В. 212, 529, 692  
 Антоновский М. Я. 201, 470, 504, 692  
 Антропов И. А. 619  
 Антропова В. И. 203  
 Антуан 474  
 Анфертьева Е. А. 228  
 Анфилов Г. 647, 649  
 Апарисио-Бернардо Э. 585  
 Аракелян Н. У. 200  
 Аргунов Б. И. 365, 675  
 Арешкин Г. Я. 364, 538, 675  
 Аржаников Н. С. 619, 663  
 Аржанных И. С. 113, 154, 201, 629  
 Арзуманян Г. С. 617

- Аринь Э. И. 194  
 Арифов У. А. 620  
 Армфельд Б. К. 42  
 Арнаутов В. И. 339, 675  
 Арнольд В. И. 176, 179, 217, 529, 536, 537, 692  
 Ароншайн 593, 597  
 Артин Э. 269, 275, 277, 287, 294, 303, 333, 338, 474  
 Артоболевский И. И. 27, 63, 70, 71, 115, 117  
 Арутюнян Н. Х. 200  
 Арутюнян Ф. Г. 200, 558, 560, 564, 565, 567, 568  
 Архангельский А. В. 176, 446—448, 453—455, 466, 675, 692  
 Арцимович Л. А. 629  
 Аршон С. Е. 276  
 Асваниви Р. 103  
 Атья 525  
 Ауберт 325  
 Ауэрбах 102, 105  
 Афанасьев А. В. 619  
 Ахизер А. И. 185  
 Ахизер Н. И. 34, 79, 82, 93, 100, 114, 142, 164, 189, 190, 217, 554, 571, 572, 574, 582, 585, 586, 588, 639, 640, 650, 651, 699  
 Ахмедов К. Т. 198  
 Ахунбаев И. К. 619  
 Ахундов А. М. 204, 629
- Бабаев Г. Б. 203  
 Бабенко К. И. 537, 562, 568, 572, 582, 584, 586  
 Бабич В. М. 181, 593, 595, 598  
 Бабкин А. Г. 633  
 Бабков И. М. 35  
 Баврин И. И. 662  
 Багаутдинов Г. Н. 656  
 Бадалян Г. В. 199  
 Базилевич И. Е. 128, 129, 639  
 Базылев В. Т. 663, 687  
 Байков А. А. 619  
 Бакельман И. Я. 421, 422, 654, 687  
 Баладзе Д. О. 509, 510, 692  
 Балашов А. Д. 626  
 Балашов Л. А. 565  
 Балезин С. А. 633  
 Балтага В. К. 82, 83, 639  
 Банах С. С. 40, 85, 102, 144, 535, 639  
 Баранова Г. П. 665  
 Баранович Т. М. 368, 675  
 Бараускас А. 194  
 Барашков К. И. 626  
 Барбан М. Б. 239, 242, 247, 668  
 Барбашин Е. А. 136, 193  
 Бардин И. П. 44, 60, 619
- Бари Н. К. 22, 24, 120, 124, 177, 536, 540—547, 550, 551, 553, 560—562, 565, 568, 572, 585, 639, 652—654, 699  
 Баркалая А. К. 197  
 Барон С. 629, 646  
 Бартель К. 40, 102, 105  
 Барышев Д. Г. 436  
 Басов В. П. 181, 645  
 Батыров Ш. Б. 619  
 Баутин Н. Н. 135, 182  
 Бахвалов Н. С. 537, 598  
 Бахвалов С. В. 122, 379, 639, 640, 643, 687  
 Бахман 248  
 Бахмутская Э. Я. 143, 666  
 Башмакова И. Г. 2, 127, 128, 162, 177, 632, 667  
 Бегл 509  
 Безбах С. А. 619  
 Безикович А. С. 15, 28, 609, 610, 613, 614, 700  
 Безносилов Я. Н. 619  
 Бекеев А. 638  
 Беклемишев Д. В. 388  
 Белинский П. П. 535  
 Белозеров С. Е. 183, 184, 626  
 Белопольский А. А. 644, 664  
 Белоусов В. Д. 204, 285, 367, 675  
 Белоусова В. П. 141  
 Белоцерковский О. М. 645  
 Белькинд Л. Д. 620  
 Бельтрами 373, 435  
 Бельтюков П. К. 430  
 Бенадо М. 307, 319  
 Бентковский И. И. 640  
 Берадзе А. А. 197  
 Берджесс Д. 228  
 Бердыев Т. Б. 620  
 Березанская Е. С. 640, 663  
 Березанский Ю. М. 139, 140, 185, 186, 187, 617  
 Березин И. С. 633  
 Березина Л. Я. 687  
 Берикашвили Н. А. 503, 504, 509, 665  
 Беришвили Г. Д. 509, 692  
 Берлинков М. Л. 364, 675  
 Берлов Н. М. 30  
 Берман Д. Л. 575, 580  
 Берман С. Д. 192, 285, 320, 321, 675  
 Бермант А. Ф. 71, 128, 178, 629, 640, 643  
 Бернал Д. 620  
 Бернсайд 158, 283, 302, 317, 320, 340, 679, 681  
 Бернулли 251, 670  
 Бернштейн С. Н. 13, 14, 16, 35—37, 53, 55, 61, 62, 74, 79, 82, 83, 87, 93, 96, 97, 99, 101, 115, 125, 131, 142, 156, 177, 185, 542, 547, 549,

- 553, 554, 566, 569—577, 579, 583—588, 595, 633, 640, 644, 699
- Бершак М. 653
- Бескин Н. М. 433, 640, 690
- Бесов О. В. 587, 593—596, 599, 602
- Беспамятных Н. Д. 633
- Бессель 37, 561, 562, 603
- Бессонов П. А. 178, 614, 617
- Бетти 484, 491, 492, 510, 513, 514
- Билимович А. 14
- Бильтаева Н. М. 620
- Бинг 446, 474, 480
- Биркгоф Г. 277, 279, 281, 365, 512
- Бирман М. Ш. 650, 654
- Бирюков А. П. 327
- Бицадзе А. В. 169, 170, 175, 641, 649
- Благовещенский Ю. В. 642
- Блажко С. Н. 115
- Бланк Я. П. 6, 82, 83, 142, 143, 189, 374—376, 632, 687
- Бланкеншип 474
- Близникас В. И. 194, 389
- Блюменталь О. 93
- Бляшке В. 93, 100, 408, 416
- Бобынин В. В. 26
- Бобынин М. Н. 143, 538
- Бовди А. А. 340, 675
- Богданов Ю. С. 193, 645
- Боголюбов А. Н. 2, 5, 6, 642
- Боголюбов Н. Н. 2, 33, 35, 65, 79—81, 100, 102, 108, 110, 117—119, 124, 138, 139, 141, 170, 171, 176, 177, 185, 191, 211, 217, 531, 609, 629, 641, 648
- Богомолец А. А. 138
- Богомолов С. А. 19
- Богораз В. Г. 19
- Богословский П. С. 626
- Боев Г. П. 30, 77, 109, 134, 641
- Бокс 544
- Бокуть Л. А. 332, 675
- Бокштейн М. Ф. 176, 179, 496, 505—507, 692
- Болдырев Н. Г. 171
- Болотов Е. А. 14
- Болтянский В. Г. 123, 124, 176, 201, 212, 470, 496, 508, 509, 518, 522, 692
- Боль П. Г. 50, 195, 214, 607, 608
- Больсен Е. М. 640
- Больцано 444, 458
- Бомпьяни 383
- Бонди И. Л. 538, 539, 551
- Бонне 409, 519
- Бор Г. 607—610, 614, 616
- Боревич З. И. 179, 207, 266, 284, 296, 317, 668, 675, 676
- Борель 443, 505, 520, 557, 569
- Борисов Б. С. 620
- Борисов Ю. Ф. 181, 422, 687
- Борисова В. В. 623
- Борисович Ю. Г. 183
- Борквель А. А. 149
- Боровков А. А. 170, 173
- Бороздкин К. Г. 232, 668
- Бортолотти Э. 100
- Ботт 516
- Боярский А. Я. 67
- Боярский Б. В. 173
- Брадис В. М. 136, 641
- Бразма Н. А. 103, 147
- Брайцев И. Р. 30, 78
- Брак 338
- Брамре 325
- Браславский И. Я. 626
- Браудер В. 527
- Браун М. 334, 335, 475, 479, 521
- Браун Э. 527
- Брауэр Л. 458, 459, 485, 491, 493—495, 497
- Брашман Н. Д. 690
- Бредихин Б. М. 241, 242, 668
- Бредихин Ф. А. 115
- Бредихина Е. А. 616, 617
- Бреус К. А. 139, 634, 645, 666
- Бржечка В. Ф. 82, 83, 571
- Бронштейн И. Н. 632
- Брудно А. Л. 532
- Брудной Ю. А. 598
- Брушлинский Н. К. 516
- Бубнов А. С. 626
- Бугаец П. Т. 587
- Бугров Я. С. 587, 599, 600
- Буймола Г. Л. 6
- Букреев Б. Я. 14, 34, 81, 141, 188, 207, 372
- Булгаков Б. В. 68
- Буницкий Е. Л. 13, 14
- Буль 201
- Бурбаки 328, 330, 331
- Бургатти П. 100
- Бурде М. В. 436
- Бурдина В. И. 520
- Буренков В. И. 595, 596
- Бурместер 428, 430, 690
- Бурстин Ц. Л. 42, 85, 383, 641
- Бурцев Г. В. 626
- Бусленко Н. П. 170, 171
- Бухштаб А. А. 89, 112, 177, 242, 668
- Быков В. Т. 620
- Быков Я. В. 155, 202
- Бырка Г. И. 620
- Быстров Н. А. 626
- Бычков В. П. 629
- Бэр 279, 303—305, 309, 335, 351, 364, 455, 533
- Бюшгенс С. С. 25, 69, 122, 164, 176, 371, 374, 375, 377, 378, 431, 641, 687, 690
- Бялыницкий-Бируля 509

- Вавилов П. П. 620  
 Вагнер В. В. 69, 77, 109, 134, 182, 207, 213, 284, 324, 325, 327—329, 331, 367, 370, 399, 404—406, 641, 645, 653, 676, 687  
 Вайнберг М. М. 128, 655  
 Вайнштейн А. Л. 646  
 Вайнштейн И. А. 453, 463, 648  
 Вакарчук Б. С. 191  
 Валеев К. Г. 189  
 Валескалин П. И. 620  
 Валиев А. К. 626  
 Валле-Пуссен Ш. 99, 533, 569, 577, 579, 584, 609  
 Вальфиш А. З. 88, 112, 150, 253, 257, 641, 668  
 Вальц Г. Б. 436  
 Ван-дер-Варден 318, 332, 333  
 Ван Кампен 346, 399  
 Варинг 94, 228—230, 233, 669, 671—673  
 Васильев А. В. 14, 17—19, 27, 51, 53  
 Васильев А. М. 176, 213, 378, 381, 388, 662, 687  
 Васильев В. В. 137, 184  
 Васильев Н. Н. 84, 143  
 Васильев Н. С. 14, 38  
 Васильева А. Б. 177  
 Васильева М. В. 388, 662  
 Вашакидзе Д. Р. 197  
 Вашарин А. А. 601, 604, 605  
 Веблен О. 484, 485, 492, 687  
 Веддербарн 275  
 Веденисов Н. Б. 442, 461, 510  
 Веденяпин Д. В. 395  
 Ведерников В. И. 183, 398, 399  
 Вейерштрасс 62, 444, 569, 584, 613  
 Вейль А. 52, 228, 230, 233—236, 240, 241, 339, 398, 408, 419, 450, 451, 470, 542, 554—559, 565, 566, 577, 596, 609, 610, 669, 671, 673  
 Векслер А. И. 365, 676  
 Векуа И. Н. 45, 87, 98, 111, 112, 117, 118, 149, 150, 161, 169, 170, 173, 174, 196, 197, 217, 417, 535, 626, 639, 641, 642, 654, 659, 687  
 Векуа Н. П. 111, 149, 150, 196, 197  
 Вельмин В. П. 14, 28, 76, 188, 286, 620, 642  
 Вениаминов В. Н. 533  
 Венков Б. А. 17, 93, 129, 247, 249—252, 254, 260—261, 264, 266, 286, 642, 649, 662, 668  
 Венков Б. Б. 5, 180, 271  
 Веняминов И. Н. 436  
 Вернадский В. И. 32  
 Верченко И. Я. 534, 538  
 Веселовский И. Н. 128  
 Ветер В. Н. 626  
 Ветчинкин В. 664  
 Виденский В. С. 572, 640  
 Виеторис Е. 493, 498, 505, 509, 510, 692  
 Виленкин Н. Я. 126, 128, 176, 280, 282, 350, 351, 365, 450, 504, 568, 633, 676  
 Вилкас Э. 194  
 Виляцер В. Г. 316  
 Виман 297  
 Винберг Э. Б. 271, 283  
 Винер 199  
 Виноград Р. Э. 655  
 Виноградов А. А. 366, 676  
 Виноградов А. И. 180, 240, 242, 668  
 Виноградов А. М. 6, 264, 523, 526, 693  
 Виноградов В. С. 641  
 Виноградов И. М. 17, 18, 28, 61, 62, 68, 74, 77, 94, 95, 97, 108, 124, 126, 156, 157, 160, 161, 170, 171, 177, 217, 219, 226—234, 236, 240, 241, 251, 257, 642, 660, 668, 669, 671, 674  
 Виноградов Л. К. 667  
 Виноградова И. А. 538, 539  
 Винтер А. В. 60  
 Витали 383, 535  
 Витт А. А. 336  
 Витушкин А. Г. 177, 536, 537, 699  
 Вишик М. И. 177, 211, 605, 633, 643, 660, 699  
 Вишневский Л. А. 38, 78  
 Владимиров Д. А. 642  
 Власов А. К. 14, 25, 55, 425, 426, 428—433, 642, 690  
 Воднев В. Т. 394  
 Волгин В. П. 620  
 Волков Д. М. 179, 181  
 Волков Е. А. 599  
 Волков И. И. 532  
 Волков Ю. А. 418, 419, 688  
 Волкова К. Е. 627  
 Волковысский Л. И. 144, 182  
 Вольберг О. А. 434  
 Ворович И. И. 135  
 Воронеж А. 657  
 Воронеж П. В. 14  
 Воронов С. 621  
 Вороновская Е. В. 74, 547, 571, 576  
 Вороной Г. Ф. 68, 129, 139, 140, 225, 226, 248, 258, 260—262, 265, 266, 276, 286, 668  
 Воскобойников Б. Н. 626  
 Воскресенский В. А. 690  
 Вранчану Г. 395  
 Вреден-Кобецкая Т. О. 652  
 Ву 526, 528  
 Вулих Б. З. 131, 179, 180, 365, 642, 655, 678  
 Вундгейлер А. 100

Выгодский М. Я. 69, 70, 93, 98, 127,  
128, 157, 629, 630

Габададзе Н. Г. 197

Габович Я. 629

Гаврилов А. Ф. 28, 629, 642, 663

Гаврилов В. 620

Гаврилов Н. И. 144

Гавурин М. К. 179, 655

Гагаев Б. М. 27, 75, 181, 561, 568,  
629, 630, 633, 639, 642, 656

Гайдук Ю. М. 143, 644, 645, 649

Гайнов А. Т. 340, 676

Галеркин Б. Г. 663

Галуа 28, 38, 75, 94, 100, 131, 141, 158,  
267—272, 275, 278, 280, 282, 284—  
299, 314, 316, 317, 677, 681, 684

Гальперн С. А. 176, 177, 179, 656

Гальярдо 593

Гамкредидзе Р. В. 520, 634, 693

Ган Ван Хао 315

Ганзбург И. М. 583

Гантмахер Ф. Р. 84, 128, 277, 278, 339,  
340, 363, 643, 685

Гапошкин В. Ф. 555, 562, 565

Гарсиа А. 556

Гаспарян Н. Г. 113

Гаусс К. Ф. 227, 242, 246, 248, 251,  
252, 255, 257, 260, 385, 409, 410,  
519, 671

Гахов Ф. Д. 76, 77, 132, 134, 135, 184,  
192, 193, 634, 643

Гвеленсиани С. 649

Гегелия Т. Г. 197

Гедель 313

Гейдельман Р. М. 382, 384, 687

Гельдер О. 298, 303, 310, 364, 366, 413,  
576, 591, 683

Гельфанд А. В. 86

Гельфанд И. М. 67, 68, 71, 72, 86, 110,  
119, 120, 123, 124, 126, 153, 158,  
176, 177, 217, 280, 347, 442, 562,  
633, 643, 685

Гельфер С. А. 182

Гельфонд А. О. 2, 23, 63, 64, 66—68,  
94, 97, 124, 126, 176, 177, 179, 237,  
238, 242—245, 572, 576, 585, 640,  
643, 653, 670, 673, 674

Гембаржевский М. Я. 662

Гензель К. 286

Георгиевский А. П. 627

Герасимова М. М. 638

Герасимович Б. П. 36, 93

Герглотц 413

Гермейер Ю. Б. 533, 546

Геронимус Я. Л. 36, 82, 83, 554, 571,  
574, 588, 699

Герчиков А. И. 335, 676

Гершгорин С. А. 73

Гизитдинов Х. Х. 620

Гильберт Д. 228, 235, 239, 244, 268—  
270, 285, 287, 294, 296, 297, 346,  
352, 356, 408, 413, 422, 426, 428, 450,  
451, 511, 528, 529, 561, 562, 670,  
672, 674

Гильдерман 596

Гишпократ 289

Гирш К. 304, 309

Гихман И. И. 141, 186, 188, 189, 643

Главацкий М. Е. 629

Главк 266, 671

Глаголев А. А. 428, 429, 430, 690

Глаголев Н. А. 98, 425—427, 430, 432,  
433, 435, 643, 690, 691

Глазман И. М. 189, 190

Глазунов Е. А. 432

Глебский Ю. В. 182

Глезерман 516

Гливенко В. И. 22, 26, 67, 278, 364,  
538—540, 630, 634, 643, 685, 699

Глисон 356, 450, 457

Глобенко И. Г. 596

Глускин Л. М. 6, 284, 324, 325, 327,  
328, 330, 331, 653, 661, 676

Глушко В. П. 598, 601, 602

Глушков В. М. 2 169, 185, 187, 188, 191, 209,  
279, 283, 284, 314, 329, 356—359,  
361, 363, 451, 649, 676

Гнеденко Б. В. 2, 67, 138, 139, 141, 144,  
157, 160, 176, 177, 185, 217, 568,  
630, 632—634, 641, 642, 648, 658—  
660, 663

Гоборский А. 100

Гоголадзе В. Г. 111

Гокиели Л. П. 45, 86—88, 112, 162,  
163, 196, 197, 654, 657

Голинский Б. Л. 553

Голо В. Л. 527, 693

Головин О. Н. 176, 179, 207, 277, 279,  
282, 305—307, 313, 319, 633, 676

Головина (Копейкина) Л. И. 282, 365,  
677

Головкин К. К. 595

Голод Е. С. 271, 283, 295, 317, 318, 335,  
670, 677

Голоквосчюс 193

Голомб С. 100

Голубев В. В. 22, 23, 29, 30, 55, 61, 63,  
66, 70, 108, 115, 124, 156, 531, 643,  
652, 664

Голубов Б. И. 532, 566, 567

Голузин Г. М. 73, 74, 129, 131, 643

Гольберг П. А. 279, 282, 308, 315

Гольдбах 63, 68, 97, 230, 231, 234, 240,  
671, 674

Гольдберг А. А. 192

Гольденберг Г. 659

Гольдовский Ю. А. 534, 644, 650

Гольцман В. К. 652



Гончаров В. Л. 35, 82, 570, 640  
 Гончаров И. Н. 627  
 Гопенгаузен И. Е. 583  
 Гопкинс 338  
 Горбачев Т. Ф. 620  
 Горбунов Б. Н. 435  
 Горгидзе А. Я. 45, 88, 150  
 Гордецкий Д. З. 6, 142, 143, 189, 428, 431, 690  
 Гордон В. 698  
 Гордон И. И. 489, 513, 516,  
 Горин Н. П. 29  
 Горчаков Ю. М. 314  
 Горшин С. И. 154  
 Горшков Д. С. 180, 264  
 Горячев Д. Н. 28, 644  
 Горячев Н. Н. 14, 78  
 Горячкин В. П. 27, 70  
 Граве Д. А. 13, 14, 16, 24, 32—35, 38, 41, 61, 79—81, 93, 100, 121, 275—277, 285, 286, 630, 634, 644, 677, 681  
 Граве П. П. 15, 30  
 Граев М. И. 120, 126, 280, 305, 350, 351, 364, 677  
 Графтио Г. О. 61  
 Гращенков Н. И. 620  
 Грдина Я. И. 37, 84  
 Гребенча М. К. 643  
 Гребенюк Д. Г. 48, 113, 644  
 Гренвилль 55, 62  
 Грепачевская Л. В. 542, 543, 559  
 Григорьян А. Т. 2, 127, 630  
 Гринцявичюс К. И. 147, 194, 382, 389, 687  
 Гринберг Г. А. 74  
 Гринберг И. П. 623  
 Гринберг Э. Я. 103  
 Гриндлингер М. Д. 285  
 Громмер Я. П. 42, 86  
 Громов М. Я. 436  
 Гроссман Д. П. 514, 693  
 Гросул Я. С. 620  
 Гротендик 273, 509  
 Грудо Э. И. 193  
 Груздев В. С. 634  
 Грузинцев Г. А. 35, 37, 644  
 Грушко И. А. 278, 306, 336, 677  
 Гугов Р. Х. 620  
 Гудивок П. М. 320  
 Гудиев А. Х. 602  
 Гудков Д. А. 182  
 Гулуа Ш. С. 197  
 Гурвиц 109  
 Гуревич 455, 456, 460, 463, 465, 466, 508  
 Гуревич В. 462, 471, 483, 693  
 Гуревич Г. Б. 128, 129, 277  
 Гурко З. В. 636  
 Гурса 99  
 Гусейнов А. И. 89, 151, 198, 630, 634  
 Гуштин Б. П. 636  
 Гюйгенс 93

Гюнтер Н. М. 14, 16, 17, 19, 51, 52, 72, 74, 93, 94, 129, 531, 599, 644, 664  
 Гюонио 93

Давыдов Н. А. 532  
 Данжуа А. 93, 534, 538, 539, 542, 544, 551, 564  
 Данилевский А. М. 83  
 Данилевский В. В. 690  
 Данилюк И. И. 173, 186, 641  
 Дарбу 373, 379, 386, 388, 416, 479  
 Даревский В. М. 532  
 Дарканбаев Т. Б. 627  
 Даукер 443, 445  
 Двали Р. Р. 630  
 Дворкина Е. А. 627  
 Дедекиннд 270, 275  
 Дезарг 365, 426, 427, 431  
 Дезин А. А. 593  
 Декарт 70  
 Делоне Б. Н. 2, 17, 18, 35, 52, 61, 62, 68, 72—74, 93, 108, 109, 118, 121, 126, 127, 156, 158, 160, 171, 176, 177, 253, 258—260, 264—266, 272, 273, 275, 276, 278, 280, 286, 291—293, 408, 630, 641, 642, 644, 664, 668, 670, 673, 677  
 Делоне Н. Б. 13  
 Демидович Б. П. 125, 655  
 Демулен 376  
 Демушкин С. П. 272, 293, 295, 670, 677  
 Денисюк И. Н. 639  
 Депман И. Я. 131, 644, 645, 647  
 Детловс В. К. 194  
 Дешевый М. А. 432  
 Джабраилов А. Д. 598, 602  
 Джавадов М. А. 89, 112, 151, 152, 198, 199, 396, 397, 404  
 Джамбулатова З. К. 621  
 Джанелидзе Г. И. 645  
 Джандильдин Н. 627  
 Джапаридзе И. С. 433  
 Джафаров А. С. 550, 553, 573, 603, 645, 646  
 Джваршейшвили А. Г. 197, 538, 539, 550, 551, 564  
 Джеймс 539  
 Джекобсон 335, 338  
 Джексон Д. 569, 572, 577, 579, 584, 587  
 Джонсон 334  
 Джрбашян М. М. 113, 152, 153, 199, 200, 215, 586  
 Дзагуров Д. А. 621  
 Дзядык В. К. 145, 186—188, 572, 574, 575, 582, 583, 588, 595, 655  
 Дианин С. А. 634

Дивинский 335  
 Дидидзе Ц. Е. 282, 336, 677  
 Диксон 248, 264, 275, 299, 316, 322, 338, 340  
 Динзе О. В. 637  
 Динник А. Н. 37, 39, 79, 84, 645, 651  
 Диофант 672  
 Дирихле 17, 66, 109, 119, 134, 135, 153, 227, 232, 234, 249—251, 257, 265, 267, 268, 275, 287, 533, 548, 596, 605, 607, 614, 668, 670, 671, 673  
 Дицман А. П. 276, 279, 282, 301—304, 308, 349, 362, 685  
 Дмитриев Н. И. 125  
 Добровольский В. А. 634, 660  
 Добрушин Р. Л. 125, 177  
 Добряков А. И. 432  
 Дойринг М. 296, 333  
 Долженко Е. П. 533  
 Долидзе Д. Е. 87, 88, 111, 150, 641  
 Дороницын А. А. 118, 119, 171, 645, 648  
 Дорофеев Г. В. 338, 677  
 Доукер 502  
 Дринфельд Г. И. 81, 82, 142, 143, 189, 639  
 Дробатенко В. С. 320  
 Дубнов Я. С. 26, 69, 113, 123, 176, 277, 395, 396, 398, 645, 646  
 Дубровский В. М. 538  
 Душек А. 100  
 Дынкин А. С. 212  
 Дынкин Е. Б. 121, 125, 126, 176, 177, 179, 218, 280, 282, 283, 363  
 Дьедона Ж. 317, 442  
 Дьяченко В. Е. 34, 79—81, 139—141, 645  
 Дэри Д. 305  
 Дюбуа 561, 562, 564  
 Дюпен 373, 384, 385

Евграфов М. А. 124  
 Евклид 392, 405  
 Евтушек Л. Е. 389  
 Егоров Б. Б. 166  
 Егоров В. И. 507  
 Егоров Д. Ф. 13, 14, 16, 21, 22, 25, 55, 61, 485, 530, 532, 630, 634, 652  
 Егоров И. П. 135, 185, 395, 401, 402, 687  
 Елизаров В. П. 334, 677  
 Елютин В. П. 621  
 Епифанова А. П. 641, 652, 657, 659  
 Ермаков В. П. 13—15, 35  
 Ерохин В. Д. 537  
 Еругин Н. П. 2, 72—74, 108, 110, 129, 131, 146, 192, 645, 659  
 Ершов Ю. Л. 281  
 Есенин-Вольпин А. С. 457

Ефимов А. В. 547—549, 553, 557, 579  
 Ефимов А. С. 627  
 Ефимов Б. 457, 693  
 Ефимов Н. В. 69, 78, 121, 122, 176, 179, 213, 219, 370, 399, 408, 422, 423, 638, 645, 646, 650, 688  
 Ефременко Л. М. 621, 627  
 Ефремович В. А. 123, 176, 468, 469

Жак Е. И. 552  
 Жаутыков О. А. 114, 154, 155, 202, 630, 656  
 Жданов А. А. 130  
 Жевлаков К. А. 338, 340, 677  
 Жегалкин И. И. 26  
 Жемайтис З. 49, 102, 146, 194  
 Жижиашвили Л. В. 552  
 Жилинскас Г. 146  
 Жилинский Е. 39, 102  
 Житомирский В. Г. 316  
 Житомирский О. К. 17, 424  
 Жмудь Э. М. 320, 677  
 Жордан К. 298, 303, 310, 316, 364, 490, 491, 493, 683  
 Жуков А. И. 333, 336, 677  
 Жуковский Н. Е. 12, 14, 17, 21, 22, 26, 46, 63, 66, 70, 115  
 Журавский А. М. 17, 636, 645  
 Жюгда Р. Ю. 619

Забродский С. С. 651  
 Завало С. Т. 319, 677  
 Загорский 550, 551  
 Загорский Т. Я. 192  
 Задирака К. В. 139, 140,  
 Зайцева М. Г. 282  
 Зайцева М. И. 366, 677  
 Зайченко П. А. 627  
 Закиров К. З. 627  
 Залгаллер В. А. 179, 180, 421, 638, 687  
 Залтс К. Я. 50  
 Заманский 580  
 Заморзаев А. М. 205  
 Занчевский И. М. 14  
 Запольская Л. Н. 30  
 Зарелуа А. В. 460, 462—464, 471, 508, 693  
 Зарецкий К. А. 324, 328, 677  
 Зарецкий М. А. 538  
 Зариский 438  
 Зарицкий М. О. 102, 144, 145, 192  
 Заславский И. Д. 200  
 Захидов Т. З. 621, 637  
 Заяц А. 389  
 Зворыкин А. А. 621  
 Зеебер 257  
 Зейлигер Д. Н. 13, 14, 27, 93, 645  
 Зейферт 518  
 Зеленко В. А. 621

Зенкевич И. Г. 650  
 Зерагия П. К. 197  
 Зетель С. И. 640  
 Зигель К. Л. 237, 245, 248, 251, 261  
 Зигмунд А. 103, 544, 552, 559, 576, 577  
 Зиза О. А. 557, 558  
 Зильберг 521  
 Зима Б. М. 627  
 Зиман 525  
 Зияев К. Г. 634, 638  
 Зморович В. А. 82, 189, 660  
 Золотарев Е. И. 17, 225, 248, 262, 266, 275, 568  
 Зубов В. И. 181  
 Зубов В. П. 127, 645  
 Зуховицкий С. И. 145, 584

Ибрагимов И. А. 246, 670  
 Ибрагимов И. И. 112, 151, 152, 198, 572, 574, 645, 646, 651  
 Иваницкая В. П. 640  
 Иванов А. А. 467, 469, 474, 693  
 Иванов В. К. 137  
 Иванов Е. А. 192, 193  
 Иванов И. И. 17  
 Иванов М. Н. 78  
 Иванова В. М. 467, 693  
 Ивановский Л. Н. 358, 451, 457, 525, 526, 693  
 Ивановский Л. И. 678  
 Ивасава К. 296, 366, 450  
 Ивахненко А. Г. 185, 187  
 Ивашов-Мусатов О. С. 545, 546  
 Ивницкий Т. Г. 431, 643  
 Игнатъев М. В. 646  
 Избелл 453  
 Икауниек Я. Я. 195  
 Илиадис С. 456, 457, 694  
 Ильин В. П. 587, 590, 594—596, 598, 602  
 Инасаридзе Х. Н. 369, 509, 510, 678  
 Иноземцев О. И. 573, 586  
 Иоффе А. Ф. 624, 623, 636, 652  
 Исакова О. В. 648  
 Искандер А. А. 368  
 Искандеров Р. И. 635  
 Ишлинский А. Ю. 2, 66, 70, 98, 138, 139, 141, 172, 176, 177, 185, 646, 649, 659

Каазик Ю. Я. 195, 196, 629  
 Кабанов И. И. 406  
 Кабилов А. Я. 621  
 Кабулов В. К. 202  
 Кавада К. 272, 295, 672  
 Кавун И. Н. 646  
 Каган Б. М. 200  
 Каган В. Ф. 13, 14, 25, 26, 37, 55, 69,

84, 93, 98, 100, 121, 123, 283, 284, 370, 392—394, 396, 402, 646, 688  
 Каган-Шабшай Я. Ф. 20  
 Каждан З. Н. 564  
 Каждан Я. М. 463, 693  
 Казимирский П. С. 192  
 Какутани 350  
 Каландия А. И. 196, 197  
 Калашников А. Г. 666  
 Каллинг Р. 644  
 Калужнин Л. А. 6, 141, 188, 209, 210, 284, 305, 306, 315, 642, 685  
 Кальдерон 597  
 Калягина Н. А. 636  
 Камке 235  
 Кангро Г. Ф. 103, 148, 195, 532, 571, 646, 667  
 Кантор 458, 561  
 Канторович Л. В. 24, 72—74, 100, 109, 110, 129, 131, 169, 170, 172, 173, 180, 181, 365, 533, 576, 585, 641, 646, 655, 662, 678, 686  
 Каплан С. 503  
 Капланский 337  
 Капсукас В. 147  
 Каракеев К. К. 621  
 Карапетян С. К. 621  
 Каратеодори 406  
 Карацуба А. А. 235, 670  
 Каргаполов М. И. 170, 171, 173, 284, 314, 315, 319, 321, 366, 678  
 Каргин Д. И. 432  
 Каримов Р. Х. 627  
 Карлесон Л. 541  
 Каролинская Л. Н. 364, 678  
 Карпелевич Ф. И. 283  
 Каррыев А. А. 629  
 Картавцов И. М. 636  
 Картап А. 317, 520  
 Картап Э. 93, 100, 339, 374, 379, 382, 384, 386, 387, 389, 390, 405, 407, 517, 519, 524  
 Кары-Ниязов Т. Н. 90, 91, 113, 154, 201  
 Касаткин В. 627  
 Касименко А. К. 619  
 Касперович И. И. 621  
 Катетов 461, 462  
 Катилос П. 49, 102, 193, 194  
 Кац 672  
 Кацивадзе И. Н. 197  
 Качмаж С. 40, 85, 102, 557, 564  
 Квальвассер В. И. 630  
 Квеселава Д. А. 111, 196, 197  
 Кедров Б. М. 620, 621,  
 Келдыш Л. В. 124, 176, 455, 473, 475—478, 480, 639, 646, 652, 678, 693  
 Келдыш М. В. 66, 70, 71, 89, 97, 106, 108, 124, 152, 156, 159, 169, 177, 208, 531, 570, 599, 604, 621, 622, 630, 647, 650, 654, 659

- Келер Э. 100, 393, 402  
 Келли 509  
 Кельберт С. Л. 644  
 Кемпбел 352  
 Кемписты С. Я. 49, 103  
 Кемхадзе Ш. С. 197, 285  
 Кеплер 70  
 Кервер 522, 526, 527  
 Кернаценская Т. М. 627  
 Кете 335  
 Кибель И. А. 94, 645, 648  
 Кикнадзе Г. И. 628  
 Кикодзе Э. Б. 282  
 Кильчевский Н. А. 98, 142, 185, 647  
 Ким Е. И. 202  
 Киприянов И. А. 598, 601, 603, 607  
 Кирикова Н. Н. 637  
 Киртадзе Г. А. 197  
 Киселев А. А. 250, 670  
 Кишкина З. М. 282, 305  
 Кишкина Л. С. 430, 431  
 Клаузен 289, 290  
 Клейн Д. 298  
 Клейн Ф. 134, 287, 296, 403, 406, 426  
 Клейнфельд 338  
 Клиффорд 322, 325, 404  
 Клоков Ю. А. 195  
 Клостерман 242, 254, 256, 668  
 Князев Г. А. 10  
 Ковальчук И. М. 192  
 Ковальчук Л. В. 6  
 Кованцева Г. М. 628  
 Кованцов Н. И. 188, 379—381, 632, 688  
 Кованько А. С. 6, 38, 46, 89, 136, 144, 192, 609, 611, 614, 617, 647, 662  
 Когаловский С. Р. 285, 325, 367, 678  
 Когония П. Г. 197, 264, 671  
 Кодаци 385  
 Козлов В. Я. 170, 534, 545, 547, 552, 560, 562, 564, 568  
 Козловцев С. Г. 533  
 Козо-Полянский Б. М. 637  
 Кокилашвили В. М. 553  
 Кокин Л. 657  
 Кокорин А. И. 366, 678  
 Колмогоров А. Н. 22, 24, 25, 63, 67, 68, 78, 84, 94, 97, 98, 100, 101, 108, 114, 115, 121, 124, 125, 127, 157, 160, 164, 170, 176, 177, 179, 218, 247, 278, 280, 426, 439, 440, 442, 463, 477, 488—490, 497, 499, 503, 505, 517, 531, 532, 534, 536—541, 543, 544, 546, 549—551, 554, 556, 570, 575, 581, 583, 584, 640, 643, 647, 648, 653, 655, 657, 659, 661, 663, 686, 691, 698—700  
 Колобов А. М. 665  
 Колосов Г. В. 14, 17, 647  
 Колотов С. М. 436  
 Кольман Э. 127  
 Кольцов А. В. 10, 622, 624  
 Комаров В. Л. 622  
 Комаров В. М. 166  
 Компаниец В. П. 480, 693  
 Кон 264, 325, 333  
 Кон А. А. 436  
 Кондратьев В. А. 599  
 Кондрашев В. И. 590, 596  
 Кононков А. Ф. 632  
 Коноплев В. П. 554  
 Конторович П. Г. 76, 77, 136, 182, 209, 278, 279, 283, 304, 309, 312, 314, 315, 324—326, 364, 647, 678  
 Конфедератов И. Я. 620, 622  
 Кон-Фоссен С. Э. 412, 413, 422, 423, 688  
 Конюшков А. А. 553, 587  
 Копытов В. М. 366, 678  
 Корбут М. К. 628  
 Коренблюм Б. И. 139, 140, 188  
 Коржинек В. 304  
 Корицкий Г. В. 639  
 Коркин А. Н. 225, 248, 262, 568  
 Корнейчук Н. П. 191, 537, 582, 583  
 Коробейник Ю. Ф. 183  
 Коробов Н. М. 124, 161, 177, 233, 235—237, 633, 670, 671  
 Коровкин П. П. 136, 550, 554, 580, 700  
 Королев Ф. Ф. 628  
 Королевич А. И. 436  
 Королюк В. С. 186, 187, 643  
 Коротков В. Б. 596, 602  
 Корпут 668  
 Косачевская Е. А. 376  
 Космодемьянский А. А. 115, 664  
 Костин В. И. 144, 647  
 Костовский А. Н. 647  
 Кострикин А. И. 218, 283, 318, 340, 678  
 Костюченко А. Г. 562  
 Котельников А. П. 13, 14, 26, 34, 35, 109, 399, 430, 648  
 Котов И. И. 435, 436, 665  
 Кочина П. Я. (см. Полубаринова-Кочина)  
 Кочин Н. Е. 62—64, 73, 97, 648  
 Коши 63, 155, 169, 408, 413, 539, 544  
 Кошляков В. Н. 187  
 Кошляков Н. С. 17, 38, 61, 62, 648  
 Кравец Т. П. 630  
 Кравченко-Бережной Р. А. 633  
 Кравчук М. Ф. 34, 41, 79—82, 100, 277, 634, 648, 657  
 Крамар Ф. Д. 154, 155, 202  
 Краснер М. 296  
 Красносельский М. А. 133, 139, 183, 523, 648  
 Красовский Н. И. 136  
 Крейн М. Г. 79, 83, 84, 111, 139, 140, 144, 185, 191, 211, 219, 562, 568, 582, 586, 588, 639, 648, 655, 666

- Крейн С. Г. 133, 139, 183, 598, 601  
 Крейнес М. А. 648  
 Кремон 430  
 Кржижановский Г. М. 57, 622, 623  
 Кристоффель 404, 408, 418  
 Кронекер 251, 269  
 Кронрод А. С. 535, 536  
 Кропотков А. И. 632  
 Крот А. М. 436  
 Кротов В. А. 622  
 Круазо 322, 328, 333, 334  
 Круаль 276, 294, 301  
 Круминь В. А. 628  
 Круминг П. Д. 331  
 Круш 433, 435  
 Кручкович Г. И. 394, 395, 402, 688  
 Крыжановский Д. А. 38, 84  
 Крылов А. Н. 15, 18, 64, 129, 648, 649, 664  
 Крылов В. И. 72, 73, 100, 129—131, 146, 192, 575  
 Крылов Н. М. 32—34, 38, 51, 61, 65, 79, 80, 100, 108, 139, 575, 648, 649  
 Кубилюс Й. П. 2, 146, 193, 194, 242, 246, 247, 671  
 Кудрявцев В. А. 649  
 Кудрявцев Л. Д. 6, 128, 177, 503, 535, 538, 592, 595, 599—607, 641, 655, 693, 699  
 Кудрявцев П. С. 622  
 Кузнецов И. В. 620  
 Кузнецов П. И. 652  
 Кузьмин Р. О. 17, 28, 117, 119, 243, 246, 247, 585, 630, 640, 649, 651, 671  
 Кузьминов В. И. 358, 451, 457, 507, 508, 678, 693, 694  
 Куклес И. С. 154, 201, 634  
 Кулаков А. А. 276, 301, 303, 649, 686  
 Куликов Л. Я. 278, 284, 306, 307, 678  
 Куликов С. М. 637  
 Куликовский П. 634  
 Куммер 242, 270, 272, 273  
 Купрадзе В. Д. 45, 86—88, 111, 149, 150, 196, 197, 649  
 Купревич В. Ф. 622  
 Кушцов Н. П. 134, 182, 616  
 Курант 99  
 Куратовский К. 40, 438, 460, 461, 504, 694  
 Курбатов В. А. 182  
 Куренский М. К. 33, 34, 182  
 Курнаков Н. С. 434  
 Курочкин В. М. 282, 335, 336, 678  
 Курош А. Г. 6, 23, 68, 71, 77, 121, 158, 176, 179, 204, 209, 276, 277, 278—282, 301—310, 312—316, 319, 324, 334—336, 349, 360, 364, 368, 369, 449, 486, 510, 630, 632, 634, 635, 640, 649, 653, 666, 676, 678, 679, 685, 686  
 Кутыев К. М. 366, 679  
 Куфарев П. П. 79, 137, 649  
 Кухтенко А. И. 185, 187  
 Кучмар М. И. 654  
 Кэли 338, 340  
 Лаврентьев М. А. 22, 24, 52, 66, 70, 79, 87, 89, 94, 97, 100, 106, 108, 110, 124, 138, 141, 157, 161, 164, 169, 170, 173, 177, 185, 220, 531, 535, 570, 622, 630, 639, 641, 649, 650, 659, 699  
 Лаврова Р. С. 430, 431  
 Лаггер 553  
 Лагранж 248, 257, 260, 298, 405, 574, 575, 579  
 Ладыженская О. А. 129—131, 171, 179—181, 211, 650, 654, 659  
 Ладыженский М. Д. 650  
 Лазарев П. П. 644, 649, 652, 664  
 Лазаренко Е. К. 628  
 Лаковская Р. 102  
 Лактионов А. Ф. 666  
 Ламбек 334  
 Ламбин Н. В. 86, 145  
 Ландау Э. 289  
 Ландис Е. М. 176, 528, 657, 694  
 Ланской Д. Н. 665  
 Лапин А. И. 270, 273, 274, 671  
 Лапиров-Скобло М. Я. 622  
 Лапко А. Ф. 91, 95, 159, 160, 162, 632  
 Лашлас 247, 605, 607  
 Лаппо-Данилевский И. А. 18, 61, 73, 93, 100, 650  
 Лаптев Б. Л. 76, 133, 181, 213, 399, 400, 635, 650, 656, 688  
 Лаптев Г. Ф. 176, 179, 213, 370, 377, 382, 385—391, 662, 688  
 Лаптева Д. Г. 639  
 Латышев В. Н. 337, 679  
 Латышева К. Я. 81, 82, 141, 650  
 Лашенов М. П. 430  
 Лебег А. 85, 93, 443, 458, 491, 493, 530, 531, 538, 540, 544, 546, 550—552, 557, 558, 569, 575  
 Лебедева Н. К. 652  
 Лебедев С. А. 119, 187  
 Лебедев Т. С. 666  
 Лебедь Г. Н. 572, 583  
 Леви Г. 408, 419  
 Леви Ф. В. 318, 339  
 Левин 525, 526  
 Левин Б. В. 671  
 Левин Б. Ю. 666  
 Левин Б. Я. 85, 190, 242, 572, 586, 613, 614, 639, 650  
 Левин В. И. 639  
 Левин С. С. 561, 644, 650

- Левитан Б. М. 83, 108, 120, 126, 128, 176, 177, 586, 609, 610, 612—614, 616, 617, 651, 699
- Левицкий В. И. 41, 102, 144, 145, 335
- Левшенко Б. Т. 465, 466, 694
- Левшин Б. В. 622
- Левшин В. Л. 651
- Лежандр 232, 248, 253, 670
- Лезье 333, 334
- Лейбензон Л. С. 15, 46, 61, 70, 651
- Лейбин А. С. 189, 412, 414, 688
- Лейбман Э. Б. 635
- Лейниекс Э. Ю. 50, 103
- Ленин В. И. 9—11, 29, 52, 128, 166, 618, 626, 628, 637
- Леонидов К. С. 637
- Леонов М. Я. 144
- Леонтович М. А. 25
- Леонтович-Андропова Е. А. 78
- Леонтьев А. Ф. 135, 653
- Лепский М. М. 651
- Лерэ 452, 509, 517, 520
- Лесохин М. М. 331, 332, 679
- Лёфлер 673
- Лешпец С. А. 94, 464, 484, 492, 493, 498
- Ли С. 75, 80, 109, 120, 121, 218, 298, 318, 332, 339—342, 346, 347, 352, 356—360, 363, 373, 375, 378, 388—391, 397, 399, 400, 403, 405—407, 450, 511, 516, 674, 678, 680, 685, 688
- Либбер А. Е. 77, 134, 324, 328, 399, 406, 641, 688
- Либберман И. М. 423, 424, 688
- Либман 408, 413, 416
- Ливчак Я. Б. 367, 679
- Лившиц А. Х. 279, 305, 325, 364, 368, 369, 679
- Лившиц М. С. 143
- Лигин В. Н. 27
- Лиепинь А. Я. 195
- Лизоркин П. И. 594, 597, 598, 601, 605
- Линделеф 445
- Линдемманн Ф. 243
- Линник Ю. В. 2, 5, 74, 108, 120, 129, 131, 169—171, 179, 180, 217, 218, 233—235, 239—241, 245, 247, 248, 251, 254—257, 640, 642, 643, 648, 651, 653, 658, 661, 665, 668, 671, 674
- Лионс Ж. 597
- Липкина З. С. 339, 679
- Липшиц 417, 569, 575—477, 584, 616
- Литтлвуд Дж. Э. 228, 230, 241, 242, 254, 256, 593, 668
- Лиувилль 251, 253, 561, 577, 596
- Лихтенштейн Л. 93
- Лихтман А. И. 316
- Лобачевский Н. И. 16, 25, 26, 51, 52, 77, 109, 115, 121, 134, 141, 158, 188, 256, 261, 264, 403, 412, 414, 432, 435, 668, 671
- Лодочников В. Н. 434
- Лозинский С. М. 108, 129, 130, 180, 181, 547, 548, 550, 552, 562, 570, 573, 575, 580, 585, 637, 651, 655, 700
- Лойцянский Л. Г. 651
- Локуциевский О. В. 461, 477, 694
- Локшин А. С. 651
- Ломадзе Г. А. 197, 253, 641
- Ломджария Н. Ф. 197
- Ломницкий А. 40, 102, 105
- Лопатинский Я. Б. 89, 112, 144, 145, 152, 185, 186, 191, 285
- Лопшиц А. М. 86, 277, 408, 433, 645, 646
- Лоренц 120
- Лоренц А. А. 195
- Лосик М. В. 406
- Лубсанов Д. Д. 622
- Лузин Н. Н. 13, 14, 21—24, 30, 53, 61, 62, 66, 68, 99, 101, 110, 120, 124, 164, 372, 485, 531—533, 536, 538—544, 546, 547, 556, 557, 564, 650, 652, 699
- Луканкин Г. Л. 661
- Лукашевич Н. А. 193
- Лукомская А. М. 637
- Лукомская М. А. 145
- Лукомский Я. И. 652
- Лумисте Ю. Г. 149, 195, 629, 688
- Лунц А. А. 461
- Лурье А. И. 131, 653
- Лурье А. Л. 652
- Лусис А. Я. 103, 147, 630
- Лутченко А. И. 628
- Лучка А. Ю. 187
- Лыкова О. Б. 187
- Любич Ю. И. 189
- Люстерник Л. А. 22, 24, 63, 66, 68, 69, 91, 94, 95, 100, 117, 119, 123, 125, 126, 159, 160, 162, 164, 176, 177, 424, 511—515, 523, 531, 613, 632, 635, 639, 640, 650, 652—654, 657, 660, 688, 693, 694
- Лютикас В. 194
- Лянце В. Э. 192, 614
- Ляпин Е. С. 74, 131, 159, 179, 180, 209, 278, 280, 284, 305, 322—324, 326—331, 654, 661, 679
- Ляпунов А. А. 24, 124, 169, 170, 173, 210, 646, 656, 699
- Ляпунов А. М. 13, 15, 17, 22, 51, 65, 129, 136, 163, 202
- Магнарадзе Л. Г. 150, 197
- Мазур Б. 475

- Мазья В. Г. 596  
 Майер 383  
 Майер А. Г. 78, 135  
 Майзель В. М. 79, 98  
 Майоров В. М. 620  
 Майстров Л. Е. 177  
 Макдональд 597  
 Маккой 335  
 Маклейн С. 280, 281, 304, 313, 317, 368, 506, 517, 520, 521, 523  
 Максимов А. А. 622  
 Максимов Л. 666  
 Малаховский В. С. 184, 385, 386, 389, 688  
 Малкин И. Г. 136, 653  
 Малеев В. А. 31, 78  
 Малер К. 247, 274, 672  
 Мальцев А. А. 176, 504  
 Мальцев А. И. 68, 78, 109, 136, 158, 169, 170, 172, 175, 184, 205, 209, 219, 278—281, 304, 305, 309, 311—315, 323—325, 327, 332, 333, 335, 337, 339, 340, 349, 351—354, 357, 361, 363, 366—368, 450, 647, 653, 664, 677, 679, 680, 682, 686  
 Малышев А. В. 5, 180, 254—256, 266, 642, 651, 671  
 Малявко К. Ф. 565  
 Мамедалиев Ю. Г. 622  
 Мамедов Р. Г. 550, 645, 646  
 Мамедов Я. Д. 198  
 Мандельштам Л. И. 37  
 Манджавидзе Г. Ф. 150, 196, 197  
 Мандзюк А. И. 430, 690  
 Мандрыка А. П. 656  
 Маневич В. А. 430, 431, 690  
 Мани Г. М. 197  
 Манин Ю. И. 176, 177, 220, 273, 274, 293, 671  
 Мани 324, 325  
 Мантре 380  
 Манусевич А. М. 623  
 Маргулис А. Я. 640, 663  
 Мардешич С. 462, 464  
 Марджанишвили К. К. 87, 88, 169, 170, 233, 235, 236, 642, 671, 672  
 Маркевич А. П. 628  
 Марков А. А. 14, 15, 17, 73, 74, 119, 120, 129, 131, 142, 154, 158, 159, 170, 176, 177, 217, 225, 237, 248, 262—264, 266, 280, 319, 326, 344, 349, 350, 354, 450, 473, 553, 568, 570, 571, 588, 653, 668, 671, 680, 694  
 Марков В. А. 568  
 Маркс К. 126, 618  
 Маркушевич А. И. 2, 66, 124, 125, 159, 160, 164, 176, 177, 630, 632, 643, 649, 653, 667  
 Мартиросян Р. М. 153, 199  
 Мартынов А. В. 183  
 Мартынов Д. Я. 627  
 Марцинкевич Ю. 103, 544, 552, 614  
 Марчевский М. Н. 35, 36, 82, 83, 142, 143, 635  
 Марченко А. Р. 74  
 Марченко В. А. 142, 143, 185, 189, 190, 211, 586, 613, 651, 653  
 Марчук Г. И. 173  
 Маслов Д. П. 637  
 Маслов О. В. 637  
 Масси 525  
 Матвеев В. А. 567  
 Матвеев И. В. 552  
 Матузевич А. И. 213  
 Матулионис Й. 194  
 Матулис В. 194  
 Матулис Ю. Ю. 623  
 Махарадзе Л. М. 282, 360, 680  
 Махмудов А. С. 553, 563  
 Мацкина Р. Ю. 646  
 Мдзинаришвили Л. Д. 510, 694  
 Медведев М. Ю. 633  
 Медер А. Р. 50, 103  
 Мейман Н. Н. 109, 278, 572, 586  
 Меленцов А. А. 359, 680  
 Меликов К. В. 637  
 Меликулов Р. 623  
 Мельник С. И. 86, 182  
 Менелай 690, 691  
 Менделеев Д. И. 20  
 Менгер 428, 458, 464, 477, 478, 494, 495, 497  
 Менье 373  
 Меньшов Д. Е. 22—24, 30, 110, 119, 120, 124, 176, 177, 199, 217, 536, 539—541, 545—547, 552, 554—558, 560, 635, 639, 653, 654, 699  
 Мергелян С. Н. 2, 119, 120, 124, 152, 170, 199, 200, 585, 654  
 Мерзляков Ю. И. 632  
 Мерман Г. А. 661  
 Мерцалов Н. И. 27, 70  
 Мецхваришвили Я. Г. 197  
 Мещерский И. В. 14  
 Микеладзе М. Ш. 196, 197  
 Микеладзе Ш. Е. 45, 87, 88, 112, 149, 150, 196, 197  
 Миллер 300  
 Миллер В. О. 628  
 Милнор Дж. 473, 505, 516, 522, 524—527  
 Мильман Д. П. 339, 348, 680  
 Миндинг 408, 413  
 Минеев М. П. 248, 672  
 Минковский В. Л. 237, 248, 258, 259, 262, 264, 266, 290, 408, 413, 418—420, 652, 671, 672, 683  
 Миракьян Г. М. 144  
 Миранда 419  
 Миролюбов А. А. 182  
 Митропольский А. К. 74, 131

Митропольский Ю. А. 2, 139, 141, 142, 185—188, 191, 641, 648, 650  
 Митюк И. Н. 187  
 Митягин Б. С. 566, 595  
 Михайлов Л. Г. 156, 203  
 Михлин С. Г. 129, 130, 180, 181, 654  
 Мицкявичус-Капсукас В. 49  
 Мишина А. П. 282  
 Мищенко А. С. 445, 447, 694  
 Мищенко Е. Ф. 503, 639, 657  
 Мкртчян С. С. 623  
 Млодзеевский Б. К. 25  
 Модзалевский Л. Б. 157  
 Мозжерова Н. И. 599  
 Моисеев Н. Н. 645  
 Мойс 474  
 Мокрищев К. К. 183, 184  
 Молетотов И. А. 623  
 Молин Ф. Э. 31, 78, 275  
 Моллаков М. 204  
 Молодший В. Н. 128  
 Монастыршин И. О. 665  
 Монж 70, 408, 421, 689  
 Монтгомери 356, 450, 478  
 Монтель П. 93, 595  
 Моран С. 307, 319  
 Моргулис 529  
 Морделл 273, 274  
 Мордухай-Болтовской Д. Д. 14, 28, 76, 134, 157, 430, 431, 435, 635, 690, 691  
 Морит 453  
 Морозов В. В. 109, 132, 278, 296, 298, 340, 344, 343, 363, 664, 680, 681  
 Морозов М. И. 584  
 Морозова Н. Н. 635  
 Морс М. 513—516, 698  
 Моторный В. П. 583  
 Моторный Л. Т. 376  
 Мочульский Е. Н. 364, 680  
 Мур 505  
 Мурадов М. М. 204  
 Муратов Х. 659  
 Мухелишвили Н. И. 2, 43—45, 55, 63, 84, 86, 87, 98, 111, 112, 150, 196, 197, 208, 215, 217, 623, 647, 654  
 Муфанг 338  
 Мchedlishvili Е. А. 433  
 Мысовская И. П. 651  
 Мышкис А. Д. 147, 189, 190, 195, 656, 699  
 Мюнтц Г. М. 72, 94  
 Мюрсепи П. В. 623  
 Мягкова Н. Н. 279, 282, 311, 315, 681

Наан Г. И. 619  
 Навакатилян О. Н. 46, 47  
 Нагата 338, 446, 464, 465  
 Нагорный Н. М. 653

Надь 586  
 Назаров Н. Н. 90, 91, 113, 114, 654, 658  
 Назарова Л. А. 320  
 Наймарк М. А. 120, 126, 280, 655  
 Накаяма 350  
 Нарышкина Е. А. 655  
 Натансон И. П. 74, 129, 130, 179, 181, 547, 548, 550, 553, 554, 570, 579, 631, 649, 651, 655, 662, 699, 700  
 Наумов А. Л. 142  
 Наумов И. Н. 143  
 Наумович Н. В. 431, 435, 691  
 Нафталевич А. 147, 194  
 Небелинг 460, 464  
 Неванлинна Р. 199  
 Нейман 66, 356  
 Нейман Б. 304, 319, 320, 366  
 Нейман П. 320  
 Нейман Х. 320  
 Неймарк Ю. И. 135, 182  
 Некрасов А. И. 30, 61, 62, 65, 96, 655, 664  
 Немыцкий В. В. 68, 125, 184, 204, 542, 635, 655, 660, 694  
 Нересян А. Б. 200  
 Несмеянов А. Н. 623  
 Несторович Н. М. 76, 134, 644, 655  
 Нетер Э. 277, 296, 333, 364  
 Нечаев В. И. 235, 672  
 Никифоров А. В. 623  
 Никишин Е. М. 556, 559, 565  
 Никлиборц В. 40  
 Николадзе Г. Н. 43—45, 86, 430  
 Николаев А. 658  
 Николаев В. Ф. 562, 580  
 Николаев П. В. 136, 182  
 Николаева А. Г. 655  
 Николаенко М. А. 82, 374  
 Николаи Е. Л. 19  
 Николаишвили В. В. 694  
 Николаишвили В. П. 504  
 Никольский С. М. 5, 84, 124, 128, 143, 171, 177, 547—550, 569, 570, 572—574, 579—583, 587, 591—593, 595—599, 605, 655, 699, 700  
 Никольский Ю. С. 601, 603, 606, 607  
 Никоноров К. В. 623  
 Нильсен 319  
 Нисневич В. Л. 86, 304  
 Новиков П. С. 119—121, 124, 169, 171, 176, 177, 282, 307, 318, 319, 531, 652, 655, 681  
 Новиков С. П. 6, 170, 176, 212, 220, 473, 475, 524—529, 633, 694  
 Новоселов П. К. 623  
 Новоселов С. И. 639  
 Норден А. П. 69, 132, 160, 181, 370, 395, 398—400, 404, 635, 650, 656, 658, 688  
 Нужин М. Т. 132



Нурмухамедов М. 623  
Нуут Ю. Ю. 50, 103, 148  
Нуцубидзе Ш. И. 623  
Ньюмен М. 473, 478  
Ньютон И. 33, 115, 251

Обморшев А. Н. 128  
Образцов В. Н. 628  
Обухов А. М. 177  
Овсянников Л. В. 173  
Овчинников П. Н. 624  
Огиевецкий И. Е. 35, 37, 84, 143, 532  
Огиевецкий И. И. 532  
Оглоблин Н. В. 38, 656  
Окулич Е. И. 651  
Окунев Б. Н. 656  
Окунев Л. Я. 276, 282  
Олевский А. М. 550, 553, 557—559,  
562, 563, 566, 567  
Олейник О. А. 118, 124, 125, 176, 177,  
179, 211, 218, 656, 657, 699  
Оловянишников С. П. 411, 413, 415, 688  
Ольденбург С. Ф. 10, 16, 624  
Оникиенко С. П. 637  
Онищик А. Л. 179, 213, 283  
Оппенгейм 264  
Орбели И. А. 90  
Оревков Ю. П. 472, 694  
Орлич В. 183, 557, 558  
Орлов В. Б. 637  
Орлов М. Х. 34, 79, 82, 83  
Орлов С. В. 115  
Орз О. 277, 364  
Осипов Р. И. 561  
Осматеску П. К. 467, 695  
Оснос Ю. 624  
Остиану Н. М. 388, 688  
Островский А. И. 436  
Островский И. В. 190  
Остроградский М. В. 129, 139, 140  
Осьмова Н. И. 621  
Отроков Н. Ф. 182  
Очан Ю. С. 539  
Ошерович В. З. 654

Павлюк И. А. 650  
Павлючук А. К. 673  
Падуров Н. 264  
Палладин А. В. 138, 624  
Панайоти Б. Н. 198  
Папалекси Н. Д. 37, 156  
Паплаускас А. Б. 2, 6, 177  
Папп 427  
Парасюк О. С. 2, 144, 185, 187, 188,  
659  
Парсеваль 609  
Парфентьев Н. Н. 14, 27, 51, 75, 108, 656  
Пархоменко А. С. 453

Паскаль 427, 431, 691  
Пасынков Б. А. 176, 358, 449, 451, 461—  
464, 477, 681, 695  
Патон Б. Е. 624  
Паулаускас В. 147, 193  
Пеано 458  
Пейве Я. В. 624  
Пейле Е. 638  
Пекелис А. С. 209  
Пензов Ю. Е. 134, 406, 641  
Пентковский М. В. 114, 202, 630  
Первикова В. Н. 433, 435  
Перепелкин Д. И. 128, 129  
Перна Н. Я. 19  
Перрон 538, 617  
Персидский К. П. 75, 113, 114, 154, 202,  
656  
Пести М. А. 628  
Петерсон И. Ф. 195  
Петерсон К. М. 12, 25, 371, 376, 385,  
527, 673  
Петрашень Г. И. 129, 131, 171, 181  
Петров А. З. 399—401, 688  
Петров В. В. 179, 180, 632, 651  
Петров М. П. 624  
Петров П. И. 407  
Петров Ф. Н. 51, 624  
Петров-Грумант М. 628  
Петровская М. Б. 567  
Петровский И. Г. 22, 68, 69, 77, 106,  
110, 117, 118, 125, 130, 156, 164,  
170, 176, 177, 528, 628, 656, 657, 694  
Петропавловская Р. В. 326, 681  
Петросян Г. Б. 90, 200, 624  
Петросян Н. 89  
Пиголкина Т. С. 601, 603, 606, 607  
Пидо 428  
Пилика П. 592  
Пименов Р. И. 403  
Пинскер А. Г. 131, 180, 183, 279, 365,  
678, 681  
Пинскер М. Ш. 584  
Писарева Н. М. 182  
Пламеннов И. Я. 535  
Пламйтцер А. 40  
Планшерель 199, 347  
Платонов В. П. 193, 317, 362, 363, 681  
Плауде К. 624  
Плеснер А. И. 68, 541, 543, 544, 552,  
657  
Плисс В. А. 129, 179, 181  
Плоткин Б. И. 195, 205, 209, 279, 283,  
313, 315, 316, 318, 325, 331, 364,  
647, 678, 681  
Побединский Б. Г. 89  
Погорелов А. В. 6, 142, 164, 169, 185,  
189, 190, 370, 413—422, 424, 632,  
645, 657, 688, 689  
Погребынский И. Б. 2, 81, 82, 139, 140,  
177, 630, 658, 667

Подвигина Е. П. 666  
 Поддерюгин В. Д. 338, 366, 681  
 Подловченко Р. 152  
 Позняк Э. Г. 422, 423, 689  
 Покровский 649  
 Положий Г. Н. 134, 141, 188, 645  
 Полубаринова-Кочина П. Я. 630, 648, 663  
 Польке 433  
 Поляков В. 470, 695  
 Позизовский И. С. 324, 325, 681  
 Пономарев В. И. 176, 449, 453—457, 462, 464, 692, 695  
 Пономаренко Г. Я. 628  
 Пономаренко Ю. А. 542  
 Понселе 430  
 Понтрягин Л. С. 23, 63, 64, 66—68, 77, 94, 108, 109, 115, 121, 123, 126, 164, 169, 171, 176, 177, 217, 278, 339, 344, 346—348, 356, 426, 427, 439, 450, 460, 464, 473, 477, 487, 489, 490, 492—495, 500, 510, 511, 513, 516—521, 527, 528, 631, 634, 639, 657, 681, 686, 694—696, 698  
 Попов Г. Н. 657  
 Попович П. Р. 166  
 Портнов В. Р. 603  
 Порфирьев Н. И. 51  
 Посвянский А. Д. 435  
 Поссе К. А. 553  
 Пост Э. 326  
 Постников А. Г. 124, 177, 219, 233, 237, 239, 248, 532, 642, 672, 674  
 Постников М. М. 121, 123, 124, 176, 211, 282, 509, 518, 520—522, 633, 681, 692, 696  
 Потапов М. К. 553, 572, 583  
 Правдолюбов А. Л. 77  
 Предтеченский А. В. 624  
 Престон 284, 328, 329  
 Привалов И. И. 22, 23, 29, 63, 64, 66, 100, 113, 531, 536, 543, 544, 546, 547, 563, 657, 700  
 Произолов В. 453, 696  
 Проскуряков И. В. 282  
 Прохоренко В. И. 540  
 Прохоров Ю. В. 125, 170—172, 651  
 Прудников В. Е. 128, 657  
 Прюфер Г. 305, 350  
 Прянишникова З. И. 434  
 Пуанкаре А. 65, 424, 435, 458, 473, 480, 483, 484, 485, 492, 493, 498, 511—513, 518  
 Пуассон 543  
 Пугачев Б. П. 183  
 Пугачев В. С. 128  
 Пуппе 509  
 Путята Т. В. 646, 647, 660  
 Пухов Г. Е. 185, 188  
 Пфафф 372, 528

Пфейффер Г. В. 13, 14, 32—34, 79—81, 110, 138, 141, 657  
 Пхакадзе Ш. С. 197, 538  
 Пшеборский А. П. 14, 35  
 Пэйли 199, 564  
 Пятацкий-Шапиро И. И. 177, 179, 218, 219, 237, 545

Рабинович И. М. 195  
 Раджабов З. Ш. 619, 624  
 Радемахер Г. 554—556, 561  
 Радищев В. П. 435  
 Радовский М. И. 659  
 Размадзе А. М. 43—45, 51, 86, 88, 98, 111, 149, 150, 158, 196, 209, 657  
 Райков Д. А. 176, 280, 347, 348, 666, 681  
 Ракова Э. С. 637  
 Рамм Н. С. 470  
 Расулов М. Л. 198  
 Раус 109  
 Рахматуллин Х. А. 201, 658  
 Рашевский П. К. 69, 71, 121, 164, 176, 283, 370, 393, 394, 396, 397, 399, 404, 427, 428, 630, 632, 641, 646, 658, 689, 691  
 Рашидов Г. 628  
 Рейзинь Л. Э. 194, 195  
 Реймерс Э. 646  
 Реймон 561, 562, 564  
 Рейхардт Х. 292  
 Рейхман 545  
 Ремак Р. 276, 299, 301—303  
 Ремез Е. Я. 2, 79, 80, 110, 139, 140, 145, 185, 187, 584, 585, 658, 700  
 Реморов П. Н. 273, 672  
 Решетняк Ю. Г. 421, 535, 689  
 Риб 528  
 Рибокура 385  
 Ригер 366  
 Риекстыньш Э. Я. 147, 195  
 Риимерис Л. 628  
 Риман 132, 164, 232, 233, 239, 391, 404, 544, 546, 547, 551, 668, 671  
 Рисс 322, 438, 559, 561, 562, 614  
 Риччи 400, 401  
 Робинсон А. 281  
 Рогожин В. С. 183, 184  
 Рогозинский 553, 579  
 Роджерс 373  
 Роднянский А. М. 479, 535, 696  
 Родов А. М. 145  
 Родосский К. А. 134, 183, 239, 240, 665, 672  
 Рожанская Ю. А. 176, 696  
 Рожков И. С. 624  
 Розендорн Э. Р. 422, 423, 689  
 Розенсон Н. А. 407  
 Розенталь М. С. 436

- Розенфельд Б. А. 2, 127, 151, 176, 218,  
397, 402—404, 658, 689  
Розовский М. С. 648  
Ро 462  
Ройтер А. В. 320  
Романенко Г. Н. 6  
Романов Н. А. 652  
Романов Н. П. 67, 78, 154, 239, 658,  
672, 674  
Романовский В. И. 14, 47, 48, 90, 100,  
113, 125, 128, 153, 154, 180, 201,  
631, 654, 658  
Романовский П. И. 538, 539, 550  
Россинский С. Д. 122, 123, 176, 377,  
378  
Рохлин В. А. 123, 136, 180, 181, 520—  
522, 524—526, 528, 696  
Рубинштейн А. И. 553, 564  
Рубинштейн Л. И. 195  
Рудницкий Ю. 49, 103  
Рузевич С. 40, 102, 105  
Рукавицын И. Н. 79, 137, 658  
Рупасов К. А. 635  
Русьян Ц. К. 14, 35  
Руффини 296  
Рухадзе А. К. 45, 87, 88, 98, 150, 197  
Рухадзе А. Р. 511, 696  
Рыбкин Г. Ф. 127, 128  
Рыбников К. А. 2, 126, 127, 159, 176,  
177, 208, 631, 657  
Рыжков В. В. 383, 384, 689  
Рыжов Н. Н. 435  
Рымаренко Б. А. 83, 131, 180, 181, 571,  
573  
Рынин Н. А. 432, 659, 691  
Рышков С. С. 266, 508, 670  
Рябова Е. К. 556  
Рябухин Ю. М. 333, 335, 675, 681  
Ряго Г. А. 49, 50, 102, 103, 148, 149  
Ряппо Я. П. 625, 629
- Сабинин Г. Х. 662  
Сабинин Л. В. 406, 689  
Сабиров М. С. 635  
Савин Г. Н. 84, 144, 646, 647, 654, 659  
Сагателян В. В. 113, 152  
Садовский Л. Е. 277, 279, 282, 306,  
320, 676, 681  
Садыков А. С. 625  
Сайто 324  
Сакович Г. Н. 637  
Сакс 105  
Салем Р. 584  
Салехов Г. С. 642  
Салов В. И. 625  
Салтыков Н. Н. 14  
Самарский А. А. 170—172, 176, 177, 661  
Самойлович А. 625  
Самосюн Г. Б. 179
- Сандакова Н. И. 668  
Санов И. Н. 266, 278, 318, 672, 681  
Сапогов Н. А. 131, 580  
Сарв Я. Х. 49, 50, 103, 148  
Сарманов О. В. 640  
Сарымсаков Т. А. 90, 91, 113, 114, 154,  
201, 217, 470, 658, 659  
Саткевич А. А. 19  
Сатпаев К. И. 625  
Сафронова Г. П. 532  
Свешников Г. Н. 30  
Свешников А. 661  
Севастьянов Б. А. 125  
Севченко А. Н. 146  
Сегал Б. И. 98, 233, 235, 632, 635,  
672  
Седов Л. И. 66, 70, 97, 118, 119, 171,  
176, 177, 208, 648, 651, 659  
Секерж-Зенькович Я. И. 655  
Селиверстов Г. А. 541  
Семянистый В. И. 403  
Сенчищев Н. А. 556  
Сенькин Е. П. 414, 689  
Сергеев М. Н. 659  
Сергиенко С. Р. 625  
Серре Ж.-П. 317, 515, 517, 520, 524,  
698  
Сибирский К. С. 204  
Сидоров А. И. 70  
Сигалов А. Г. 135, 182  
Силов Л. 308  
Симонов Н. И. 189  
Синай Я. Г. 179, 218, 529, 692, 696  
Синдаловский Г. Х. 533  
Синев Е. А. 568  
Синцов Д. М. 13, 14, 36, 53, 55, 79, 82,  
83, 93, 100, 109, 111, 142, 143, 370,  
372—375, 635, 638, 659, 689, 690  
Синюков Н. С. 407  
Сираждинов С. Х. 154, 201, 202, 659  
Ситников К. А. 123, 124, 176, 503—506,  
508, 696  
Ситников К. П. 664  
Ситницкий И. 41  
Сичкар О. А. 6  
Скворцов В. А. 538, 539, 551, 552, 567  
Скзарба 526  
Скляренко Е. Г. 6, 358, 450, 451, 463,  
465, 466, 471, 472, 509, 511, 681,  
696, 698  
Скопец З. А. 431, 435, 691  
Скопин А. И. 272, 295, 672  
Скорняков Л. А. 121, 123, 176, 207,  
281, 282, 325, 332, 337—339, 355,  
365, 635, 682  
Скоробогатько В. Я. 192  
Скороход А. В. 186—188, 562  
Скоутен И. 100  
Скүбенко Б. Ф. 248, 256, 672  
Славенал П. В. 625

- Славутский И. Ш. 250, 670  
Слебодзинский 399  
Слободецкий Л. Н. 183, 593, 594, 598  
Слободянский М. Г. 128  
Слодкевич В. С. 625  
Слугин С. Н. 182  
Слущкий Е. Е. 35, 67, 93, 125, 659  
Смейл С. 525, 526  
Смирнов А. С. 618  
Смирнов В. И. 2, 17, 18, 55, 61, 62, 72—74, 89, 94, 98, 99, 106, 108, 109, 129, 164, 179, 181, 207, 221, 531, 543, 544, 637, 643, 644, 648, 649, 655, 659, 660, 662, 663  
Смирнов Д. М. 175, 281, 311, 314, 315, 366, 682  
Смирнов М. М. 181, 645  
Смирнов Н. В. 67, 124, 169, 171, 647, 659, 660  
Смирнов Н. И. 145  
Смирнов С. А. 436  
Смирнов С. В. 653  
Смирнов Ю. М. 123, 176, 218, 443—447, 459, 461, 465, 466, 468—472, 503, 697  
Смирнова Г. Н. 656  
Смит 248, 478  
Смогоржевский А. С. 82, 141, 188, 435, 660  
Смольский Б. М. 651  
Смышляев В. К. 638  
Соболев С. Л. 61—63, 72, 108, 109, 124—126, 130, 153, 159, 172, 217, 531, 588—590, 593, 596—598, 641, 644, 654, 655, 657, 659, 660, 700  
Соколов В. С. 435  
Соколов И. Г. 192, 576, 667  
Соколов Ю. Д. 2, 32, 34, 79—81, 139, 141, 185—188, 646, 660, 667  
Солищев Ю. К. 595  
Соловьев П. А. 82, 83  
Сологуб В. С. 2, 6  
Солодовников А. С. 407, 689  
Солонников В. А. 594, 595, 599  
Сомов П. О. 14  
Сонин Н. Я. 553  
Соркин Ю. И. 282, 364, 682  
Сорокина Л. А. 632  
Сосинский А. Б. 475, 476, 478, 697  
Софинов П. Г. 619  
Спанье 523  
Спенглер П. Ф. 35  
Спицына Л. А. 430  
Спринджук В. Г. 193, 246, 247, 672  
Сретенский Л. Н. 377, 652, 660  
Старовский В. И. 67  
Станевич В. 49, 103  
Старостин А. И. 209  
Стасюк В. 41  
Стагулявичюс В. 194, 631  
Стеклов В. А. 10, 13—17, 28, 51, 62—65, 74, 84, 93, 97, 106, 108, 118, 120, 121, 124, 126, 127, 129, 131, 136, 137, 149, 152, 157—159, 164, 165, 170—172, 175, 179, 182, 473, 550, 554, 633, 642, 644, 655, 660, 664, 668—673, 680, 681, 683, 687, 691—693, 696, 700  
Стеллецкий И. В. 367, 682  
Степанов Б. И. 146  
Степанов В. В. 22, 25, 66, 68, 70, 94, 98, 108, 110, 115, 117, 119, 125, 531, 533, 534, 609—611, 613, 614, 633, 657, 660, 696, 700  
Степанов В. Ю. 644, 650  
Стечкин С. Б. 124, 171, 177, 532, 540—543, 547, 549, 553, 556, 558, 559, 561, 567, 572, 580, 581, 584, 585, 617, 639, 655, 700  
Стилтьес 94, 538, 540, 588  
Стинод Н. 487, 505—507, 509, 517, 518, 520, 522, 525, 694  
Стожек В. 40, 102, 105  
Стоилов С. 156  
Столлинс 475, 525  
Столяров Н. А. 86, 661  
Столяров Н. Н. 34  
Стоун 443, 453, 467  
Стоценко А. В. 620  
Страдынь Я. П. 625, 631, 632  
Стрелиц Ш. 147  
Стрельцов В. В. 154  
Стройк Д. Я. 100, 424  
Стротер 455, 456  
Стулова О. В. 636  
Субботин М. Ф. 31, 661  
Субханкулов М. А. 156, 203  
Суворов Г. Д. 137, 184, 186, 535  
Суворов Ф. М. 391  
Суетин П. К. 554  
Сулейменов Р. Б. 629  
Сулинский А. 282  
Султанов Ш. 625  
Сурвила П. 194  
Супруненко Д. А. 145, 192, 193, 209, 285, 299, 316, 317, 682  
Суслин М. Я. 22  
Суслов Г. К. 14, 38, 84, 661  
Сушкевич А. К. 30, 36, 78, 82, 83, 93, 100, 142, 143, 189, 276, 284, 322—324, 327, 367, 661, 682, 686  
Схоутен 399, 405  
Сырмус Т. 646  
Сырокомский А. И. 36  
Сярэв А. 196  
Тайбелсон 597  
Тайков Л. В. 540, 541, 550, 558, 582  
Тайманов А. Д. 202, 203, 281

- Тайцлин М. А. 327, 368, 682  
 Такаги 268, 294  
 Талалян А. А. 199, 200, 545—547, 556, 558, 560, 561, 564, 565, 567, 568  
 Талли 329  
 Таллини 366  
 Тамаркин Я. Д. 17, 19  
 Тамбовцев Д. Б. 436  
 Тамм И. Е. 37  
 Тамме Э. 629  
 Тамразов П. М. 187  
 Тамура 322, 324  
 Тандори 556  
 Тарский А. 281  
 Тартаковский В. А. 73, 74, 93, 129, 130, 158, 181, 238, 242, 254, 273, 276, 278, 280, 304, 307, 319, 320, 661, 672, 674, 682  
 Таубина Е. П. 637  
 Тверской П. Н. 661  
 Тевзадзе Г. Н. 398  
 Тедтоев А. А. 625  
 Теляковский С. А. 547, 548, 572, 581, 583  
 Темляков А. А. 128, 661  
 Теплиц 548, 559  
 Терентьев В. П. 629  
 Терехов А. А. 366, 367, 682  
 Тер-Микаэлян Т. М. 200  
 Тер-Мкртчян А. М. 46, 47  
 Терпигоров М. М. 106  
 Тиман А. Ф. 143, 191, 547, 550, 553, 573, 580, 581, 583, 584, 595  
 Тиман М. Ф. 542, 547, 550, 552, 584  
 Тимченко И. Ю. 14, 38, 84, 661  
 Титус 479  
 Тихомандрицкий М. А. 14, 38  
 Тихомиров А. И. 335, 336, 340, 682  
 Тихомиров В. М. 537, 538, 584, 699, 700  
 Тихонов А. Н. 23, 63, 64, 66, 108, 109, 123, 125, 170, 176, 177, 342, 439, 441, 442, 445, 467, 501, 661  
 Тихонов В. А. 183  
 Тичмарш Е. С. 234, 241  
 Говбин А. В. 304  
 Тодес О. М. 634  
 Тодоров И. Т. 211  
 Тоидзе Д. М. 45, 88, 635  
 Толстов Г. П. 124, 128, 533, 534, 536, 538—540, 543, 699, 700  
 Том Р. 520, 521, 524, 527, 528  
 Тома 694  
 Томпсон 302, 318  
 Тоннели 535  
 Тонян А. О. 46, 47, 89  
 Топоногов В. А. 424, 689  
 Топчиев А. В. 625  
 Торопов К. А. 661  
 Трельфалль 518  
 Трофимов П. И. 137, 182  
 Трохимчук Ю. Ю. 187, 211, 479, 697  
 Туганов Н. Г. 137, 385  
 Туманян С. Х. 199  
 Тумаркин Л. А. 23, 123, 176, 458—460, 466, 661  
 Тумашев Г. Т. 132  
 Турецкий А. Х. 86, 145, 192, 193, 573, 580  
 Туркин В. К. 276, 301, 302  
 Турчанинов А. С. 38  
 Турчанинова З. И. 635  
 Тутаев Л. К. 145, 192  
 Туэ 245  
 Тынянский Н. Т. 504, 697  
 Тэйлор 199  
 Тябликов С. В. 641  
 Уайтхед 520, 521, 523, 687  
 Уждавинис Р. В. 247  
 Узаков Ю. К. 638, 644  
 Узков А. И. 277, 282, 308, 332—334, 349, 364, 682, 683, 685, 686  
 Уитни 516—520, 525, 595  
 Улугбек 154  
 Ульм Г. 305, 306, 350, 351  
 Ульянов П. Л. 6, 120, 124, 176, 177, 532, 539—545, 547, 549—551, 553, 555—561, 563—565, 568, 587, 639, 653, 700  
 Уманский А. А. 435  
 Умаров С. У. 625  
 Уолл 524, 526  
 Уолш 560, 564  
 Уразбаев Б. М. 154, 155, 201, 633, 664  
 Уразбаев М. Т. 658  
 Урысон П. С. 22, 25, 342, 438—447, 458—460, 464, 465, 474, 494, 495, 497, 512, 531, 662, 697  
 Усольцев Л. П. 248, 672  
 Успенский В. А. 177  
 Успенский С. В. 594, 596, 601—603  
 Успенский Я. В. 14, 15, 17, 251—253, 640, 642  
 Усуббеков А. Х. 46  
 Уцуми 334  
 Ушаков В. И. 362, 363, 683  
 Ушаков Г. А. 436  
 Ушаков К. А. 662  
 Фабер Г. 562, 574  
 Фавар Ж. 549, 580  
 Фаре М. К. 192  
 Фаддеев Д. К. 6, 74, 129, 131, 158, 169—171, 180, 207, 272, 273, 278, 280, 284, 291—293, 296, 313, 314,

317, 320, 336, 550, 642, 644, 650,  
655, 662, 670, 672, 676, 677, 683  
Фаддеева В. Н. 171  
Фамина Л. А. 664  
Фартиков И. П. 659  
Фаталиев Х. М. 625  
Феденко А. С. 394, 403, 404, 689  
Федоров В. С. 30, 78, 136, 652, 662  
Федоров Е. С. 265, 432, 434  
Федоров Л. 650  
Федоров Ф. И. 145, 193  
Федорченко И. М. 625  
Федькин Г. И. 623  
Федяевский К. К. 662  
Фейер 551, 579, 581  
Фейт В. 302, 318  
Фельдман Н. И. 243, 246, 672  
Феокистов К. П. 166  
Ферма 248, 273  
Ферсман А. Е. 623  
Фесенков В. Г. 631  
Фет А. И. 514, 515, 694, 697  
Фещенко С. Ф. 139, 140, 145, 186—188  
Филимонов М. Р. 637  
Фильчаков П. Ф. 139, 140, 185—187,  
189, 650  
Финашина Г. Н. 641  
Финдли 334  
Фиников С. П. 25, 69, 93, 122, 176, 370—  
372, 376—379, 635, 641, 662, 689  
Финслер 405  
Фиттинг 303  
Фихтенгольц Г. М. 17, 18, 62, 72, 74,  
99, 129, 130, 164, 179—181, 531,  
536, 538, 646, 659, 660, 662  
Фишер 562, 614  
Фогелс Э. К. 103, 195, 240, 241, 672  
Фок В. А. 93  
Фокс 474  
Фольнер 612  
Фоменко О. М. 228, 256, 673  
Фомин Г. А. 547  
Фомин С. В. 179, 445, 467, 468, 643  
Форте 672  
Фосс 373, 398, 423  
Фрадлин Б. Н. 660  
Франк М. Л. 74, 131  
Франкль Ф. И. 128, 155, 208, 493,  
662, 697  
Фрейденталь 449, 468, 471  
Фрейдман П. А. 340, 683  
Фрейман Г. А. 236, 673  
Френкель В. И. 366, 683  
Фреше М. 156, 438, 444, 535  
Фридман А. А. 18, 28, 663  
Фридрихс 596  
Фробениус 253, 268, 269, 287, 298, 320  
Фролов С. В. 513, 698  
Фрум-Кетков Р. Л. 478, 509, 697  
Фрумкин А. Н. 37

Фубини 376, 377, 388, 393, 402, 687  
Фукс Д. Б. 212, 522, 526, 668, 697  
Фукс И. М. 264  
Фукс-Рабинович Д. И. 278, 306  
Фуртвенглер 268, 270  
Фурье 49, 120, 540—544, 546, 547,  
549—553, 556, 558—560, 562—568,  
578—581, 603, 608—610, 613, 615—  
617  
Фуфаев В. В. 599  
  
Хаар 557—560, 562, 565—567, 681  
Хаарблейхер 430  
Хавин А. 625  
Хавин В. П. 553  
Хаджанетян З. 89  
Хажалия Г. Я. 197  
Халилов А. А. 204  
Халилов З. И. 112, 151, 152, 198, 626,  
631, 663  
Хантер Р. 331  
Хапланов М. Г. 135, 183  
Харадзе А. К. 43—45, 86—88, 112, 196,  
197  
Харазов Д. Ф. 111  
Харасахал В. Х. 154, 155, 202  
Харди 228, 230, 241, 242, 254, 256, 535,  
593, 668  
Харрик И. Ю. 573, 587  
Хассе Х. 269, 292—294  
Харшиладзе Ф. И. 197, 547, 553, 562,  
580, 640  
Хаусдорф 24, 352, 438, 441, 454  
Хведелидзе Б. В. 111, 196, 197  
Хендерсон 466  
Хенриксен 453  
Хестенс 595  
Хефлигер 473, 525, 526, 528, 529  
Хиггинс 368  
Хигман 318, 338  
Хилтон 522, 697  
Хинчин А. Я. 22, 23, 30, 51, 55, 63,  
64, 66, 67, 108, 114, 125, 127, 177,  
238, 239, 246, 531, 533, 534, 538, 556,  
647, 663, 674  
Хион Я. В. 281, 282, 324, 338, 366, 368, 683  
Хирцебрух 525, 528, 696  
Хирш 525, 526  
Хловати В. 100  
Хлодовский И. Н. 576  
Хованский А. Н. 642  
Хованский Г. С. 639  
Ходаков В. А. 543  
Ходжа 428  
Холл 321, 336, 340, 356  
Холл М. 279, 365  
Холл Ф. 304, 308, 318  
Хопф 477, 478, 504, 507, 517, 518, 520  
Хорунов Р. Х. 638

- Хотимский В. И. 67  
Христианович С. А. 63, 64, 106, 107, 630  
Ху 509  
Хузурбазар М. М. 316  
Хумал А. К. 103, 148, 149, 195, 196, 663  
Хускивадзе Г. А. 539  
Хухуниашвили Г. Е. 197
- Цаленко М. С. 369, 679, 683  
Церетели О. Д. 539, 551  
Цермело 538  
Цетлин М. Л. 663  
Цехер Л. 629  
Цзян 526  
Циммерман В. А. 13, 14  
Цингер В. Я. 425, 690  
Цинзерлинг Д. П. 19  
Циолковский К. Э. 659  
Циппин 350, 351, 356, 450, 471  
Цитланадзе Э. С. 150, 197, 514  
Цихистави В. Г. 197  
Цлаф Л. Я. 635  
Цхадаия Т. Г. 197  
Цхакая Д. Г. 45, 88, 197  
Цыганкова Э. Г. 6  
Цыганов И. С. 623
- Чайковский Н. А. 41, 84, 192, 638  
Чакань Б. 368  
Чалый А. Т. 6, 691  
Чантурия З. А. 562, 563  
Чаплыгин С. А. 12, 14, 17, 25, 26, 61, 65, 66, 70, 96, 98, 115, 140, 663, 664  
Чарин В. С. 6, 137, 182, 188, 279, 283, 284, 315, 361, 664, 683  
Чахтаури А. И. 88, 398  
Чеботарев Н. Г. 38, 61, 75, 93, 94, 100, 108, 109, 132, 158, 267—269, 275, 278, 286—290, 292—294, 296—298, 341, 375, 376, 568, 631, 636, 664, 666, 673—675, 683, 690  
Чебышев П. Л. 13, 15—17, 22, 62, 115, 142, 156, 225, 241, 553, 568, 571, 575, 583, 584, 588, 639, 644  
Чева 690  
Чезаро 559  
Челидзе В. Г. 45, 88, 112, 150, 197, 532, 538, 539, 552  
Чепелев К. Г. 619  
Черемисин А. И. 366, 684  
Черкас Л. А. 193  
Черн 520, 693  
Чернавский А. В. 6, 474—476, 478—480, 697  
Черников С. Н. 76, 77, 136, 137, 182, 186, 187, 207, 277, 279, 284, 304, 309, 311, 312, 314, 318, 321, 349, 360, 361, 664, 679, 684  
Чернышев А. А. 664  
Чернышев В. И. 621  
Чернышенко В. М. 191  
Черняев М. П. 76, 134, 431, 691  
Четаев Н. Г. 75, 76, 114, 202, 654, 665  
Четвериков Н. С. 665  
Четверухин Н. Ф. 176, 431—433, 435, 665, 690, 691  
Чех Э. 447, 467, 486, 501, 503, 505, 506, 508, 509  
Чикин Л. А. 183, 643  
Чирнгаузен 288, 289, 297, 683  
Чистяков В. Д. 656  
Чичигин В. Г. 665  
Чкалов Л. 289  
Чогошвили Г. С. 2, 6, 88, 112, 149, 150, 196, 197, 499, 500—502, 504, 505, 514, 641, 665, 698  
Чочиев Ф. З. 665  
Чудаков Н. Г. 67, 77, 109, 134, 180, 233, 234, 239, 641, 665, 668, 673, 674  
Чудинов Д. К. 626  
Чунихин С. А. 137, 146, 192, 193, 209, 276, 280, 285, 301, 302, 308, 321, 684
- Шабат Б. В. 176, 649, 653  
Шагинян А. Л. 89, 113, 152, 153, 199, 200, 217, 586, 665  
Шайн Б. М. 284, 324, 327—329, 331, 332, 684, 686  
Шаль 430  
Шаманский В. Е. 145  
Шанин Н. А. 131, 181, 445, 446, 457, 467, 653  
Шапель В. В. 626  
Шапиро Г. М. 394, 665  
Шапиро Я. Л. 135, 395  
Шапиро-Пятецкий И. И. (см. Пятецкий-Шапиро И. И.)  
Шапуков Б. О. 650  
Шарковский А. Н. 187  
Шарыгин И. Ф. 237, 673  
Шаташвили С. Х. 197  
Шатулина Л. 657  
Шатуновский С. О. 13, 14, 37, 38, 55, 84, 123, 275, 286, 666  
Шатуновский Я. 633  
Шаудер 102, 105, 560  
Шафаревич И. Р. 121, 124, 158, 169—171, 176, 179, 218, 266, 270—273, 280, 282, 283, 291, 293—295, 314, 317, 318, 339, 348, 644, 662, 666, 668, 670, 673, 677, 684  
Шафрановский К. И. 637  
Шахов Ю. Н. 673

- Шварц 433, 540  
 Шварц А. С. 469, 515, 523, 526, 528, 696—698  
 Шварц Ш. 322, 331  
 Шведов И. А. 449, 507, 508, 694, 698  
 Швейкин П. И. 388, 389, 689  
 Шевалле К. 287, 294  
 Шевело В. И. 659  
 Шеврин Л. Н. 283, 322, 325, 326, 328, 684  
 Шеляков Л. Д. 626  
 Шейнберг Я. А. 620  
 Шенфлис 475  
 Шереметьев М. П. 144  
 Шернас П. 49, 102  
 Шидловский А. Б. 176, 243, 245, 246, 673  
 Шилов Г. Е. 120, 126, 141, 176, 177, 179, 218, 633, 643, 655  
 Шилов Л. А. 629  
 Шилов М. Е. 204  
 Шимбирева Е. П. 279, 282, 365, 366, 684  
 Ширков Д. В. 173  
 Широков А. П. 181, 393, 398, 399  
 Широков М. Ф. 180  
 Широков П. А. 27, 51, 75, 108, 109, 185, 370, 392—395, 397—399, 402, 404, 407, 666, 689  
 Ширшов А. И. 169, 170, 173, 176, 205, 281, 282, 332, 333, 337, 338, 340, 684, 685  
 Шмелькин А. Л. 282, 319, 320, 685  
 Шмидов Ф. И. 193, 535, 538  
 Шмидт О. Ю. 14, 24, 61, 63, 68, 71, 79, 92—94, 98, 121, 158, 275—279, 299—304, 309, 311, 318, 349, 364, 626, 631, 666, 685  
 Шмуклер А. И. 542, 543  
 Шмультян В. Л. 108, 666  
 Шнейдер А. А. 564  
 Шнейдмюллер В. И. 325, 340, 685  
 Шнеперман Л. Б. 324, 330, 331  
 Шнирельман Л. Г. 23, 24, 61, 63, 67, 68, 94, 235, 238, 239, 424, 511—513, 523, 584, 667, 671, 673, 688, 693, 694, 698  
 Шольц А. 292, 293  
 Шор Я. Б. 435  
 Шпехт 337  
 Шпильрайн Я. Н. 457  
 Шрейер О. 310, 319, 342, 364, 686  
 Штаерман И. Я. 79, 82, 98, 667  
 Штанько М. 476, 477  
 Штаудт Х. 426, 431, 435, 691  
 Штейнгауз Г. 40, 85  
 Штейниц Е. 294  
 Штейнфельд Л. П. 626  
 Штифель 519—521  
 Штокало И. З. 2, 6, 82, 83, 110, 111, 138—141, 144, 185, 187, 188, 630, 631, 636, 641, 642, 650, 667  
 Штуди 393, 399  
 Штурм 561  
 Шузаки Огино 430, 690  
 Шуликовский В. И. 398, 689  
 Шульгейфер Е. Г. 333, 335, 679, 685  
 Шульман З. П. 651  
 Шур И. 75, 298, 300, 316, 320  
 Шура-Бура М. Р. 128, 176, 177, 449, 650  
 Шутов Э. Г. 324, 329, 685  
 Шухардин С. В. 621  
 Шюцанберже 325  
 Щеглов М. П. 532  
 Щегольков Е. А. 656  
 Щербаков Д. И. 666  
 Щербаков Р. Н. 184, 379, 381, 689  
 Щербань А. Н. 626  
 Щербина К. Н. 38  
 Щукин К. К. 315  
 Эдельман 285  
 Эйдельман С. Д. 192  
 Эйзенштейн 248  
 Эйленберг С. 280, 281, 313, 317, 368, 506, 507, 509, 517, 520—523  
 Эйлер Л. 145, 162, 225, 230, 231, 248, 268, 557, 604, 606  
 Эйнштейн 395, 399—401, 688  
 Эйхлер М. 248, 256  
 Экман 522, 697  
 Эльсгольц Л. Э. 513, 514, 698  
 Энгелькинг Р. 471  
 Эндельман М. И. 201  
 Эннепер 373  
 Энриквес 426  
 Эратосфен 230, 242, 668  
 Эресман 328  
 Эрман Л. М. 638  
 Эрмит 248, 258, 259, 262, 264, 553  
 Эскин Г. И. 599  
 Эфендиев М. Р. 46, 89, 151, 631  
 Эфрос А. М. 83  
 Юдин М. Н. 661  
 Юнг 479  
 Юримяз Э. 646  
 Юшкевич А. П. 2, 6, 69, 70, 127, 128, 157, 162, 177, 630, 632, 667  
 Яаксон Х. Я. 49, 50, 103, 148, 195, 667  
 Яблоков В. А. 27, 75, 656, 667  
 Яблонский А. И. 193  
 Яблонский В. С. 651



Яблонский С. В. 650  
Яглом А. М. 120  
Яглом И. М. 633, 658  
Якоби 80, 250, 253, 553, 561  
Якобсон М. 638  
Яковлев А. В. 294, 685  
Яковлев Г. Н. 593, 595, 599, 601, 602, 605  
Якубов С. Я. 198  
Якубович В. А. 179, 181, 661

Ямабе 450  
Яненко Н. Н. 170, 171, 173, 407, 408,  
689  
Янков В. А. 394  
Яновская С. А. 26, 69, 77, 93, 126, 127,  
177, 667  
Яновский Б. М. 661  
Ярник В. 227, 238  
Ярошенко С. П. 14

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                       |   |
|-----------------------|---|
| ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . . | 5 |
|-----------------------|---|

### История развития математики в СССР за 50 лет

#### ГЛАВА ПЕРВАЯ. НАЧАЛЬНЫЙ ПЕРИОД РАЗВИТИЯ СОВЕТСКОЙ МАТЕМАТИКИ (А. Н. Боголюбов)

|                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Первые мероприятия Советской власти в области развития науки и высшего образования в стране . . . . . | 9  |
| 2. Математические исследования и преподавание математики в стране в 1917 г. . . . .                      | 12 |
| 3. Математика в Ленинграде в первые годы Советской власти . . . . .                                      | 15 |
| 4. Математика в Москве . . . . .                                                                         | 19 |
| 5. Развитие математики в других вузовских центрах РСФСР . . . . .                                        | 27 |
| 6. Математика в Украинской ССР . . . . .                                                                 | 32 |
| 7. Математика в Белорусской ССР . . . . .                                                                | 42 |
| 8. Математика в Грузинской ССР . . . . .                                                                 | 43 |
| 9. Математика в Азербайджанской ССР . . . . .                                                            | 45 |
| 10. Математика в Армянской ССР . . . . .                                                                 | 46 |
| 11. Математика в республиках Средней Азии и в Казахской ССР . . . . .                                    | 47 |
| 12. Развитие математики в Прибалтийских республиках . . . . .                                            | 48 |
| 13. Творческие связи советских математиков . . . . .                                                     | 51 |

#### ГЛАВА ВТОРАЯ. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В СССР В 30-е ГОДЫ (А. Н. Боголюбов)

|                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Развитие высшей школы в годы первых пятилеток . . . . .                                         | 57 |
| 2. Математика в Академии наук СССР, ленинградских и московских высших учебных заведениях . . . . . | 61 |
| 3. Развитие математики в других городах РСФСР . . . . .                                            | 74 |
| 4. Математика в Украинской ССР . . . . .                                                           | 79 |
| 5. Математика в Белорусской ССР . . . . .                                                          | 85 |
| 6. Математика в Грузинской ССР . . . . .                                                           | 86 |
| 7. Математика в Азербайджанской ССР . . . . .                                                      | 88 |
| 8. Математика в Армянской ССР . . . . .                                                            | 89 |
| 9. Математика в Среднеазиатских республиках . . . . .                                              | 90 |
| 10. Математические совещания. Издание математической литературы . . . . .                          | 91 |

|                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11. Международные научные связи . . . . .                                                       | 100 |
| 12 Математика в западных областях Украины, Белоруссии и в Прибалтике<br>в 1939—1941 гг. . . . . | 101 |

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В СССР В ГОДЫ ВЕЛИКОЙ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЫ И В ПОСЛЕВОЕННЫЙ ПЕРИОД (1941—1958 гг.) (А. Н. Боголюбов)

|                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Эвакуация академических учреждений и высших учебных заведений в<br>начале Великой Отечественной войны . . . . . | 104 |
| 2. Математические исследования в период Великой Отечественной войны . . . . .                                      | 108 |
| 3. Задачи советской науки в первые послевоенные годы . . . . .                                                     | 115 |
| 4. Деятельность Академии наук СССР и московских математиков в после-<br>военные годы . . . . .                     | 117 |
| 5. Исследования ленинградских математиков в послевоенные годы . . . . .                                            | 129 |
| 6. Развитие математики в послевоенные годы в других научных и вузов-<br>ских центрах РСФСР . . . . .               | 132 |
| 7. Развитие математических исследований в Украинской ССР . . . . .                                                 | 138 |
| 8. Развитие математики в Белорусской ССР . . . . .                                                                 | 145 |
| 9. Математика в Прибалтийских республиках . . . . .                                                                | 146 |
| 10. Математика в Грузинской ССР . . . . .                                                                          | 149 |
| 11. Математика в Азербайджанской ССР . . . . .                                                                     | 151 |
| 12. Математика в Армянской ССР . . . . .                                                                           | 152 |
| 13. Развитие математики в республиках Средней Азии и в Казахской ССР . . . . .                                     | 153 |
| 14. Математические научные совещания, конференции и съезды . . . . .                                               | 156 |
| 15. Связи советских ученых с зарубежными математиками. Математическая<br>литература и периодика . . . . .          | 163 |

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В ПЕРИОД РАЗВЕРНУТОГО СТРОИТЕЛЬСТВА КОММУНИЗМА (1958—1967 гг.) (А. Н. Боголюбов)

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Математика в Академии наук СССР . . . . .                                      | 166 |
| 2. IV Всесоюзный математический съезд. Математика в Москве и Ленинграде . . . . . | 175 |
| 3. Математика в других научных центрах РСФСР . . . . .                            | 181 |
| 4. Развитие математики в Украинской ССР . . . . .                                 | 185 |
| 5. Математические исследования в Белорусской ССР . . . . .                        | 192 |
| 6. Исследования в области математики в Прибалтийских республиках . . . . .        | 193 |
| 7. Математика в Грузинской ССР . . . . .                                          | 196 |
| 8. Математика в Азербайджанской ССР . . . . .                                     | 198 |
| 9. Математика в Армянской ССР . . . . .                                           | 199 |
| 10. Математика в Среднеазиатских республиках и в Казахской ССР . . . . .          | 201 |
| 11. Математика в Молдавской ССР . . . . .                                         | 204 |
| 12. Математические совещания, конференции, съезды . . . . .                       | 205 |
| 13. Международные творческие связи советских ученых-математиков . . . . .         | 216 |

## Основные направления математики в СССР

### ГЛАВА ПЯТАЯ. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ (Ю. В. Линник) . . . . .                                              | 225 |
| 1. Аддитивные проблемы, диофантовы приближения и теория распределения<br>простых чисел . . . . . | 226 |
| 2. Теоретико-числовые задачи теории функций. Трансцендентные числа . . . . .                     | 243 |
| 3. Метрическая теория чисел. Эргодические методы . . . . .                                       | 246 |

|                                                                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. ГЕОМЕТРИЯ ЧИСЕЛ ( <i>А. В. Малышев</i> ) . . . . .                                                           | 248 |
| 1. Число классов бинарных квадратичных форм . . . . .                                                                            | 248 |
| 2. Точные и асимптотические формулы для числа представлений. Распределение целых точек на поверхностях второго порядка . . . . . | 252 |
| 3. Геометрия квадратичных форм. Теория приведения . . . . .                                                                      | 257 |
| 4. Теория арифметических минимумов . . . . .                                                                                     | 261 |
| 5. Правильное деление пространства . . . . .                                                                                     | 264 |
| АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ ( <i>Б. Б. Венков</i> ) . . . . .                                                                    | 266 |
| 1. Поля алгебраических чисел . . . . .                                                                                           | 267 |
| 2. Неопределенные уравнения . . . . .                                                                                            | 272 |

## ГЛАВА ШЕСТАЯ. АЛГЕБРА

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ОБЩИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ АЛГЕБРЫ В СССР ( <i>Л. А. Калужнин, А. Г. Курош</i> ) . . . . . | 275 |
| ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ И ТЕОРИЯ ГАЛУА ( <i>Л. А. Калужнин, Д. К. Фаддеев</i> ) . . . . .       | 285 |
| ТЕОРИЯ ГРУПП ( <i>Л. А. Калужнин</i> ) . . . . .                                     | 298 |
| ТЕОРИЯ ПОЛУГРУПП ( <i>Л. М. Глускин</i> ) . . . . .                                  | 321 |
| ТЕОРИЯ КОЛЕЦ ( <i>В. А. Андрунакиевич</i> ) . . . . .                                | 332 |
| ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА ( <i>В. С. Чарин</i> ) . . . . .                              | 341 |
| НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ РАЗДЕЛЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ ( <i>А. Г. Курош</i> ) . . . . .              | 363 |

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

|                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ( <i>Я. П. Бланк</i> ) . . . . .           | 371 |
| РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ И ЕЕ РАЗЛИЧНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ( <i>Д. З. Гордеевский</i> ) . . . . . | 391 |
| ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ «В ЦЕЛОМ» ( <i>А. В. Погорелов</i> ) . . . . .                   | 408 |

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ. ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ( <i>Г. Л. Буймола</i> ) . . . . .  | 425 |
| НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ( <i>А. Т. Чалый</i> ) . . . . . | 432 |

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ. ТОПОЛОГИЯ

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ ( <i>Е. Г. Скляренко</i> ) . . . . .                                          | 437 |
| 1. Общая теория топологических пространств . . . . .                                          | 439 |
| 2. Непрерывные отображения топологических пространств . . . . .                               | 451 |
| 3. Теория размерности . . . . .                                                               | 458 |
| 4. Равномерные пространства и бикомпактные расширения . . . . .                               | 467 |
| ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ МНОГООБРАЗИЙ ( <i>А. В. Чернавский</i> ) . . . . .                   | 473 |
| 1. Проблемы вложения . . . . .                                                                | 473 |
| 2. Открытые отображения многообразий . . . . .                                                | 477 |
| ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ ( <i>Г. С. Чогошвили</i> ) . . . . .                                 | 480 |
| ГОМОТОПИЧЕСКАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ . . . . .                                         | 511 |
| 1. Советская школа вариационного исчисления в целом ( <i>А. М. Виноградов</i> ) . . . . .     | 512 |
| 2. Теория гомотопий и гладкие многообразия в 30—40-х годах ( <i>С. П. Новиков</i> ) . . . . . | 516 |
| 3. Современные работы ( <i>А. М. Виноградов, С. П. Новиков</i> ) . . . . .                    | 522 |

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

|                                                                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ( <i>П. Л. Улянов</i> ) . . . . .                                                                   | 530 |
| 1. Измеримые функции. Дифференцирование. Суперпозиции функций . . .                                                            | 532 |
| 2. Интегрирование . . . . .                                                                                                    | 538 |
| 3. Тригонометрические ряды . . . . .                                                                                           | 540 |
| 4. Ортогональные ряды, системы и их обобщения . . . . .                                                                        | 553 |
| ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ ( <i>С. М. Никольский</i> )                                                            | 568 |
| ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ТЕОРЕМЫ<br>ВЛОЖЕНИЯ) ( <i>Л. Д. Кудрявцев, С. М. Никольский</i> ) . . . . . | 588 |
| КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ( <i>А. С. Ковань-<br/>ко, В. С. Сологуб</i> ) . . . . .                      | 607 |
| БИБЛИОГРАФИЯ . . . . .                                                                                                         | 618 |
| ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . . .                                                                                                    | 701 |

Печатается по постановлению ученого совета Института истории АН УССР и главной редакции.

Редактор *Е. Л. Орлик*. Художественный редактор *И. П. Антолюк*. Оформление художника *Б. В. Валуенко*. Технические редакторы *Н. А. Турбанова*, *Б. М. Кричевская*. Корректор *Р. С. Кеган*.

БФ 01792 Зак. № 830. Изд. № 174. Тираж 20 000. Бумага № 1,  $70 \times 100^{1/16}$ . Печ. физ. листов 45,5. Услови. печ. листов 59,15. Учетно-изд. листов 53,96. Подписано к печати 6/VI-1968 г. Цена 3 руб65 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Отпечатано с матриц фабрики набора в Киевской книжной типографии № 5 Комитета по печати при Совете Министров УССР, Киев, Репина, 4. Зак. 311.



